Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 322, 2005 г.

Ю. А. Смирнов

ОБ ИНДЕКСЕ ГРАНИЧНЫХ УЗЛОВ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ РЕШЕТОК, ДОПУСТИМЫХ ДЛЯ КУБА

Введение

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$ множество всех полных решеток в $\mathbb{R}^s$ $(s = 2, 3, \ldots)$. В дальнейшем, для краткости, слово "полная" будем опускать, так как мы будем иметь дело только с такими решетками. Каждую из них можно представить в виде

$$\Gamma = \{m_1\gamma^{(1)} + \cdots + m_s\gamma^{(s)} \mid \ m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\},$$

где $\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(s)}$ – s-мерные линейно независимые базисные узлы Γ. Выделим в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$ подмножество $\widetilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^s)$, состоящее из всех решеток "общего положения", у которых $\gamma_j \neq 0$ при всех $j = 1, \ldots, s$ для любого ненулевого узла $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$. Другими словами, у таких решеток Γ на координатных гиперплоскостях нет узлов, отличных от начала координат. Для дальнейшего полезно иметь в виду

Замечание 1. Пусть γ и γ' – узлы решетки Γ из $\widetilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^s)$. Предположим, что для некоторого $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$ выполняется равенство $|\gamma_j| = |\gamma'_j|$. Тогда $\gamma' = \pm\gamma$.

Напомним, что решетка Γ из $\mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$ называется *допустимой* для s-мерного куба $[-1, 1]^s$, если внутри него находится только нулевой узел Γ (см. [1, гл. III, §5]).

Пусть $\mathcal{K} = \langle \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(s)} \rangle$ – произвольный набор из s узлов решетки $\Gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$. Каждый из них есть целочисленная линейная комбинация базисных узлов $\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(s)}$ решетки Γ. Обозначим через $M_\Gamma(\mathcal{K})$ соответствующую матрицу перехода от

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 04-01-97000) и Дальневосточного отделения РАН (грант No. 04-1-01-003).

$\langle\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(s)}\rangle$ к $\langle\eta^{(1)},\dots,\eta^{(s)}\rangle$. Тогда $\det(M_\Gamma(\mathcal{K}))=nD(\Gamma)$ для некоторого целого n и $D(\Gamma)=|\det(\gamma_j^{(i)})|$ – определитель решетки Γ. По определению, $I_\Gamma(\mathcal{K})=|n|$ – *индекс набора* $\mathcal{K}$ в Γ (см. [1, гл. I,§2]). Величина $I_\Gamma(\mathcal{K})$ равна нулю только в случае линейной зависимости узлов из $\mathcal{K}$.

В связи с многомерными обобщениями классического алгоритма непрерывных дробей, большой интерес представляет задача о вычислении множества значений $I_\Gamma(\mathcal{K})$ для решеток "общего положения" Γ из $\widetilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^s)$ при фиксированном s. Хорошо известно, что для $s=2$ всегда $I_\Gamma(\mathcal{K})=1$ (Минковский [2], Вороной [3]), а для $s=3$ среди значений $I_\Gamma(\mathcal{K})$ могут быть только 0 или 1 (Минковский [2]). При $s=4$ из результатов работы [4] (см. также [5]) немедленно следует неравенство $I_\Gamma(\mathcal{K})\leqslant 5$. Мы уточняем эту оценку в следующем виде.

Теорема. *Для решеток общего положения из* $\widetilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^4)$ *множество всех возможных значений* $I_\Gamma(\mathcal{K})$ *совпадает с* $\{0,1,2\}$.

