Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 322, 2005 г.

А. И. Виноградов

КРАТКИЙ ОЧЕРК НАУЧНОЙ, ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ И ОБЩЕСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Ю. В. ЛИННИКА

Юрий Владимирович Линник родился 8 января 1915 г. в г. Белая Церковь, умер 30 июня 1972 г. в Ленинграде.

Родители Ю. В. Линника — Владимир Павлович Линник и Мария Абрамовна Линник были учителями.

Основные научные интересы Ю. В. Линника принадлежали теории чисел, теории вероятностей и математической статистике.

Все творчество Ю. В. Линника в области теории чисел можно разбить на несколько периодов, в каждом из которых он интересовался определенным кругом проблем.

Самый первый юношеский интерес его связан с задачей представления целого числа тернарной квадратичной формой определенного типа. Здесь сказалось влияние проф. Б. А. Венкова, который читал тогда в ЛГУ курс теории чисел, и личные научные интересы которого лежали в этой области, восходящей еще к Гауссу.

Тернарную форму можно трактовать как эллипсоид в трехмерном пространстве, и вопрос о количестве представлений целого числа сводится к подсчету числа целых точек на эллипсоиде. До Ю. В. Линника этот вопрос был решен для сферы. Ему удалось решить эту задачу для более широкого класса тернарных форм.

Затем его интересы начали смещаться в сторону кругового метода Харди–Литтльвуда и метода тригонометрических сумм И. М. Виноградова.

В 1940 г. он заинтересовался гипотезой И. М. Виноградова о наименьшем невычете, которая в дальнейшем стала одной из его любимых проблем, над которой он размышлял до конца жизни. В 1941 г. он публикует заметку в Докладах Академии наук СССР, где доказывает, что гипотеза И. М. Виноградова верна для всех модулей, кроме, быть может, ограниченного множества. Эта статья называлась “Большое решето” и ее ждала блестящая судьба. Проблемы, которые были заключены в этой статье, породили целое научное направление, и к настоящему времени оно является ведущим в теории чисел, давшим сотни статей и десятки книг во всем мире. Идеи этой статьи позволили доказать в середине 60-х годов арифметический аналог расширенной гипотезы Римана (РГР), а так как с РГР связан почти необозримый круг проблем в теории чисел, то становится понятным, почему так необычна судьба этой маленькой заметки.

В военные годы Ю. В. Линник публикует ряд глубоких работ по методу И. М. Виноградова, где связывает этот метод с p-адической арифметикой локальных полей и получает оценку полиномиальной суммы Г. Вейля с понижающей степенью $1/n^2|\log$, где n – степень полинома. Эти идеи получили дальнейшее развитие в работах А. А. Карацубы.

В эти же годы Юрий Владимирович изучает теорию L-рядов Дирихле и начинает сравнивать метод L-рядов с методом И. М. Виноградова. Он пытался в это время ответить на вопрос – можно ли получить оценку И. М. Виноградова для сумм по простым числам с помощью плотностных теорем для L-рядов. Такая постановка вопроса оказалась в высшей степени плодотворной. Она позволила ему создать новые методы как в мультипликативной, так и в аддитивной теории чисел. Эти поиски привели его в 1944 г. к ныне знаменитой теореме о наименьшем простом числе в арифметической прогрессии. В серии этих исследований он создал новый плотностный метод в d-аспекте, который потом усиленно развивался как у нас, так и за рубежом. Вышло в свет много работ, в которых авторы пытались снизить константу Линника (показатель степени модуля d, которого не превосходит минимальное простое).

Эта теорема Ю. В. Линника свидетельствует о благотворном влиянии метода И. М. Виноградова на мультипликативную теорию чисел. Но уже в 1946 г. Юрий Владимирович понял, что существует и обратная связь. К этому времени ему удалось доказать, что оценка И. М. Виноградова для простых чисел действительно может быть получена методом плотностных теорем. Это позволило ему дать новое доказательство знаменитой теоремы Виноградова–Гольдбаха о трех простых. Тем самым он обогатил методы аддитивной теории чисел за счет идей, заимствованных из мультипликативной теории чисел.

В этой серии работ Ю. В. Линник развил плотностной метод L-рядов в t-аспекте. Отметим, что t- и d-аспекты, развитые Ю. В. Линником в теории L-рядов, различны по своей природе. Первый аспект касается аналитической природы L-функций Дирихле, так как t-мнимая часть аналитического параметра s. Второй аспект связан с арифметической природой L-рядов, так как d-модуль характера Дирихле. Оба эти аспекта успешно развивались многими авторами, но шли параллельно друг другу, пока, наконец, не объединились в начале 70-х годов под единой шапкой метода "большого решета" в интерпретации Х. Монтгомери.

Надо отметить, что на военные годы (1943 г.) падает и его знаменитое элементарное решение проблемы Варинга, ставшее широко известным благодаря книге А. Я. Хинчина "Три жемчужины теории чисел."

В конце 40-х – начале 50-х годов Ю. В. Линник много размышлял над бинарной проблемой Гольдбаха. Он обнаружил, что круговой метод вместе с РГР не достает до этой проблемы. Нехватало совсем немного – последовательности логарифмической плотности. Эти размышления породили серию работ. Отметим две из них, которые являются итоговыми: "Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха", 1952 г. и "Складывание простых чисел со степенями одного и того же числа", 1953 г.

