Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 323, 2005 г.

М. Дана, Х. Д. Икрамов

О КОРАЗМЕРНОСТИ МНОГООБРАЗИЯ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ С КРАТНЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

1. Введение

При фиксированном n выберем случайным образом вещественные симметричные $n \times n$-матрицы B и M, составим линейный пучок

$$A(t) = B + tM \tag{1}$$

и рассмотрим поведение его собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ как функций от t. Если проделать такой эксперимент для многих пар (B, M), то определится следующая типичная картина поведения функций $\lambda_i(t)$: на некоторых интервалах изменения параметра графики каких-то функций, скажем, $\lambda_j(t)$ и $\lambda_k(t)$, казалось бы, устремляются к точке пересечения; однако пересечения не происходит и графики снова отдаляются друг от друга.

Это явление *уклонения от столкновений* было обнаружено физиками на заре квантовой механики. Его объяснение было дано Вигнером и фон Нейманном. Приведем это объяснение, следуя книге [1, с. 113–114].

Подход Вигнера и фон Нейманна основан на приписывании размерности многообразию $\mathcal{M}$ вещественных симметричных матриц, имеющих кратные собственные значения. Такие матрицы в физической литературе называются вырожденными (degenerate). Отметим прежде всего, что множество $\mathcal{S}$ *всех* вещественных симметричных $n \times n$-матриц есть линейное пространство размерности $N = n(n+1)/2$. К этому непосредственно очевидному факту можно прийти нестандартным путем, параметризуя матрицы из $\mathcal{S}$ посредством их собственных векторов и собственных значений. Ясно, что в типичном случае матрица $A \in \mathcal{S}$ имеет простой спектр. Построить матрицу с простым спектром можно, выбрав произвольные n различных вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ в качестве собственных значений и ортонормированные векторы

$q_1, \dots, q_n$ в качестве собственных векторов. Выбор вектора q_1, учитывая его нормированность, зависит от $n-1$ степеней свободы; выбор вектора q_2 с учетом его нормированности и ортогональности вектору q_1 – от $n-2$ степеней свободы, и т.д. Общее число степеней свободы в построении матрицы с простым спектром из $\mathcal{S}$, таким образом, равно

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = N.$$

Подсчитаем подобным же образом число степеней свободы при построении матрицы $A \in \mathcal{S}$, имеющей простые собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ и двойное собственное значение $\lambda_{n-1} = \lambda_n$. Выкладки для собственных векторов те же, что и выше, пока мы не дойдем до вектора q_{n-2}, отвечающего последнему простому собственному значению λ_{n-2}. Выбор вектора q_{n-2} по-прежнему содержит две степени свободы; однако как только векторы $q_1, \dots, q_{n-2}$ выбраны, они однозначно определяют двумерное собственное подпространство для λ_{n-1}. Учитывая, что число *различных* собственных значений теперь равно $n-1$, общее число степеней свободы равно

$$(n-1) + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 = N - 2.$$

Итак,

$$\dim \mathcal{M} = N - 2. \tag{2}$$

Формула (2) дает простое объяснение феномену уклонения от столкновений. Действительно, в пространстве размерности N наугад выбранное одномерное линейное многообразие (1) в общем случае не пересекает многообразие $\mathcal{M}$ размерности $N-2$. Иными словами, матрицы типичного пучка (1) не должны иметь кратных собственных значений.

Справедливость формулы (2) вызывает, однако, сомнения, основанные на следующем соображении. Матрица A тогда и только тогда имеет кратное собственное значение, когда равен нулю дискриминант $\operatorname{disc}(A)$ ее характеристического многочлена. Условие

$$\operatorname{disc}(A) = 0 \tag{3}$$

представляет собой алгебраическое уравнение относительно элементов $a_{11}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{nn}$ матрицы A. Будучи наложено на

$\mathcal{S}$, это условие в типичном случае должно снижать размерность на единицу, а не на две единицы, как требует (2).

Попытка разрешить это противоречие предпринята в [2], где показано, что коразмерность многообразия $\mathcal{M}$ в пространстве $\mathcal{S}$ не меньше двух. Это вытекает из важного результата Н. В. Илюшечкина [3], согласно которому модуль дискриминанта комплексной нормальной матрицы может быть представлен в виде суммы квадратов модулей. В [2] использована специализация этого результата для вещественных симметричных матриц, причем в той форме, какая ей придана Б. Парлеттом в [4].

