Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 323, 2005 г.

Е. Г. Голузина

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ $\{f(z_1), \dots, f(z_n)\}$ В КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ. II

Введение

Пусть T – класс функций $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$.

В работе [1] была рассмотрена задача о множестве значений $D_n(T)$ системы

$$I_n(f) = \{f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_n)\}, \quad n \geqslant 1,$$

на классе T, где $z_j \in U$ – различные заданные точки ($j = 1, 2, \dots, n$). В случае $\operatorname{Im} z_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) была дана характеристика множества $D_n(T)$ с помощью неотрицательных эрмитовых форм и найдены все граничные функции. Это позволило определить множество значений $f(z_n)$ на классе

$$T_{n-1} = \{f \in T : f(z_j) \ \text{ фиксированы}, \ j = 1, 2, \dots, n-1\}, \quad n \geqslant 2.$$

В настоящей работе продолжено исследование множества значений системы $I_n(f)$ на классе T. А именно, рассмотрен случай, когда одна из заданных точек z_j лежит на вещественной оси. В случае $n = 3$ эта задача решена в [2], в случае $n = 2$ – в [3].

§1

Обозначим через $D_{m,1}(T)$ множество значений системы

$$I_{m,1}(f) = \{f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_m), f(r)\}$$

на классе T, где $\{z_j\}_1^m$ и $z_{m+1} = r$ – заданные различные точки круга U, $\operatorname{Im} z_j \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, $0 < r < 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы 2005 г. фундаментальных исследований Президиума РАН “Исследования в фундаментальных областях современной математики”.

Пусть

$$\zeta_j = z_j + \frac{1}{z_j}, \quad w_j = x_j + iy_j = f(z_j), \quad x_j, y_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\rho = r + \frac{1}{r}, \quad x_{m+1} = f(r).$$

Обозначим

$$\omega^{(\varepsilon)} = \omega^{(\varepsilon)}(x_{m+1}) = (2 - \varepsilon\rho)x_{m+1},$$
$$\omega_j^{(\varepsilon)} = \omega^{(\varepsilon)}(w_j) = (2 - \varepsilon\zeta_j)w_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Имеет место

Теорема 1. 1. *Пусть* $\operatorname{Im} z_j \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, $0 < r < 1$. *Множество значений* $D_{m,1}(T)$ *есть множество всех точек*

$$X = X(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{2m+1},$$

в которых неотрицательны эрмитовы формы $H_1(X)$ *и* $H_{-1}(X)$:

$$H_\varepsilon(X) = (\varepsilon + \omega^{(\varepsilon)})|\xi_0|^2 + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\omega^{(\varepsilon)} - \omega_k^{(\varepsilon)}}{\zeta_k - \rho}\overline{\xi}_0\xi_k\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\omega^{(\varepsilon)}}{|\zeta_k - \rho|^2} - \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta_k}\cdot\operatorname{Im}\frac{\omega_k^{(\varepsilon)}}{\rho - \zeta_k}\right)|\xi_k|^2$$

$$+2\operatorname{Re}\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{m}\left[\frac{\omega^{(\varepsilon)}}{(\overline{\zeta}_j - \rho)(\zeta_k - \rho)} + \frac{1}{\zeta_k - \overline{\zeta}_j}\left(\frac{\overline{\omega_j^{(\varepsilon)}}}{\rho - \overline{\zeta}_j} - \frac{\omega_k^{(\varepsilon)}}{\rho - \zeta_k}\right)\right]\overline{\xi}_j\xi_k, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

2. *Для того, чтобы некоторая точка* $X \in \mathbb{R}^{2m+1}$ *была внутренней точкой множества* $D_{m,1}(T)$, *необходимо и достаточно, чтобы эрмитовы формы* $H_\varepsilon(X)$, $\varepsilon = \pm 1$, *были положительно определенными.*

3. *Каждой точке* $X \in \partial D_{m,1}(T)$ *соответствует только одна функция класса* T *вида*

$$f_X(z) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k z}{1 - 2t_k z + z^2} + \frac{\lambda z}{1 - 2\varepsilon z + z^2},$$

где

$$\lambda_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k + \lambda = 1, \qquad -1 < t_k < 1, \quad t_j \neq t_k$$

при $j \neq k$, $j, k = 1, 2, \dots, m$.