§1. О дополнении набора граничных узлов до базиса

Пусть Γ произвольная решетка из $\mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$, $\mathcal{K}=\langle\eta^{(1)},\dots,\eta^{(t)}\rangle$ – любой набор узлов из Γ с $1\leqslant t\leqslant s$. Обозначим через $\Lambda_t^{(s)}$ $(1\leqslant t\leqslant s)$ множество всех наборов натуральных чисел

$$I=(i_1,\dots,i_t) \quad s \quad 1\leqslant i_1<\dots<i_t\leqslant s.$$

Определим матрицу m_{ij} с целочисленными элементами из разложений узлов $\eta^{(i)}$ по базису $\gamma^{(1)},\dots,\gamma^{(s)}$ решетки Γ:

$$\eta^{(i)}=\sum_{j=1}^{s}m_{ij}\gamma^{(j)} \qquad (1\leqslant i\leqslant t).$$

Пусть $M(I)$ – определитель матрицы, составленной из столбцов (m_{ij}) под номерами $j=i_1,\dots,i_t$. Назовем индексом $\mathcal{K}$ в Γ число $I_\Gamma(\mathcal{K})=I_\Gamma(\eta^{(1)},\dots,\eta^{(t)})$ – наибольший общий делитель чисел $M(I)$ по всем I из $\Lambda_t^{(s)}$. При этом для $t=s$ получается соответствующее определение из введения.

Замечание 2. Согласно лемме 2 из [1, (глава I, §2)], набор узлов $\eta^{(1)},\dots,\eta^{(t)}$ можно дополнить до базиса Γ тогда и только тогда, когда $I(\eta^{(1)},\dots,\eta^{(t)})=1$.

В частности, при $t = 1$ получается еще одно полезное

Замечание 3. Пусть Γ произвольная $[-1,1]^s$ – допустимая решетка из $\mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$ с узлом $\eta^{(1)}$ на границе $[-1,1]^s$. Тогда $\eta^{(1)}$ примитивен в том смысле, что для любого натурального $q > 1$ вектор $\frac{1}{q}\eta^{(1)}$ не есть узел Γ. Поэтому индекс набора $\langle\eta^{(1)}\rangle$ равен 1 и его можно дополнить некоторыми узлами $\eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(s)}$ до базиса Γ.

Замечание 4. Пусть η и η' два граничных узла $[-1,1]^s$ – допустимой решетки Γ из $\mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$. Если $\eta' \neq \pm\eta$ то η и η' линейно независимы.

Лемма 1. *Пусть η и η' два граничных узла $[-1,1]^s$ – допустимой решетки Γ из $\widetilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^s)$ с $\eta' \neq \pm\eta$. Тогда $I_\Gamma(\eta, \eta') = 1$.*

Доказательство. Действуя точно также, как и Вороной [3] при $s = 2$, выпишем разложения для η и η' по базису $\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(s)}$ решетки Γ:

$$\eta = m_1\gamma^{(1)} + \ldots + m_s\gamma^{(s)}, \qquad \eta' = m_1'\gamma^{(1)} + \ldots + m_s'\gamma^{(s)}.$$

Предположим, что $I_\Gamma(\eta, \eta') = d > 1$. Отсюда немедленно следует, что для некоторых целых a и b с $-\frac{1}{2}d \leqslant a, b < \frac{1}{2}d$, которые одновременно не равны нулю, выполняется сравнение

$$a(m_1, \ldots, m_s) + b(m_1', \ldots, m_s') \equiv (0, \ldots, 0) (\operatorname{mod} d).$$

Но тогда

$$\gamma = \frac{1}{d}(a\eta + b\eta') = \frac{a}{d}\eta + \frac{b}{d}\eta'$$

– ненулевой узел Γ и для него

$$|\gamma_j| \leqslant \frac{1}{2}\left(|\eta_j| + |\eta_j'|\right) < 1 \quad (j = 1, \ldots, s).$$

При этом мы воспользовались замечанием 1 из введения. Так как γ нарушает $[-1,1]^s$-допустимость решетки Γ, то наше предположение неверно. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}$ – граничные линейно независимые узлы $[-1,1]^s$-допустимой решетки Γ из $\widetilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^s)$ при $s \geqslant 3$. Тогда $d = I_\Gamma(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}) \leqslant 2$.*

Доказательство. Предположим, что наше утверждение неверно и $d \geqslant 3$. Тогда для некоторых целых a, b, c с НОД$(a, b, c, d) = 1$

