Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 323, 2005 г.

Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов

ОБ УНИТАРНОМ ПОДОБИИ АЛГЕБР, ПОРОЖДАЕМЫХ ПАРАМИ ОРТОПРОЕКТОРОВ

1. Критерии унитарного подобия комплексных матриц

Как известно, вопрос об унитарном подобии комплексных $n \times n$-матриц A и B решается классической теоремой Шпехта [1]. Напомним ее формулировку. Выражение вида

$$W(s,t) = s^{m_1}t^{n_1}s^{m_2}t^{n_2}\cdots s^{m_k}t^{n_k}, \tag{1}$$

где $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k$ – целые неотрицательные числа, будем называть словом от (некоммутирующих) переменных s и t.

Пусть $M_n(\mathbf{C})$ – множество комплексных $n \times n$-матриц. Если $A \in M_n(\mathbf{C})$, то подстановка $s = A$, $t = A^*$ в (1) приводит к матрице

$$W(A, A^*) = A^{m_1}(A^*)^{n_1}\cdots A^{m_k}(A^*)^{n_k}.$$

Теорема 1 (Шпехт). *Матрицы $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ унитарно подобны тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{tr}\ W(A, A^*) = \mathrm{tr}\ W(B, B^*) \tag{2}$$

для любого слова $W(s,t)$.

Назовем число $m_1 + n_1 + \cdots + m_k + n_k$ *длиной слова* (1). Теорема Шпехта была усовершенствована Пирси [2, 3], который превратил ее в конечный критерий, доказав, что равенства (2) достаточно проверить для слов длины не больше $2n^2$.

В недавней статье [4] результат Пирси был значительно усилен. Обозначим через X^k множество слов $W(s,t)$ длины не больше k. Положим

$$d_k = \dim\operatorname{span}\left\{W(A, A^*) \mid W(s,t) \in X^k\right\}. \tag{3}$$

Тогда, очевидно,

$$1 = d_0 \leqslant d_1 \leqslant \cdots$$

При этом, если

$$1 = d_0 < d_1 < \cdots < d_l = d_{l+1}, \tag{4}$$

то

$$d_l = d_{l+1} = d_{l+2} = \cdots \tag{5}$$

и

$$\dim \mathcal{A} = d_l, \tag{6}$$

где $\mathcal{A}$ – алгебра, порожденная матрицами A и A^*.

Число l называется *длиной семейства* $\{A, A^*\}$.

Можно показать (см., например, теорему 5 и ее следствие в [5]), что равенства (2) в теореме Шпехта достаточно проверить для слов длины, не превосходящей $2l + 2$. Очевидная оценка

$$l \leqslant n^2 - 1 \tag{7}$$

приводит к результату Пирси. Однако для l можно дать значительно лучшую оценку, которая, как и (7), зависит только от порядка n матрицы A.

Теорема 2 (Паппасена).

$$l \leqslant n\sqrt{\frac{2n^2}{n-1} + \frac{1}{4}} + \frac{n}{2} - 2. \tag{8}$$

В отличие от (7), выражение в правой части неравенства (8) ведет себя при больших n как $\sqrt{2}n^{3/2}$.

Оценки (7) и (8) верны для произвольной матрицы A. Накладывая на A те или иные ограничения, можно подчас получить существенно более сильные оценки для l. Из многочисленных результатов такого рода отметим следующий (см. [6]).

Теорема 3. *Пусть $A \in M_n(\mathbf{C})$ – матрица с квадратичным минимальным многочленом. Тогда*

$$l \leqslant \begin{cases} 2(n-1), & \text{если } n \text{ нечетное}, \\ 2n - 1, & \text{если } n \text{ четное}. \end{cases} \tag{9}$$

Как ни хороша эта оценка, все же в наихудшем случае она требует проверки $\approx 16^n$ равенств типа (2). Между тем, справедливо следующее утверждение (см. [7, теорема 3]):

Теорема 4. *Пусть $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ – матрицы с квадратичными минимальными многочленами. Для их унитарного подобия необходимо и достаточно, чтобы A и B имели одни и те же собственные значения и одни и те же сингулярные числа.*

В [7] равенство собственных значений предлагается устанавливать проверкой n соотношений

$$\mathrm{tr}(A^i) = \mathrm{tr}(B^i), \qquad i = 1, \dots, n. \tag{10}$$

Еще n соотношений

$$\mathrm{tr}[(AA^*)^i] = \mathrm{tr}[(BB^*)^i], \qquad i = 1, \dots, n, \tag{11}$$