Положим

$$\begin{aligned}
&d_{00}^{(\varepsilon)} = d_{00}^{(\varepsilon)}(x_{m+1}) = \varepsilon + \omega^{(\varepsilon)};\\
&d_{0j}^{(\varepsilon)} = d_{0j}^{(\varepsilon)}(x_{m+1}, w_j) = \varepsilon(\zeta_j - \rho) + \omega^{(\varepsilon)}(\overline{\zeta}_m - \rho) + \omega_j(\zeta_j - \overline{\zeta}_m),\\
&d_{j0}^{(\varepsilon)} = \overline{d_{0j}^{(\varepsilon)}}, \quad j = 1, 2, \dots, m;\\
&d_{jj}^{(\varepsilon)} = d_{jj}^{(\varepsilon)}(x_{m+1}, w_j) = \varepsilon|\zeta_j - \rho|^2 + \omega^{(\varepsilon)}|\zeta_m - \rho|^2\\
&+ \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta_j} \operatorname{Im}\Big[\overline{\omega_j^{(\varepsilon)}}(\zeta_m - \overline{\zeta}_j)(\overline{\zeta}_m - \overline{\zeta}_j)(\rho - \zeta_j)\Big], \quad j = 1, 2, \dots, m;\\
&d_{jk}^{(\varepsilon)} = d_{jk}^{(\varepsilon)}(x_{m+1}, w_j, w_k) = \varepsilon(\rho - \overline{\zeta}_j)(\rho - \zeta_k) + \omega^{(\varepsilon)}|\zeta_m - \rho|^2\\
&+ \frac{1}{\zeta_k - \overline{\zeta}_j}\Big[\overline{\omega_j^{(\varepsilon)}}(\zeta_m - \overline{\zeta}_j)(\overline{\zeta}_m - \overline{\zeta}_j)(\rho - \zeta_k)\\
&- \omega_k^{(\varepsilon)}(\overline{\zeta}_m - \zeta_k)(\zeta_m - \zeta_k)(\rho - \overline{\zeta}_j)\Big], \quad j < k;\\
&d_{kj}^{(\varepsilon)} = \overline{d_{jk}^{(\varepsilon)}}, \quad j, k = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned}$$

Следствие 1.

$$\operatorname{Int} D_{m,1}(X) = \Big\{X \in \mathbb{R}^{2m+1} : \big|d_{jk}^{(\varepsilon)}\big|_0^l > 0, \ \varepsilon = \pm 1, \ l = 0, 1, \dots, m\Big\}.$$

Пусть a и $\{a_j\}_1^{m-1}$ – заданные числа, удовлетворяющие условиям

$$0 < a < 1, \quad \operatorname{Im} a_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
&\widetilde{d}_{jk}^{(\varepsilon)} = d_{jk}^{(\varepsilon)}(a, a_j, a_k), \quad j, k = 1, 2, \dots, m;\\
&\widetilde{d}_{0j}^{(\varepsilon)} = d_{0j}^{(\varepsilon)}(a, a_j), \quad j = 1, 2, \dots, m-1;\\
&\widetilde{d}_{00}^{(\varepsilon)} = d_{00}^{(\varepsilon)}(a);\\
&D_l^{(\varepsilon)} = \big|\,\widetilde{d}_{jk}^{(\varepsilon)}\big|_0^l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1.
\end{aligned}$$

Пусть $T_{m-1,1}$ – класс функций $f(z)\in T$, удовлетворяющих условиям

$$D_l^{(\varepsilon)}>0,\quad \varepsilon=\pm1,\quad l=0,1,\dots,m-1.$$

Обозначим через D_m множество значений $f(z_m)$ на классе $T_{m-1,1}$.