вектор

$$\gamma = \frac{a}{d}\eta^{(1)} + \frac{b}{d}\eta^{(2)} + \frac{c}{d}\eta^{(3)}$$

есть узел Γ. Несложное вычисление показывает, что для любых вещественных $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ выполняется оценка

$$\min\{\|\beta_1\| + \|\beta_2\| + \|\beta_3\|,\ \|2\beta_1\| + \|2\beta_2\| + \|2\beta_3\|\} \leqslant 1.$$

С ее помощью, вычитая из γ и 2γ целочисленные линейные комбинации узлов $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$, $\eta^{(3)}$, построим ненулевой узел ξ с $|\xi_j| < 1$ $j = 1, \dots, s$. Он нарушает $[-1,1]^s$-допустимость Γ и поэтому наше предположение неверно. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K} = \langle \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}, \eta^{(4)} \rangle$ – набор граничных линейно независимых узлов $[-1,1]^4$-допустимой решетки Γ из $\widetilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^4)$. Тогда любую тройку узлов из $\mathcal{K}$, за возможным исключением одной, можно дополнить до базиса Γ.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{K}^{(i)}$ $(i = 1,2,3,4)$ набор, который получается из $\mathcal{K}$ удалением узла $\eta^{(i)}$. Предположим, что наше утверждение неверно. Без ограничения общности можно считать (см. лемму 2), что

$$I_\Gamma(\mathcal{K}^{(1)}) = I_\Gamma(\mathcal{K}^{(2)}) = 2.$$

В таком случае три целочисленных вектора $(m_{i1}, \dots, m_{i4})$ $(2 \leqslant i \leqslant 4)$ из разложений по базису $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, $\gamma^{(3)}$, $\gamma^{(4)}$

$$\eta^{(i)} = \sum_{j=1}^{4} m_{ij}\gamma^{(j)} \qquad (i = 2,3,4)$$

линейно зависимы по модулю 2. Поэтому, для некоторых $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{0,1\}$, одновременно не равных нулю, вектор

$$\gamma = \frac{\varepsilon_2}{2}\gamma^{(2)} + \frac{\varepsilon_3}{2}\gamma^{(3)} + \frac{\varepsilon_4}{2}\gamma^{(4)}$$

будет ненулевым узлом Γ. Если хотя бы для одного i $\varepsilon_i = 0$, то узел γ нарушает $[-1,1]^4$-допустимость Γ. Поэтому

$$\gamma = \frac{1}{2}(\gamma^{(2)} + \gamma^{(3)} + \gamma^{(4)}) \in \Gamma.$$

Точно также доказывается, что вектор

$$\gamma' = \frac{1}{2}(\gamma^{(1)} + \gamma^{(3)} + \gamma^{(4)})$$

также узел Γ. Но тогда узел

$$\gamma - \gamma' = \frac{1}{2}(\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)})$$

нарушает $[-1,1]^4$-допустимость Γ. Следовательно, наше предположение неверно и теорема 1 полностью доказана.

§2. Верхняя оценка

Для доказательства неравенства $I_\Gamma(\mathcal{K}) \leqslant 2$ для четырехмерных решеток, в соответствии со сказанным во введении, достаточно показать, что $I_\Gamma(\mathcal{K}) \neq 5, 4, 3$.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{K} = \{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}, \gamma^{(4)}\}$ – набор граничных линейно независимых узлов решетки Γ из $\widetilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^4)$. Тогда $I_\Gamma(\mathcal{K}) \neq 5$.*