гарантируют совпадение сингулярных чисел. Итак, вместо $\approx 16^n$ равенств типа (2) достаточно проверить $2n$ соотношений (10), (11) со словами, максимальная длина которых равна $2n$. Мы приведем сейчас более аккуратный подсчет, показывающий, что число проверяемых соотношений для следов можно сократить до $[n/2] + 3$. Одновременно будет получена каноническая форма (относительно унитарных подобий) для произвольной матрицы с квадратичным минимальным многочленом. Она обобщает каноническую форму, предложенную для косых проекторов в [8].

Лемма 1. *Пусть известно, что $A \in M_n(\mathbf{C})$ – матрица с квадратичным минимальным многочленом. В таком случае для определения минимального и характеристического многочленов этой матрицы достаточно трех чисел*

$$\mathrm{tr}A, \quad \mathrm{tr}(A^2) \quad \text{и} \quad \mathrm{tr}(A^3).$$

Доказательство. Пусть

$$t^2 - ct - d$$

есть минимальный многочлен матрицы A. Тогда

$$cA + dI_n = A^2, \qquad cA^2 + dA = A^3,$$

откуда

$$c\mathrm{tr}A + dn = \mathrm{tr}(A^2), \qquad c\mathrm{tr}(A^2) + d\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(A^3). \tag{12}$$

Если определитель

$$\begin{vmatrix} \mathrm{tr}A & n \\ \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}A \end{vmatrix} \tag{13}$$

отличен от нуля, то коэффициенты c и d минимального многочлена однозначно определяются из линейной системы (12). Вычислив затем его корни μ и ν, мы определим их кратности m и $n - m$ как собственных значений матрицы A из соотношения

$$m\mu + (n - m)\nu = \mathrm{tr}A.$$

Теперь и характеристический многочлен $\chi(t)$ определен однозначно:

$$\chi(t) = (t-\mu)^m (t-\nu)^{n-m}.$$

Пусть теперь определитель (13) равен нулю. В этом случае соотношения

$$\begin{vmatrix} \mathrm{tr}A & n \\ \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{tr}A & n \\ c\mathrm{tr}A + dn & \mathrm{tr}A \end{vmatrix} = n^2 \left(\left(\frac{\mathrm{tr}A}{n}\right)^2 - c\left(\frac{\mathrm{tr}A}{n}\right) - d \right)$$

показывают, что число $\mathrm{tr}A/n$ есть корень минимального многочлена, т.е. собственное значение матрицы A. Это собственное значение – единственное, поскольку равенство

$$m\left(\frac{\mathrm{tr}A}{n}\right) + (n-m)\nu = \mathrm{tr}A$$

возможно лишь при $\nu = \mathrm{tr}A/n$. По этому единственному корню и квадратичный минимальный многочлен, и характеристический многочлен $\chi(t)$ определяются однозначно.

Напомним, что $n\times n$-матрица A называется *унитарно квазидиагонализуемой,* если посредством унитарного подобия она может быть приведена к прямой сумме вида

$$A_1 \oplus \cdots \oplus A_k \oplus \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_l, \qquad 2k + l = n, \tag{14}$$

где матрицы

$$A_i = \begin{pmatrix} \mu_i & \sigma_i \\ 0 & \nu_i \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \tag{15}$$

унитарно недиагонализуемы. Числа σ_i в (14), без ограничения общности, можно считать вещественными и положительными.

Известно, что матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ с квадратичным минимальным многочленом унитарно квазидиагонализуема (см., например, [9]). Квазидиагональная матрица (14) может иметь для такой матрицы A только одну из следующих двух форм:

$$\begin{pmatrix} \mu & \sigma_1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} \mu & \sigma_k \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \oplus \mu \oplus \cdots \oplus \mu, \tag{16}$$

если A имеет единственное собственное значение μ, и

$$\begin{pmatrix} \mu & \sigma_1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} \mu & \sigma_k \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \oplus \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_l, \tag{17}$$

$$\lambda_j \in \{\mu, \nu\}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant l,$$

при наличии двух различных собственных значений μ и ν.