Пусть

$$B_1^{(\varepsilon)}=\left|\widetilde{d}_{jk}^{(\varepsilon)}\right|_1^{m-1},$$

$$B_2^{(\varepsilon)}=\begin{vmatrix} \widetilde{d}_{01}^{(\varepsilon)} & \widetilde{d}_{02}^{(\varepsilon)} & \dots & \widetilde{d}_{0(m-1)}^{(\varepsilon)} & 0\\ \widetilde{d}_{11}^{(\varepsilon)} & \widetilde{d}_{12}^{(\varepsilon)} & \dots & \widetilde{d}_{1(m-1)}^{(\varepsilon)} & \widetilde{d}_{1m}^{(\varepsilon)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \widetilde{d}_{(m-1)1}^{(\varepsilon)} & \widetilde{d}_{(m-1)2}^{(\varepsilon)} & \dots & \widetilde{d}_{(m-1)(m-1)}^{(\varepsilon)} & \widetilde{d}_{(m-1)m}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix},$$

$$B_3^{(\varepsilon)}=\left|\widetilde{d}_{jk}^{(\varepsilon)}\right|_0^{m-1},\quad B_4^{(\varepsilon)}=\left|\widetilde{d}_{jk}^{(\varepsilon)}\right|_1^{m}.$$

Тогда имеем

Следствие 2. *В случае* $\operatorname{Im} z_m\neq 0$, $z_m\in U$, *множество* D_m *есть пересечение двух кругов*

$$|w-O_\varepsilon|\leqslant R_\varepsilon,\quad \varepsilon=\pm1,$$

где

$$O_\varepsilon=\frac{i}{2(2-\varepsilon\zeta_m)\operatorname{Im}\zeta_m}\left[\varepsilon(\zeta_m-\rho)+\omega^{(\varepsilon)}(a)(\overline{\zeta}_m-\rho)-(-1)^m\frac{B_2^{(\varepsilon)}}{B_1^{(\varepsilon)}}\right],$$

$$R_\varepsilon=\frac{1}{2|(2-\varepsilon\zeta_m)\operatorname{Im}\zeta_m|}\;\frac{(B_3^{(\varepsilon)}B_4^{(\varepsilon)})^{1/2}}{B_1^{(\varepsilon)}}.$$

§2

Доказательство теоремы 1. Пусть M_1 – класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на промежутке $[-1,1]$ и удовлетворяющих условию

$\int\limits_{-1}^{1} d\alpha(t) = 1$. Как известно, функция $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, регулярная в круге U, тогда и только тогда принадлежит классу T, когда

$$f(z) = \int\limits_{-1}^{1} z(1-2tz+z^2)^{-1} d\alpha(t), \quad \alpha(t) \in M_1. \tag{1}$$

Из интегрального представления (1) для системы $I_{m,1}(f)$ получаем представление

$$f(z_j) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\zeta_j - 2t}, \quad f(r) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\rho - 2t}, \qquad \alpha(t) \in M_1,\ j = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

где

$$\zeta_j = z_j + \frac{1}{z_j}, \quad \rho = r + \frac{1}{r}.$$

Используя (2), нетрудно показать, что $D_{m,1}(T)$ есть выпуклое, ограниченное, замкнутое множество.