Доказательство. Предположим, что наше утверждение неверно и $I_\Gamma(\mathcal{K}) = 5$. Тогда, согласно теореме 1, можно считать, что поднаборы $\mathcal{K}^{(2)}$, $\mathcal{K}^{(3)}$, $\mathcal{K}^{(4)}$ из $\mathcal{K}$ дополняются соответствующими узлами γ, γ', γ'' до базиса Γ и при этом, меняя в случае необходимости знаки у $\gamma^{(i)}$, для некоторых целых m_{ij}:

$$\begin{aligned} 5\gamma &= m_{21}\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)} + m_{23}\gamma^{(3)} + m_{24}\gamma^{(4)} \\ 5\gamma' &= m_{31}\gamma^{(1)} + m_{32}\gamma^{(2)} - \gamma^{(3)} + m_{34}\gamma^{(4)} \\ 5\gamma'' &= m_{41}\gamma^{(1)} + m_{42}\gamma^{(2)} + m_{43}\gamma^{(3)} - \gamma^{(4)}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Пусть для некоторого узла η из Γ выполняется равенство

$$5\eta = a_1\gamma^{(1)} + a_2\gamma^{(2)} + a_3\gamma^{(3)} + a_4\gamma^{(4)} \tag{2.2}$$

с целыми a_i, одновременно не делящимися на 5. Докажем, что тогда и каждое a_i не делится на 5. Если, к примеру, a_4 делится на 5, то умножив обе части (2.2) на $r/5$ с $r \in \{1, 2\}$ и выделяя ближайшие целые к $ra_i/5$, получим равенство

$$\widetilde{\eta} = \alpha_1\gamma^{(1)} + \alpha_2\gamma^{(2)} + \alpha_3\gamma^{(3)} \in \Gamma$$

с $|\alpha_i| = \|ra_i/5\|$. При этом

$$|\widetilde{\eta}_i| \leqslant \left(\|\frac{ra_1}{5}\| + \|\frac{ra_2}{5}\| + \|\frac{ra_3}{5}\|\right)$$

Коэффициент справа хотя бы при одном $r \in \{1, 2\}$ меньше единицы. Но тогда $\widetilde{\eta}$ нарушает $[-1,1]^4$-допустимость Γ. Значит, в (2.2) все a_i не делятся на 5. Предположим, что имеется еще одно равенство

$$5\eta' = b_1\gamma^{(1)} + b_2\gamma^{(2)} + b_3\gamma^{(3)} + b_4\gamma^{(4)}$$

с b_i, не делящимся на 5. Тогда для любых целых m и n числа

$$mb_i + na_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

только одновременно делятся на 5. Это может быть только в случае

$$b_i \equiv ra_i (\operatorname{mod} 5) \qquad (i = 1, \dots, 4).$$

Но тогда в (2.1) все m_i сравнимы с -1 по модулю 5, за возможным исключением m_{21}, m_{31}, m_{41}. Поэтому для некоторого целого $a \in \{0, \pm1, \pm2\}$

$$\frac{a}{5}\gamma^{(1)} - \frac{1}{5}\gamma^{(2)} - \frac{1}{5}\gamma^{(3)} - \frac{1}{5}\gamma^{(4)}$$

есть узел Γ, который нарушает его допустимость для куба $[-1,1]^4$. Значит, наше предположение неверно и лемма 3 полностью доказана.

Лемма 4. *В условиях леммы* 3 $I_\Gamma(\mathcal{K}) \neq 4$.

Доказательство. Предположим, что $I_\Gamma(\mathcal{K}) = 4$. Действуя точно также, как в предыдущем случае, построим узел

$$\eta = \frac{a}{4}\gamma^{(1)} + \frac{1}{4}\gamma^{(2)} + \frac{1}{4}\gamma^{(3)} + \frac{1}{4}\gamma^{(4)}$$

с $a \in \{0, \pm1, 2\}$. При $a = 0, \pm1$ он нарушает $[-1,1]^4$-допустимость Γ. Рассмотрим оставшийся случай $a = 2$. Заметим, что

$$\xi = \frac{1}{2}\gamma^{(2)} + \frac{1}{2}\gamma^{(3)} + \frac{1}{2}\gamma^{(4)}$$