В середине 50-х годов Юрий Владимирович снова возвращается к своим юношеским увлечениям тернарными формами. Он продолжает и развивает свои довоенные идеи. Главным отличием этих исследований от довоенных является их эргодический характер. В это время его интересует не только общее количество целых точек на всей сфере, но и распределение их на отдельных кусках ее. В этой серии работ ему удалось установить фундаментальный факт – равномерность распределения целых точек на сфере (совместно с А. В. Малышевым). Итоговым трудом этого цикла является его работа "Асимптотико-геометрические и эргодические свойства множеств целых точек на сфере", 1957 г. В это же время он обдумывал и проблему распределения целых точек на гиперболоидах. Эта задача тесно связана с арифметикой бинарных определенных квадратичных форм. Если взять класс таких форм с фиксированным дискриминантом, а коэффициенты этих форм трактовать как свободные параметры, то мы получим гиперболоид. Если ограничиться только приведенными формами, то гауссовские условия приведения вырежут на гиперболоиде некомпактную область приведения. Число целых точек в этой области будет совпадать с числом различных форм с одним и тем же дискриминантом. Естественно поставить вопрос – сколько будет целых точек в некоторой части области приведения? Это аналог вопроса о целых точках на кусках сферы. Но если там можно было рассматривать сферу в обычном евклидовом пространстве, то здесь евклидова метрика уже не работает. Нужно погрузить гиперболоид в неевклидово пространство и воспользоваться метрикой Лобачевского. Сама идея перехода к неевклидовой метрике была высказана Б. А. Венковым в 1951 г. Ю. В. Линник существенно развил ее и дополнил. Отметим, что в этом направлении существует принципиальная разница между случаями двуполостного и однополостного гиперболоидов. Первый случай отвечает положительно определенным бинарным квадратичным формам, или, другими словами, мнимым квадратичным полям. Второй – неопределенным формам или вещественным квадратичным полям. Принципиальную разницу вносит имеющая бесконечный порядок единица вещественного поля, которой нет в мнимых полях. Сам Юрий Владимирович исследовал эргодические свойства двуполостного гиперболоида, а его ученик Б. Ф. Скубенко – однополостного. Отметим главную работу этой серии: “Асимптотическое распределение приведенных бинарных квадратичных форм в связи с геометрией Лобачевского”, 1955 г.

В конце 50-х – начале 60-х годов Ю. В. Линник создает новый, дисперсионный метод в теории чисел. В 1960 г. он решил этим методом известную проблему Харди–Литтльвуда о представимости каждого целого числа суммой простого и двух квадратов. Суть этого метода кратко в следующем. Чаще всего мы не можем вычислить асимптотику арифметической функции в прогрессии с большим модулем. Но иногда возникает возможность вычислить дисперсию этой суммы по всем большим модулям. Юрий Владимирович заметил, что этого достаточно для многих проблем и, в частности, для проблемы Харди–Литтльвуда. Именно поэтому метод и был назван дисперсионным, хотя с вероятностными методами, по существу, нет никакой связи. Идеи этого метода были изложены им в серии работ конца 50-х – начала 60-х годов. Полное представление об этом методе можно получить, прочитав его монографию “Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах”, 1961 г. С этого времени и до конца жизни он несколько раз возвращался к этому методу, развивая и дополняя его.

В середине 60-х годов Ю. В. Линник в третий раз вернулся к проблематике тернарных форм. На этот раз толчком к этому послужила его короткая заметка в Докладах Академии наук СССР, 1966 г. “Гиперэллиптические кривые и наименьший простой квадратичный вычет”. В ней было показано, что этот вычет имеет порядок корня 4-й степени из модуля. Это существенно упрощало всю теорию тернарных форм, развитую Ю. В. Линником в двух предыдущих периодах. В то время сильно сказывалась “нехватка” малых простых вычетов. Тогда не удавалось показать, что они лежат ниже корня квадратного из модуля. Это обстоятельство усложнило метод и сделало его громоздким в техническом отношении, так как приходилось “обходить” большие вычеты. После заметки 1966 г. эти сложности обхода пропали. Теория стала прозрачной и красивой. Юрий Владимирович изложил ее в монографии “Эргодические свойства алгебраических полей”, 1967 г. В это же время он обнаружил эргодические свойства дисперсионного метода. Это сочетание геометрии с дисперсионным методом породило серию работ, выполненных совместно с Б. М. Бредихиным. Отметим главную из них “Асимптотика и эргодические свойства решений обобщенного уравнения Гарди–Литтльвуда”, где эти идеи изложены наиболее подробно.

В конце жизни он понял, что с помощью дисперсионного метода можно получить элементарное доказательство теоремы Виноградова–Гольдбаха о трех простых. Эта находка изложена в его последней работе по теории чисел “Новый метод в аналитической теории чисел” совместно с Б. М. Бредихиным, которая вышла после его смерти, в 1974 г., в сборнике “Актуальные проблемы аналитической теории чисел”.

Сейчас ясно, что теоретико-числовые работы Ю. В. Линника во многом определили лицо современной теории чисел, особенно той ее части, которая касается L-рядов и плотностных методов.