По теореме 1.3 [4, с. 86–87], для того чтобы имело место представление (2), необходимо и достаточно, чтобы из справедливости неравенства

$$\varphi(t) \equiv \operatorname{Re}\left[\delta_0 + \sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_j}{\zeta_j - 2t} + \frac{\delta_{m+1}}{\rho - 2t}\right] \geqslant 0 \tag{3}$$

для всех $t \in [-1, 1]$ (где $\delta_0 \neq 0$, $\{\delta_j\}_1^{m+1}$ – некоторые комплексные числа) вытекало неравенство

$$H \equiv \operatorname{Re}\left[\delta_0 + \sum_{j=1}^{m} \delta_j w_j + \delta_{m+1} x_{m+1}\right] \geqslant 0. \tag{4}$$

Функцию $\varphi(t)$ запишем в виде

$$\varphi(t) = \frac{A_{2m+1}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{m} |\zeta_j - 2t|^2 (\rho - 2t)}. \tag{5}$$

Здесь $A_{2m+1}(t)$ – неотрицательный на отрезке $[-1,1]$ алгебраический многочлен от t степени $\leqslant (2m+1)$. По теореме Маркова–Лукача (см. [4, с. 89]) имеем

$$A_{2m+1}(t) = (1-t)\Big(\sum_{k=0}^{m}\beta_k t^k\Big)^2 + (1+t)\Big(\sum_{k=0}^{m}\gamma_k t^k\Big)^2, \tag{6}$$

где $\{\beta_k\}_0^m$ и $\{\gamma_k\}_0^m$ – некоторые вещественные числа.

Подставим (6) в (5) и запишем $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \frac{1-t}{\rho-2t}\left|\xi_0 + \sum_{j=1}^{m}\frac{\xi_j}{\zeta_j-2t}\right|^2 + \frac{1+t}{\rho-2t}\left|\eta_0 + \sum_{j=1}^{m}\frac{\eta_j}{\zeta_j-2t}\right|^2, \tag{7}$$

где $\{\xi_k\}_0^m$ и $\{\eta_k\}_0^m$ – некоторые комплексные числа, зависящие от $\{\beta_k\}_0^m$ и $\{\gamma_k\}_0^m$, соответственно.

Из (7) следует

$$\begin{aligned}\varphi(t) = \frac{1-t}{\rho-2t}\Bigg[|\xi_0|^2 + \sum_{j=1}^{m}\frac{|\xi_j|^2}{|\zeta_j-2t|^2} + 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{m}\overline{\xi}_0\xi_k\frac{1}{\zeta_k-2t}\\ + 2\,\mathrm{Re}\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{m}\overline{\xi}_j\xi_k\frac{1}{(\overline{\zeta}_j-2t)(\zeta_k-2t)}\Bigg]\\ + \frac{1+t}{\rho-2t}\Bigg[|\eta_0|^2 + \sum_{j=1}^{m}\frac{|\eta_j|^2}{|\zeta_j-2t|^2} + 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{m}\overline{\eta}_0\eta_k\frac{1}{\zeta_k-2t}\\ + 2\,\mathrm{Re}\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{m}\overline{\eta}_j\eta_k\frac{1}{(\overline{\zeta}_j-2t)(\zeta_k-2t)}\Bigg].\end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что имеют место разложения

$$
\begin{aligned}
&\frac{1-\varepsilon t}{\rho-2t}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{2-\varepsilon\rho}{\rho-2t}\right),\\
&\frac{1-\varepsilon t}{(\rho-2t)(\zeta_k-2t)}=\frac{1}{2(\zeta_k-\rho)}\left(\frac{2-\varepsilon\rho}{\rho-2t}-\frac{2-\varepsilon\zeta_k}{\zeta_k-2t}\right),\\
&\frac{1-\varepsilon t}{(\rho-2t)|\zeta_k-2t|^2}=\frac{1}{2|\zeta_k-\rho|^2}\left[\frac{2-\varepsilon\rho}{\rho-2t}+2\operatorname{Re}\frac{(2-\varepsilon\zeta_k)(\rho-\overline{\zeta}_k)}{(\overline{\zeta}_k-\zeta_k)(\zeta_k-2t)}\right],\\
&\frac{1-\varepsilon t}{(\rho-2t)(\overline{\zeta}_j-2t)(\zeta_k-2t)}=\frac{1}{2(\overline{\zeta}_j-\rho)(\zeta_k-\rho)}\left[\frac{2-\varepsilon\rho}{\rho-2t}\right.\\
&\left.+\frac{(2-\varepsilon\overline{\zeta}_j)(\rho-\zeta_k)}{\zeta_k-\overline{\zeta}_j}\,\frac{1}{\overline{\zeta}_j-2t}+\frac{(2-\varepsilon\zeta_k)(\rho-\overline{\zeta}_j)}{\overline{\zeta}_j-\zeta_k}\,\frac{1}{\zeta_k-2t}\right],\\
&j,k=1,2,\dots,m,\quad j\neq k.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Подставим разложения (9) в (8). Тогда, в силу условия