тоже узел решетки. Всегда найдутся номера i и j, для которых

$$\gamma_i^{(2)}\gamma_i^{(3)} < 0 < \gamma_j^{(2)}\gamma_j^{(3)}.$$

В противном случае один из узлов

$$\gamma^{(2)} + \gamma^{(3)}, \qquad \gamma^{(2)} - \gamma^{(3)},$$

нарушал бы $[-1,1]^4$-допустимость Γ. Это замечание справедливо в отношении любой пары узлов из $\{\gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}, \gamma^{(4)}\}$. Очевидно, что для любой комбинации знаков

$$\pm\frac{1}{2}\gamma^{(2)} \pm \frac{1}{2}\gamma^{(3)} \pm \frac{1}{2}\gamma^{(4)} \tag{2.3}$$

– узел решетки Γ. Простая рутинная проверка показывает, что среди четырех сумм

$$\gamma_i^{(2)} + \gamma_i^{(3)} + \gamma_i^{(4)} \qquad (1 \leqslant i \leqslant 4)$$

имеется не более одной с одинаковыми по знаку слагаемыми. В противном случае нашлась бы комбинация вида (2.3), нарушающая $[-1,1]^4$-допустимость Γ. Следовательно, неравенство

$$\left|\frac{1}{4}\gamma_i^{(2)} + \frac{1}{4}\gamma_i^{(3)} + \frac{1}{4}\gamma_i^{(4)}\right| \geqslant \frac{1}{2}$$

выполняется не более чем по одной i-ой координате. Но тогда хотя бы один из узлов

$$\eta = \frac{1}{2}\gamma^{(1)} + \frac{1}{2}\xi, \qquad \eta' = \frac{1}{2}\gamma^{(1)} - \frac{1}{2}\xi$$

нарушает $[-1,1]^4$-допустимость Γ. Мы пришли к противоречию и лемма 4 полностью доказана.

Лемма 5. *В условиях леммы* 3 $I_\Gamma(\mathcal{K}) \neq 3$.

Доказательство. Предположим, что $I_\Gamma(\mathcal{K}) = 3$. Точно также, как и ранее, меняя в случае необходимости знаки у $\gamma^{(i)}$, получаем, что

$$\eta = \frac{1}{3}\gamma^{(1)} + \frac{1}{3}\gamma^{(2)} + \frac{1}{3}\gamma^{(3)} + \frac{1}{3}\gamma^{(4)}$$

– узел Γ. Рассмотрим еще один набор узлов: $\eta^{(i)} = \eta - \gamma^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$. Так как η не должно нарушать $[-1,1]^4$-допустимость Γ, то найдется j с $|\eta_j| > 1$. Без ограничения общности можно считать, что $j = 1$. Поскольку $|\gamma_1^{(i)}| \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ и $|\eta_1| > 1$, то первые координаты всех узлов $\gamma^{(i)}$ имеют одинаковый знак. Без ограничения общности можно считать, что $\gamma_1^{(i)} > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$. Заметим также, что $|\eta_1^{(i)}| < 1$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$. Узлы $\eta^{(i)}$ не могут нарушать $[-1,1]^4$-допустимость Γ. Поэтому для каждого $i = 1,2,3,4$ найдется номер $j > 1$ с $|\eta_j^{(i)}| > 1$. Поскольку j может принимать только три значения, а i четыре, то для некоторого j' для двух номеров i_1 и i_2 выполняются неравенства

$$|\eta_{j'}^{(i_1)}| > 1, \quad |\eta_{j'}^{(i_2)}| > 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что $j' = 2$, $i_1 = 1$ и $i_2 = 2$. Заметим, что $\gamma^{(1)} = \eta^{(2)} + \eta^{(3)} + \eta^{(4)}$, $\gamma^{(2)} = \eta^{(1)} + \eta^{(3)} + \eta^{(4)}$, $\gamma^{(3)} = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(4)}$. Предположим, что у всех узлов $\eta^{(i)}$ с $|\eta_2^{(i)}| > 1$ числа $\eta_2^{(i)}$ имеют одинаковый знак. Тогда

$$1 \geqslant |\gamma_2^{(3)}| = |\eta_2^{(1)} + \eta_2^{(2)} + \eta_2^{(4)}| > |\eta_2^{(1)} + \eta_2^{(2)}| > 2.$$

Мы пришли к противоречию.