Теорема 5. *Пусть $A \in M_n(\mathbf{C})$ – матрица с квадратичным минимальным многочленом. Тогда числа*

$$\operatorname{tr}(A^i), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{18}$$

$$\operatorname{tr}[(AA^*)^i], \qquad i = 1, 2, \dots, [n/2], \tag{19}$$

определяют квазидиагональную форму (14), (15) *матрицы A с точностью до перестановки диагональных блоков.*

Доказательство. По лемме 1, числа (18) однозначно определяют собственные значения и минимальный и характеристический многочлены матрицы A. Если A имеет единственное собственное значение μ, то число k блоков второго порядка в матрице (16) равно количеству ненулевых сингулярных чисел матрицы $\widetilde{A} = A - \mu I$, а параметрами $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ являются сами эти сингулярные числа. При этом ясно, что $k \leqslant [n/2]$.

Вместо сингулярных чисел $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ будем рассматривать их квадраты, являющиеся ненулевыми собственными значениями матрицы $\widetilde{A}\widetilde{A}^*$. Коэффициенты нормированного многочлена степени k с корнями $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ однозначно находятся по числам

$$\operatorname{tr}[(\widetilde{A}\widetilde{A}^*)^i], \qquad i = 1, 2, \dots, [n/2], \tag{20}$$

с помощью формул Ньютона. Остается показать, что сами эти числа однозначно определяются числами (19).

Заметим, что произведение $(\widetilde{A}\widetilde{A}^*)^i = ((A - \mu I)(A^* - \overline{\mu} I))^i$ раскрытием скобок и последовательным применением подстановок

$$A^2 = cA + dI, \qquad A^{*2} = \overline{c}A^* + \overline{d}I$$

может быть преобразовано в линейную комбинацию произведений вида

$$AA^* \dots AA^*,\ A^*A \dots A^*A,\ AA^*A \dots AA^*A,\ A^*AA^* \dots A^*AA^*,$$

в которых число сомножителей A, как и число сомножителей A^*, не превосходит i. Как и в [7, раздел 2], можно показать, что следы таких произведений суть линейные комбинации следов вида (19). Это доказывает теорему 5 в случае, когда A имеет единственное собственное значение.

Пусть теперь A имеет два различных собственных значения μ и ν. Для определенности предположим, что кратность числа μ не меньше кратности ν. Собственными значениями матрицы $(\widetilde{A}\widetilde{A}^*)^i$ являются на этот раз числа

$$|\mu-\nu|^2+\sigma_1^2, 0, \ldots, |\mu-\nu|^2+\sigma_k^2, 0, |\lambda_1-\mu|^2, \ldots, |\lambda_l-\mu|^2$$

(см. (17)). Количество ненулевых чисел в этой последовательности не превосходит $[n/2]$. Многочлен, корнями которого являются эти числа, определяется, как и в разобранном выше случае, с помощью чисел (19). Пусть его корни найдены. Ровно k из них больше, чем $|\mu-\nu|^2$; уменьшив их на эту величину, мы определим параметры $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$. Тем самым будет определена матрица (17). Теорема доказана.

Теперь сформулированный выше результат из [7] можно уточнить следующим образом.

Теорема 6. *Пусть $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ – матрицы с квадратичными минимальными многочленами. Для их унитарного подобия необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{tr}(A^i)=\operatorname{tr}(B^i), \qquad i=1,2,3,$$
$$\operatorname{tr}[(AA^*)^i]=\operatorname{tr}[(BB^*)^i], \qquad i=1,2,\ldots,[n/2].$$

Теорема 6 содержит как частный случай критерий Джоковича для унитарного подобия косых проекторов (см. [8, теорема 2]). Поскольку для проекторов A и B верно

$$A=A^2=A^3 \quad \text{и} \quad B=B^2=B^3,$$

то первые три условия теоремы сводятся к единственному равенству $\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B$.

2. Критерии унитарного подобия матричных семейств

Два семейства

$$A=\{A_1,\ldots,A_m\} \quad \text{и} \quad B=\{B_1,\ldots,B_m\} \tag{21}$$

матриц из $M_n(\mathbf{C})$ называются унитарно подобными, если существует унитарная матрица U, такая, что

$$U^*A_iU=B_i, \qquad i=1,\ldots,m.$$

Семейство $A=\{A_1,\ldots,A_m\}$ называется нормальным, если порожденная им алгебра замкнута относительно матричной операции сопряжения.

В [5] доказан критерий типа Шпехта для унитарного подобия двух нормальных матричных семейств.