$$\varphi(t)\geqslant 0\quad\text{на промежутке}\quad[-1,1],$$

получим, что для того, чтобы неравенство (3) влекло за собой неравенство (4), необходимо и достаточно, чтобы была неотрицательна эрмитова форма $H(X)=H_1(X)+H_{-1}(X)$. Последнее, ввиду независимости системы чисел $\{\xi_k\}_0^m$ от системы чисел $\{\eta_k\}_0^m$, равносильно неотрицательности двух эрмитовых форм $H_1(X)$ и $H_{-1}(X)$.

Утверждение 1 теоремы 1 доказано.

Доказательство утверждений 2 и 3 аналогично доказательству соответствующих утверждений в [1]. $\square$

Обозначим $A_\varepsilon(X)$ матрицу эрмитовой формы $H_\varepsilon(X)$, $|A_\varepsilon(X)|$ – ее определитель.

Имеем

$$|A_\varepsilon(X)|=\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{m}|\zeta_j-\rho|^2}\Delta_m^{(\varepsilon)},$$

где

$$\Delta_m^{(\varepsilon)} = \left|a_{jk}^{(\varepsilon)}\right|_0^m,$$

$$a_{00}^{(\varepsilon)} = \varepsilon + \omega^{(\varepsilon)}, \quad a_{0k}^{(\varepsilon)} = \omega^{(\varepsilon)} - \omega_k^{(\varepsilon)}, \quad a_{k0}^{(\varepsilon)} = \overline{a_{0k}^{(\varepsilon)}}, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

$$a_{jk}^{(\varepsilon)} = \omega^{(\varepsilon)} + \frac{1}{\zeta_k - \overline{\zeta}_j}\Big[\,\overline{\omega_j^{(\varepsilon)}}(\rho - \zeta_k) - \omega_k^{(\varepsilon)}(\rho - \overline{\zeta}_j)\Big], \quad j < k,$$

$$a_{kj}^{(\varepsilon)} = \overline{a_{jk}^{(\varepsilon)}}, \quad j, k = 1, \dots, m;$$

$$a_{jj}^{(\varepsilon)} = \omega^{(\varepsilon)} + \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta_j}\operatorname{Im}\Big[\,\overline{\omega_j^{(\varepsilon)}}\,(\rho - \zeta_j)\Big], \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Точка $X \in \mathbb{R}^{2m+1}$ принадлежит $\operatorname{Int} D_{m,1}(T)$ тогда и только тогда, когда выполнены неравенства $\Delta_l^{(\varepsilon)} > 0$, $l = 0, 1, \dots, m$, $\varepsilon = \pm 1$, где $\Delta_l^{(\varepsilon)} = |a_{jk}^{(\varepsilon)}|_0^l$ (см. [5, с. 300]).

Преобразуем определитель $\Delta_m^{(\varepsilon)}$ следующим образом.