Вопрос о том, почему коразмерность многообразия $\mathcal{M}$ равна двум, а не большему числу, остался в [2] без ответа. Между тем это отнюдь не праздный вопрос, учитывая что уже при $n = 3$ представление Илюшечкина для дискриминанта $\operatorname{disc}(A)$ включает в себя 19 слагаемых, являющихся квадратами многочленов от элементов a_{ij}. Многие из них совпадают; тем не менее, имеется более двух алгебраически независимых многочленов.

В настоящей статье мы обосновываем формулу (2) для размерности многообразия $\mathcal{M}$ в случае $n = 3$. При $n > 3$ рассуждения, в сущности, были бы такими же, но их громоздкость возросла бы пропорционально количеству слагаемых в представлении дискриминанта.

В разделе 2 мы обсуждаем представление Илюшечкина–Парлетта для дискриминанта вещественной симметричной матрицы A.

В разделе 3 исследуется структура многообразия $\mathcal{M}$ при $n = 3$. Выделены неприводимые компоненты этого многообразия. Показано, что все они, за исключением одной, имеют коразмерность 3. Для оставшейся компоненты $\mathcal{L}$ получено описание системой из трех алгебраических уравнений относительно элементов a_{ij}.

Наконец, в разделе 4 мы доказываем, что коразмерность компоненты $\mathcal{L}$ равна двум (а не трем, как можно было бы ожидать).

2. Дискриминант симметричной матрицы

Пусть A – матрица порядка n с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. *Дискриминант* $\operatorname{disc}(A)$ этой матрицы определим как результант Сильвестра ее характеристического многочлена $p(\lambda)$, т.е. формулой

$$\operatorname{disc}(A) = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2. \tag{4}$$

Будучи симметрической функцией от $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, дискриминант (4) является рациональным выражением от коэффициентов многочлена $p(\lambda)$, т.е., в конечном счете, от элементов матрицы A. Оказывается, что $\operatorname{disc}(A)$ можно вычислить, не находя $p(\lambda)$, а именно как определитель некоторой матрицы, строящейся рационально непосредственно по A.

Пусть $\tilde{A}$ – матрица с элементами

$$\tilde{a}_{ij} = \operatorname{tr}(A^{i+j-2}), \qquad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Лемма 1 (Парлетт). *Справедливо равенство*

$$\operatorname{disc}(A) = \det \tilde{A}. \tag{5}$$

В пространстве $M_n(\mathbf{C})$ комплексных $n \times n$-матриц фиксируем базис, состоящий из матричных единиц E_{ij}. Символ $\operatorname{vec}(B)$ будет обозначать столбец размерности n^2, составленный из координат матрицы $B \in M_n(\mathbf{C})$ в этом базисе (иначе говоря, составленный из элементов матрицы B). Построим две матрицы размера $n^2 \times n$:

$$\mathcal{O}_A = [\operatorname{vec}(I)\ \operatorname{vec}(A)\ \operatorname{vec}(A^2)\ \cdots\ \operatorname{vec}(A^{n-1})],$$

$$\mathcal{O}_{A^T} = [\operatorname{vec}(I)\ \operatorname{vec}(A^T)\ \operatorname{vec}((A^T)^2)\ \cdots\ \operatorname{vec}((A^T)^{n-1})].$$

Из определения матрицы $\tilde{A}$ вытекает равенство

$$\tilde{A} = (\mathcal{O}_{A^T})^T \mathcal{O}_A.$$

Применяя теорему Бине–Коши и используя (5), получаем

$$\operatorname{disc}(A) = \sum_{\sigma} \det[\mathcal{O}_{A^T}(\sigma)] \det[\mathcal{O}_A(\sigma)], \tag{6}$$

где суммирование происходит по возрастающим последовательностям σ, состоящим из n элементов множества $\{1, 2, \dots, n^2\}$.