Предположим теперь, что среди всех узлов $\eta^{(i)}$ с $|\eta_2^{(i)}| > 1$ найдутся два, $\eta^{(i_1)}$ и $\eta^{(i_2)}$ с разными знаками у $\eta_2^{(i_1)}$ и $\eta_2^{(i_2)}$. Без ограничения общности можно считать, что $i_1 = 1$ и $i_2 = 2$. Если у $\eta_2^{(1)}$ и $\eta_2^{(3)} + \eta_2^{(4)}$ одинаковые знаки, то

$$1 \geqslant |\gamma_2^{(2)}| = |\eta_2^{(1)} + \eta_2^{(3)} + \eta_2^{(4)}| > |\eta_2^{(1)}| > 1.$$

Для разных знаков у этих чисел

$$1 \geqslant |\gamma_2^{(1)}| = |\eta_2^{(2)} + \eta_2^{(3)} + \eta_2^{(4)}| > |\eta_2^{(2)}| > 1.$$

В обоих случаях получается противоречие. Значит наше исходное предположение неверно и лемма 5 полностью доказана.

Из лемм 3, 4, 5 непосредственно следует неравенство $I_\Gamma(\mathcal{K}) \leqslant 2$.

§3. Набор $\mathcal{K}$ индекса 2

Пусть $\Gamma(0)$ – решетка из $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, порожденная узлами

$$\eta^{(1)}(0) = (1,2,6,11), \quad \eta^{(2)}(0) = (0,-25,0,0),$$

$$\eta^{(3)}(0) = (0,0,-25,0), \quad \eta^{(2)}(0) = (0,0,0,-25).$$

Для произвольного набора

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}), \quad \varepsilon_{ij} \in (-1,1) \quad (1 \leqslant i,j \leqslant 4)$$

с $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{44} = 0$ положим

$$\eta^{(1)}(\varepsilon) = \eta^{(1)}(0) + (0, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{41})$$

$$\eta^{(2)}(\varepsilon) = \eta^{(2)}(0) + (\varepsilon_{12}, 0, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{42})$$

$$\eta^{(3)}(\varepsilon) = \eta^{(3)}(0) + (\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, 0, \varepsilon_{43})$$

$$\eta^{(4)}(\varepsilon) = \eta^{(4)}(0) + (\varepsilon_{14}, \varepsilon_{24}, \varepsilon_{34}, 0).$$

Рассмотрим такие наборы ε, для которых решетка $\Gamma(\varepsilon)$, порожденная узлами $\eta^{(i)}(\varepsilon)$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, принадлежит $\widetilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^4)$. Определим систему $\mathcal{K}(\varepsilon) = \langle \gamma^{(1)}(\varepsilon), \dots, \gamma^{(4)}(\varepsilon) \rangle$ где

$$\gamma^{(1)}(\varepsilon) = 2\eta^{(1)}(\varepsilon) + \eta^{(4)}(\varepsilon)$$

$$\gamma^{(2)}(\varepsilon) = 3\eta^{(1)}(\varepsilon) + \eta^{(3)}(\varepsilon) + \eta^{(4)}(\varepsilon)$$

$$\gamma^{(3)}(\varepsilon) = 10\eta^{(1)}(\varepsilon) + \eta^{(2)}(\varepsilon) + 2\eta^{(3)}(\varepsilon) + 4\eta^{(4)}(\varepsilon)$$

$$\gamma^{(4)}(\varepsilon) = 11\eta^{(1)}(\varepsilon) + \eta^{(2)}(\varepsilon) + 3\eta^{(3)}(\varepsilon) + 5\eta^{(4)}(\varepsilon).$$