Положим

$$b_{jk}^{(\varepsilon)} = a_{jk}^{(\varepsilon)} + a_{0k}^{(\varepsilon)}\frac{\overline{\zeta}_j - \rho}{\zeta_m - \overline{\zeta}_j}, \quad b_{0j}^{(\varepsilon)} = a_{0j}^{(\varepsilon)},$$

$$b_{00}^{(\varepsilon)} = a_{00}^{(\varepsilon)}, \quad b_{j0}^{(\varepsilon)} = a_{j0}^{(\varepsilon)} + a_{00}^{(\varepsilon)}\frac{\overline{\zeta}_j - \rho}{\zeta_m - \overline{\zeta}_j}, \quad j, k = 1, 2, \dots, m;$$

$$c_{jk}^{(\varepsilon)} = b_{jk}^{(\varepsilon)} + b_{j0}^{(\varepsilon)}\frac{\zeta_k - \rho}{\overline{\zeta}_m - \zeta_k}, \quad c_{j0}^{(\varepsilon)} = b_{j0}^{(\varepsilon)},$$

$$c_{00}^{(\varepsilon)} = a_{00}^{(\varepsilon)}, \quad c_{0j}^{(\varepsilon)} = a_{0j}^{(\varepsilon)} + a_{00}^{(\varepsilon)}\frac{\zeta_j - \rho}{\overline{\zeta}_m - \zeta_j}, \quad j, k = 1, 2, \dots, m;$$

$$d_{jk}^{(\varepsilon)} = (\zeta_m - \overline{\zeta}_j)(\overline{\zeta}_m - \zeta_k)c_{jk}^{(\varepsilon)}, \quad j, k = 1, 2, \dots, m;$$

$$d_{00}^{(\varepsilon)} = a_{00}^{(\varepsilon)}, \quad d_{0j}^{(\varepsilon)} = c_{0j}^{(\varepsilon)}(\overline{\zeta}_m - \zeta_j), \quad d_{j0}^{(\varepsilon)} = \overline{d_{0j}^{(\varepsilon)}}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Имеем $c_{kj}^{(\varepsilon)} = \overline{c_{jk}^{(\varepsilon)}}$, $d_{kj}^{(\varepsilon)} = \overline{d_{jk}^{(\varepsilon)}}$, $jbl = 0, 1, \dots, m$.

В результате преобразований получаем

$$\Delta_m^{(\varepsilon)} = \left|a_{jk}^{(\varepsilon)}\right|_0^m = \left|b_{jk}^{(\varepsilon)}\right|_0^m = \left|c_{jk}^{(\varepsilon)}\right|_0^m = \prod_{j=1}^m \left|\zeta_m - \overline{\zeta}_j\right|^{-2}\left|d_{jk}^{(\varepsilon)}\right|_0^m.$$

Этим следствие 1 доказано.

Докажем следствие 2.

Пусть

$$\widetilde{\Delta}_m^{(\varepsilon)} = \Delta_m^{(\varepsilon)}(X_0), \quad \text{где} \quad X_0 = X(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, w_m, a).$$

В силу следствия 1 имеем

$$\operatorname{Int} D_m = \left\{ w \in \mathbb{C}\colon\ D_m^{(\varepsilon)} > 0,\ \varepsilon = \pm 1 \right\}.$$

Запишем $D_m^{(\varepsilon)} = \left| \widetilde{d}_{jk}^{(\varepsilon)} \right|_0^m$ следующим образом

$$D_m^{(\varepsilon)} = -\left| \widetilde{d}_{0m}^{(\varepsilon)} \right|^2 B_1^{(\varepsilon)} + (-1)^m 2 \operatorname{Re} \left(B_2^{(\varepsilon)} \overline{\widetilde{d}_{0m}^{(\varepsilon)}} \right) + B_0^{(\varepsilon)},$$