Теорема 7. *Нормальные семейства* (21) *унитарно подобны тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{tr}\left([W_2(A)]^* W_1(A)\right) = \mathrm{tr}\left([W_2(B)]^* W_1(B)\right). \qquad (22)$$

Здесь W_1 и W_2 – произвольные слова от некоммутирующих переменных $s_1, \ldots, s_m$, а $W_1(A)$ и $W_2(A)$ получаются из W_1 и W_2 подстановкой $s_1 = A_1, \ldots, s_m = A_m$ (аналогично для $W_1(B)$ и $W_2(B)$).

Справедлив и конечный критерий унитарного подобия, аналогичный усовершенствованному критерию Пирси. Перенеся понятие длины на слова от m некоммутирующих переменных, сохраним обозначение X^k для множества слов длины не больше k. Соотношения (3)–(6) очевидным образом распространяются на алгебру, порожденную матрицами $A_1, \ldots, A_m$, и приводят к понятию длины семейства $A = \{A_1, \ldots, A_m\}$.

Теорема 8. *Нормальные семейства* (21) *унитарно подобны тогда и только тогда, когда равенства* (22) *выполняются для всех слов W_1, W_2 длины не больше $l+1$, где l – длина семейства $A = \{A_1, \ldots, A_m\}$.*

Это утверждение доказано в [5].

Продолжают действовать оценки для l, приведенные в разделе 1. В частности, неравенства (9) сохраняют силу для алгебры $\mathcal{A}$, порожденной парой матриц $\{A_1, A_2\}$ с квадратичными минимальными многочленами. Это значит, что унитарное подобие двух пар таких матриц $\{A_1, A_2\}$ и $\{B_1, B_2\}$ можно установить, проверяя равенства (22) для слов, длина которых не превосходит $2n$.

Простейшим примером матрицы с квадратичным минимальным многочленом является проектор (иначе говоря, идемпотента), т.е. матрица P такая, что

$$P^2 = P.$$

Пара проекторов $\{P, Q\}$ есть нормальное семейство, если P и Q – ортопроекторы:

$$P = P^*, \qquad Q = Q^*.$$

В следующем разделе мы покажем, что унитарное подобие двух пар $n \times n$-ортопроекторов $\{P_1, Q_1\}$ и $\{P_2, Q_2\}$ можно проверить, сличая следы всего лишь $n+2$ произведений, составленных из P_1, Q_1 и P_2, Q_2. Это огромное снижение вычислительной работы, сопоставимое с тем, какое для матриц A и B дает теорема 4 (или теорема 6).

3. Каноническая форма пары ортопроекторов и ее приложение к задаче об унитарном подобии

Пусть P и Q – ортопроекторы в $M_n(\mathbf{C})$. В [8] доказано следующее утверждение.

Теорема 9. *Существует унитарная матрица $U \in M_n(\mathbf{C})$, такая, что матрица*

$$\widehat{P} = U^* P U$$

диагональная, а матрица

$$\widehat{Q} = U^* Q U$$

блочно-диагональная с диагональными блоками порядков 1 и 2. Пару матриц $\{\widehat{P}, \widehat{Q}\}$ можно рассматривать как прямую сумму пар 1×1- и 2×2-матриц. Пары 1×1-матриц могут иметь одну из следующих четырех форм:

$$1 \qquad 1, \tag{23}$$

$$1 \qquad 0, \tag{24}$$

$$0 \qquad 1, \tag{25}$$

$$0 \qquad 0. \tag{26}$$

Пары 2×2-матриц имеют форму

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos^2 t_k & \cos t_k \sin t_k \\ \cos t_k \sin t_k & \sin^2 t_k \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

Числа $t_1, \dots, t_m$ в матрицах (27) суть нетривиальные (т.е., отличные от нуля) канонические углы между подпространствами

$$\mathcal{L} = \operatorname{im} P \quad \text{и} \quad \mathcal{M} = \operatorname{im} Q. \tag{28}$$

Напомним, что канонические углы $\phi_i(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ между подпространствами (28) определяются соотношениями

$$0 \leqslant \phi_1(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \leqslant \cdots \leqslant \phi_r(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\cos \phi_i(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = \sigma_i(PQ), \qquad i = 1, \dots, r,$$

где $\sigma_i(PQ)$ суть сингулярные числа матрицы PQ, расположенные в порядке невозрастания.