От рассмотрения произвольных комплексных матриц перейдем к вещественному симметричному случаю. Будем интерпретировать $\mathcal{S}$ как N-мерное подпространство евклидова пространства

$M_n(\mathbf{R})$, где скалярное произведение $n \times n$-матриц X и Y задается правилом

$$(X, Y) = \operatorname{tr}(Y^T X) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} y_{ij}.$$

Ортогональным дополнением к $\mathcal{S}$ является подпространство $\mathcal{K}$ кососимметричных матриц.

Фиксируем в $\mathcal{S}$ ортонормированный базис, состоящий из матричных единиц E_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$ и матриц E_{ij}^{+} $(i < j)$, где

$$E_{ij}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} + E_{ji}).$$

Координаты матрицы $A \in \mathcal{S}$ в этом базисе суть элементы ее верхнего треугольника, причем наддиагональные элементы берутся с коэффициентом $\sqrt{2}$. Столбец $\operatorname{vec}(A)$, как и раньше, составляется из координат матрицы A и имеет теперь размерность N, поэтому $\mathcal{O}_A$ – матрица размера $N \times n$. Так, при $n = 3$ получаем

$$\mathcal{O}_A = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & a_{11}^{(2)} \\ 0 & \sqrt{2}a_{12} & \sqrt{2}a_{12}^{(2)} \\ 1 & a_{22} & a_{22}^{(2)} \\ 0 & \sqrt{2}a_{13} & \sqrt{2}a_{13}^{(2)} \\ 0 & \sqrt{2}a_{23} & \sqrt{2}a_{23}^{(2)} \\ 1 & a_{33} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Здесь принят обход позиций верхнего треугольника по столбцам и через $a_{ij}^{(2)}$ обозначены элементы матрицы A^2.

Поскольку $A^T = A$, матрица $\mathcal{O}_{A^T}$ совпадает с матрицей $\mathcal{O}_A$. Формула (6) принимает вид

$$\operatorname{disc}(A) = \det(\mathcal{O}_A^T \mathcal{O}_A) = \sum_{\sigma} [\det \mathcal{O}_A(\sigma)]^2. \tag{8}$$

Это и есть искомое представление дискриминанта в виде суммы квадратов. Формально сумма состоит из $\binom{N}{n}$ слагаемых, однако бóльшая часть из них, а именно $\binom{M}{n}$ слагаемых, где $M = n(n-1)/2$, равны нулю. Действительно, если ни один индекс последовательности σ не соответствует диагональным позициям, то первый столбец подматрицы $\mathcal{O}_A(\sigma)$ нулевой. В рассмотренном выше примере такова последовательность $\{2, 4, 5\}$.

Среди ненулевых слагаемых суммы (8) многие совпадают (а соответствующие миноры матрицы $\mathcal{O}_A$ совпадают с точностью до знака). Так, при $n = 3$ число ненулевых слагаемых в (8) равно

$$\binom{6}{3} - \binom{3}{3} = 19,$$

различных же слагаемых только 10.

3. Система алгебраических уравнений, задающая многообразие $\mathcal{M}$

В этом и следующем разделах мы рассматриваем лишь вещественные симметричные матрицы порядка 3. Запишем такую матрицу A в виде

$$A = \begin{pmatrix} x & u & w \\ u & y & v \\ w & v & z \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^2 = \begin{pmatrix} x^2+u^2+w^2 & (x+y)u+vw & (x+z)w+uv \\ (x+y)u+vw & y^2+u^2+v^2 & (y+z)v+uw \\ (x+z)w+uv & (y+z)v+uw & z^2+v^2+w^2 \end{pmatrix}.$$

Девятнадцать ненулевых миноров, присутствующих в правой части формулы (8), можно разбить на три группы: девять миноров с единственной единицей в первом столбце; столько же миноров, у которых в первом столбце стоят две единицы; наконец, единственный минор с тремя единицами в первом столбце. Если игнорировать скалярные множители, то среди миноров первой группы различны лишь три:

$$f_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{11}^{(2)} \\ 0 & a_{12} & a_{12}^{(2)} \\ 0 & a_{13} & a_{13}^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & (x+y)u+vw \\ w & (x+z)w+uv \end{vmatrix} = uw(z-y) + v(u^2-w^2),$$

$$f_2 = \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{11}^{(2)} \\ 0 & a_{12} & a_{12}^{(2)} \\ 0 & a_{23} & a_{23}^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & (x+y)u+vw \\ v & (y+z)v+uw \end{vmatrix} = uv(z-x) + w(u^2-v^2)$$

и

$$f_3 = \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{11}^{(2)} \\ 0 & a_{13} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{23} & a_{23}^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & (x+z)w + uv \\ v & (y+z)v + uw \end{vmatrix} = vw(y-x) + u(w^2 - v^2).$$

Они отвечают перестановкам σ, равным соответственно $(1,2,4)$, $(1,2,5)$ и $(1,4,5)$.