Система $\mathcal{K}(0)$ из $\Gamma(0)$ обладает следующим замечательным свойством. Для любого ненулевого узла $\gamma \in \Gamma(0)$, для которого $\pm\gamma \notin \mathcal{K}(0)$, найдется номер $j \in \{1,2,3,4\}$ с

$$|\gamma_j| \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} |\gamma_j^{(i)}(0)| + 1. \tag{3.1}$$

Докажем, что найдется $\delta \in (0,1)$, для которого при всех ε с $|\varepsilon| = \max\{|\varepsilon_{ij}|\} < \delta$ решетка Γ является допустимой для параллепипеда $\prod_{i=1}^{4} \left[-\max_{j=\overline{1,4}} |\gamma_i^{(j)}(\varepsilon)|, \max_{j=\overline{1,4}} |\gamma_i^{(j)}(\varepsilon)| \right]$ (тогда сжатиями и растяжениями его можно привести к $[-1,1]^4$ с граничными узлами $\mathcal{K}(\varepsilon)$).

Предположим, что

$$\gamma(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{4} m_i \eta^{(i)}(\varepsilon) \neq (0,0,0,0)$$

нарушает допустимость Γ для параллелепипеда. Так как $|\det(\Gamma(\varepsilon))| = 25^3 + \mathrm{O}(|\varepsilon|)$, то при достаточно малом $\delta \in (0,1)$ и всех ε с $|\varepsilon| < \delta$ выполняются неравенства

$$\max\{|m_1|, \dots, |m_4|\} \leqslant c, \qquad \left|\eta_j^{(i)}(\varepsilon) - \eta_j^{(i)}(0)\right| < \frac{1}{8c},$$

с некоторой абсолютной константой $c \geqslant 1$. Поэтому для таких ε

$$|\gamma_j(\varepsilon) - \gamma_j(0)| < \frac{1}{2} \qquad (1 \leqslant j \leqslant 4).$$

Узел $\gamma(\varepsilon)$ отличен от $\pm\eta^{(i)}(\varepsilon)$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ и поэтому при достаточно малом δ, в соответствии с (3.1), для некоторого j

$$|\gamma_j(\varepsilon)| > |\gamma_j(0)| - \frac{1}{2} > \max_{1\leqslant i\leqslant 4}|\gamma_j^{(i)}(0)| + \frac{1}{2} > \max_{1\leqslant i\leqslant 4}|\gamma_j^{(i)}(\varepsilon)|.$$

Следовательно, при $|\varepsilon| < \delta$ решетка Γ-допустима для параллелепипеда. Легко проверить, что $I_\Gamma(\mathcal{K}) = 2$.

С помощью такого же рода соображений легко строятся наборы $\mathcal{K}$ с $I_\Gamma(\mathcal{K}) = 0, 1$.

Автор благодарен В. А. Быковскому за постановку задачи и внимание.

Литература

1. Дж. В. Касселс, *Введение в геометрию чисел.* — Мир, Москва (1965).
2. Y. Minkowski, *Generalization de la theorie des fraction continues.* — Annales Sci. de l'Ecole Normale Superieue, Ser. 3, **13**, No. 2 (1896), 41–60. — Zur Theorie der Kettenbruche Gesammelte Abhandlungen. Leipzig **1** (1911), 278–292.
3. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений.* Т. 1. — Киев (1952), сс.197–391.
4. K. H. Wolff, *Über Kritiche Gitter im Vierdimensionalen Raum.* — Monatsh. Math. **58** (1954), 38–56.
5. L. J. Mordell, *Lattice Octahedra.* — Canad. J. Math. **12** (1960), 297–302.

Smirnov Yu. A. On the index of the boundary points of four-dimensional lattices that are admissible for cube.

Let Γ be a four-dimensional lattice of general position that is admissible for a cube. Assume that this lattice contains at least one point that belongs to the boundary of this cube. We prove that the index of the set of such points may be equal only to 0, 1, and 2.

Хабаровское отделение Института
прикладной математики
Дальневосточного отделения РАН
E-mail: SUA@mail.27.ru

Поступило 15 марта 2005 г.