где

$$\widetilde{d}_{0m}^{(\varepsilon)} = d_{0m}^{(\varepsilon)}(a, w_m),$$

$$B_0^{(\varepsilon)} = \begin{vmatrix} \widetilde{d}_{00}^{(\varepsilon)} & \widetilde{d}_{01}^{(\varepsilon)} & \dots & \widetilde{d}_{0(m-1)}^{(\varepsilon)} & 0 \\ \widetilde{d}_{10}^{(\varepsilon)} & \widetilde{d}_{11}^{(\varepsilon)} & \dots & \widetilde{d}_{1(m-1)}^{(\varepsilon)} & \widetilde{d}_{1m}^{(\varepsilon)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \widetilde{d}_{(m-1)0}^{(\varepsilon)} & \widetilde{d}_{(m-1)1}^{(\varepsilon)} & \dots & \widetilde{d}_{(m-1)(m-1)}^{(\varepsilon)} & \widetilde{d}_{(m-1)m}^{(\varepsilon)} \\ 0 & \widetilde{d}_{m1}^{(\varepsilon)} & \dots & \widetilde{d}_{m(m-1)}^{(\varepsilon)} & \widetilde{d}_{mm}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix}.$$

Так как X_0 – внутренняя точка множества $D_{m-1}(T)$, то, по утверждению 2 теоремы 1, эрмитова форма $H_\varepsilon(X_0)$ положительно определена. Следовательно, последовательные главные миноры матрицы этой эрмитовой формы положительны. Поэтому имеет место неравенство $B_1^{(\varepsilon)} > 0$. Неравенство $D_m^{(\varepsilon)} > 0$ равносильно неравенству

$$\left| \widetilde{d}_{0m}^{(\varepsilon)} - (-1)^m \frac{B_2^{(\varepsilon)}}{B_1^{(\varepsilon)}} \right|^2 \leqslant \frac{1}{(B_1^{(\varepsilon)})^2} \left(|B_2^{(\varepsilon)}|^2 + B_1^{(\varepsilon)} B_0^{(\varepsilon)} \right), \tag{10}$$

где

$$\widetilde{d}_{0m}^{(\varepsilon)} = \varepsilon(\zeta_m - \rho) + \omega^{(\varepsilon)}(a)(\overline{\zeta}_m - \rho) + w_m(2 - \varepsilon\zeta_m)(\zeta_m - \overline{\zeta}_m).$$

В силу детерминантного тождества Сильвестра (см. [5, с. 48]), имеем

$$B_1^{(\varepsilon)} B_0^{(\varepsilon)} = B_3^{(\varepsilon)} B_4^{(\varepsilon)} - \left| B_2^{(\varepsilon)} \right|^2. \tag{11}$$

Подставив (11) в правую часть неравенства (10) и заметив, что D_m – замкнутое множество, получим следствие 2.

Литература

1. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы $\{f(z_1),\dots f(z_n)\}$ в классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **314** (2004), 41–51.
2. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы $\{f(z_1), f(z_2), f(z_3)\}$ в классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **302** (2003), 5–17.
3. Е. Г. Голузина, *О множестве значений одной системы функционалов в классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **226** (1996), 69–79.
4. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* — М. (1973).
5. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* 3-е изд. — М. (1967).

Goluzina E. G. On the region of values of the system $\{f(z_1),\dots,f(z_n)\}$ in the class of typically real functions. II.

The paper studies the region $D_{m,1}(T)$ of values of the system $\{f(z_1), f(z_2),\dots,f(z_m), f(r)\}$, $m \geqslant 1$, where z_j $(j = 1, 2,\dots,m)$ are arbitrary fixed points of the disk $U = \{z : |z| < 1\}$ with $\operatorname{Im} z_j \neq 0$ $(j = 1, 2,\dots,m)$, and r, $0 < r < 1$, is fixed, on the class T of functions $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ regular in the disk U and satisfying in the latter the condition $\operatorname{Im} f(z) \operatorname{Im} z > 0$ for $\operatorname{Im} z \neq 0$. An algebraic characterization of the set $D_{m,1}(T)$ in terms of nonnegative Hermitian forms is given, and all the boundary functions are described. As an implication, the region of values of $f(z_m)$ in the subclass of functions from the class T with prescribed values $f(z_k)$ $(k = 1, 2,\dots,m-1)$ and $f(r)$ is determined.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 13 июня 2005 г.