Обозначим через $f_4, f_5, \dots, f_{12}$ многочлены, соответствующие ненулевым минорам второй группы (мы будем игнорировать скалярный множитель $\sqrt{2}$, присутствующий в этих минорах). Единственный ненулевой минор третьей группы обозначим через f_{13}. Тогда система уравнений

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_{13} = 0 \tag{9}$$

дает описание множества $\mathcal{M}$ как алгебраического многообразия в вещественном пространстве переменных x, y, z, u, v, w.

Легко видеть, что многообразие $\mathcal{M}$ приводимо. Если, например, $u = w = 0$, то A принимает блочно-диагональный вид

$$A = x \oplus \begin{pmatrix} y & v \\ v & z \end{pmatrix}$$

и равенство (3) эквивалентно требованию, чтобы число x было собственным значением матрицы

$$\begin{pmatrix} y & v \\ v & z \end{pmatrix}$$

либо чтобы собственные значения этой матрицы были одинаковы. В первом случае мы имеем

$$x^2 - (y+z)x + yz - v^2 = 0,$$

во втором – систему условий

$$v = 0, \qquad y = z.$$

Таким образом, $\mathcal{M}$ содержит подмногообразие $\mathcal{N}_1$ коразмерности три, описываемое системой уравнений

$$u = 0,\ w = 0,\ [x^2 - (y+z)x + yz - v^2][v^2 + (y-z)^2] = 0 \tag{10}$$

и очевидным образом распадающееся в сумму двух неприводимых многообразий. Два других подмногообразия аналогичного типа $\mathcal{N}_2$ и $\mathcal{N}_3$ описываются системами

$$v = 0,\ w = 0,\ [z^2 - (x+y)z + xy - u^2][u^2 + (x-y)^2] = 0 \qquad (11)$$

и

$$u = 0,\ v = 0,\ [y^2 - (x+z)y + xz - w^2][w^2 + (x-z)^2] = 0. \qquad (12)$$

Рассмотрим теперь многообразие

$$\mathcal{P} = \mathcal{M} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3).$$

Покажем, что его исходное описание посредством системы (9) можно редуцировать к системе из трех уравнений

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0. \qquad (13)$$

Более точно, мы докажем следующее: если определить многообразие $\mathcal{K}$ как множество решений системы (13) и положить

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3),$$

то на многообразии $\mathcal{L}$ все многочлены $f_4, f_5, \dots, f_{13}$ обращаются в нуль. Тем самым $\mathcal{L} = \mathcal{P}$.

Утверждение

$$f|_{\mathcal{L}} = 0$$

доказывается однотипным образом для всех миноров второй группы. Мы проведем доказательство для многочлена

$$f_4 = \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{11}^{(2)} \\ 0 & a_{12} & a_{12}^{(2)} \\ 1 & a_{22} & a_{22}^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2+u^2+w^2 \\ 0 & u & xu+yu+vw \\ 1 & y & y^2+u^2+v^2 \end{vmatrix} =$$

$$u(z-x)(y-z) + u(u^2-v^2) + vw(z-x).$$

Рассмотрим произведение

$$wf_4 = uw(z-x)(y-z) + uw(u^2-v^2) + vw^2(z-x). \qquad (14)$$

Поскольку $f_1 = 0$ в точках многообразия $\mathcal{L}$, то

$$uw(y-z) = v(u^2-w^2).$$

Подстановка этого соотношения в (14) даёт

$$wf_4 = u[(z-x)uv + w(u^2 - v^2)] = uf_2 = 0$$

для точек из $\mathcal{L}$. Отсюда следует, что

$$f_4 = 0 \tag{15}$$

в точках из $\mathcal{L}$, для которых $w \neq 0$. Поскольку $\mathcal{L}$ не вложено в подпространства (10) и (11), всякая точка из $\mathcal{L}$ с нулевой координатой w является пределом последовательности точек из $\mathcal{L}$ с $w \neq 0$. Поэтому равенство (15) выполняется на всём многообразии $\mathcal{L}$.