Пара $\{\widehat{P}, \widehat{Q}\}$ называется канонической формой (относительно унитарного подобия) исходной пары проекторов $\{P, Q\}$. Разумеется, возможна и другая каноническая форма $\{\widetilde{P}, \widetilde{Q}\}$, где диагональной является матрица $\widetilde{Q}$, а блоки типа правого блока в (27) присутствуют в матрице $\widetilde{P}$. Мы ограничимся использованием формы $\{\widehat{P}, \widehat{Q}\}$.

Нетрудно видеть, что число пар вида (23) в канонической форме равно кратности l сингулярного числа 1 матрицы PQ. Чтобы указать число пар типов (24)–(26), положим

$$p = \mathrm{tr}\ P, \qquad q = \mathrm{tr}\ Q.$$

Тогда:

1) если число $s = p - l - m$ положительно, то в канонической форме $\{\widehat{P}, \widehat{Q}\}$ присутствуют s пар вида (24);
2) если число $t = q - l - m$ положительно, то в канонической форме присутствуют t пар вида (25);
3) если число $u = n - 2m - l - s - t$ положительно, то в канонической форме присутствуют u пар вида (26).

Из проведенного обсуждения канонической формы вытекает следующий вывод.

Теорема 10. *Пары $n \times n$-ортопроекторов $\{P_1, Q_1\}$ и $\{P_2, Q_2\}$ унитарно подобны тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{tr}\ P_1 = \mathrm{tr}\ P_2, \qquad \mathrm{tr}\ Q_1 = \mathrm{tr}\ Q_2$$

и сингулярные числа матриц P_1Q_1 и P_2Q_2 совпадают.

Как уже отмечалось в разделе 1, проверка совпадения сингулярных чисел матриц P_1Q_1 и P_2Q_2 сводится к проверке n равенств

$$\mathrm{tr}(P_1Q_1P_1)^i = \mathrm{tr}(P_1Q_1^2P_1)^i = \mathrm{tr}(P_2Q_2^2P_2)^i = \mathrm{tr}(P_2Q_2P_2)^i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

которые можно переписать в эквивалентном виде

$$\mathrm{tr}(P_1Q_1)^i = \mathrm{tr}(P_2Q_2)^i.$$

Литература

1. W. Specht, *Zur Theorie der Matrizen. II.* — Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., **50** (1940), 19–23.
2. C. A. Pearcy, *A complete set of unitary invariants for operators generating finite W^*-algebras of type I.* — Pacific J. Math., **12** (1962), 1405–1416.
3. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* — Мир, М. (1989).
4. C. Pappacena, *An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra.* — J. Algebra, **197** (1997), 535–545.
5. Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов, *Об унитарном подобии матричных семейств.* — Матем. заметки, **74** (2003), 815–826.
6. F. T. Gaines, T. J. Laffey, H. M. Shapiro, *Pairs of matrices with quadratic minimal polynomials.* — Linear Algebra Appl., **52/53** (1983), 289–292.
7. A. George, Kh. D. Ikramov, *Unitary similarity of matrices with quadratic minimal polynomials.* — Linear Algebra Appl., **349** (2002), 11–16.
8. D. Ž. Djoković, *Unitary similarity of projectors.* — Aequationes Math., **42** (1991), 220–224.
9. Х. Д. Икрамов, *Каноническая форма Шура унитарно квазидиагонализуемой матрицы.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ., **37** (1997), 1411–1415.
10. А. Джордж, Х. Д. Икрамов, *Замечание о канонической форме пары ортопроекторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **309** (2003), 17–22.

Al'pin Yu. A., Ikramov Kh. D. Unitary similarity of algebras generated by pairs of orthoprojectors.

It is shown that the unitary similarity of two matrix algebras generated by pairs of orthoprojectors $\{P_1, Q_1\}$ and $\{P_2, Q_2\}$ can be verified by comparing the traces of P_1, Q_1, and $(P_1Q_1)^i$, $i = 1, 2, \dots, n$, with those of P_2, Q_2, and $(P_2Q_2)^i$. The conditions of the unitary similarity of two matrices with quadratic minimal polynomials presented in [A. George and Kh. D. Ikramov, *Unitary similarity of matrices with quadratic minimal polynomials.* — Linear Algebra Appl., **349** (2002), 11–16] are refined.

Казанский государственный
университет
Московский государственный
университет

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 6 апреля 2005 г.