Покажем теперь, что многочлен

$$f_{19} = \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{11}^{(2)} \\ 1 & a_{22} & a_{22}^{(2)} \\ 1 & a_{33} & a_{33}^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2+u^2+w^2 \\ 1 & y & y^2+u^2+v^2 \\ 1 & z & z^2+v^2+w^2 \end{vmatrix} =$$

$$(y-x)(z-x)(z-y) + x(u^2-w^2) + y(v^2-u^2) + z(w^2-v^2)$$

также обращается в нуль на многообразии $\mathcal{L}$. С этой целью рассмотрим произведение

$$uwf_{19} = uw(y-x)(z-x)(z-y) + uw[(y-x)(v^2-u^2) - (z-x)(v^2-w^2)] =$$

$$uw(y-x)(z-x)(z-y) + u(y-x)w(v^2-u^2) - w(z-x)u(v^2-w^2). \tag{16}$$

Поскольку $f_2 = 0$ и $f_3 = 0$ в точках многообразия $\mathcal{L}$, то

$$w(v^2-u^2) = uv(z-x)$$

и

$$u(v^2-w^2) = vw(y-x).$$

Подставляя эти соотношения в (16), получаем

$$uwf_{19} = (y-x)(z-x)[uw(z-y) + u^2v - vw^2] = (y-x)(z-x)f_1 = 0$$

для точек из $\mathcal{L}$. Тем самым

$$f_{19} = 0 \tag{17}$$

в точках из $\mathcal{L}$, для которых $uw \neq 0$. Отсюда, как и выше, выводим, что, в действительности, (17) выполняется на всем многообразии $\mathcal{L}$.

Подведем итог проведенному анализу. Мы показали, что

$$\mathcal{M} = \mathcal{L} \cup \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3,$$

где каждое из подмногообразий $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ и $\mathcal{N}_3$ имеет коразмерность три. Для подмногообразия $\mathcal{L}$ получено описание системой уравнений (13). В следующем разделе мы докажем, что

$$\operatorname{codim} \mathcal{L} = 2.$$

4. Коразмерность многообразия $\mathcal{L}$

Многочлены f_1, f_2 и f_3 от шести переменных x, y, z, u, v, w однородны, причем никакие два из них не содержат одинаковых одночленов. Отсюда следует, что f_1, f_2, f_3 линейно независимы как элементы линейного пространства $\mathbf{R}[x, y, z, u, v, w]$. Они независимы и функционально, поскольку в матрице Якоби

$$\frac{\partial\,(f_1 f_2 f_3)}{\partial\,(xyzuvw)} \tag{18}$$

есть миноры порядка 3, не обращающиеся в нуль тождественно. Так,

$$\frac{\partial\,(f_1 f_2 f_3)}{\partial\,(xyu)} = uvw[vw(y - x) + u(w^2 - v^2)] = uvwf_3 \tag{19}$$

есть нетривиальный многочлен от переменных x, y, u, v, w.

Заметим, однако, что минор (19) обращается в нуль в точках многообразия $\mathcal{L}$. Это не случайно; в действительности, матрица Якоби (18) имеет на всём $\mathcal{L}$ ранг, не превосходящий двух.

Лемма 2. *Многочлены f_1, f_2 и f_3 удовлетворяют соотношению*

$$vf_1 - wf_2 + uf_3 = 0. \tag{20}$$

Это утверждение проверяется подстановкой выражений для f_1, f_2 и f_3 в левую часть соотношения (20).

Теорема 1. *Все миноры порядка 3 в матрице Якоби (18) обращаются в нуль в точках многообразия $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Двадцать миноров порядка 3, содержащихся в матрице (18), разобьем на четыре группы. Первая группа состоит из единственного минора

$$\frac{\partial\,(f_1 f_2 f_3)}{\partial\,(xyz)} = \begin{vmatrix} 0 & -uw & uw \\ -uv & 0 & uv \\ -vw & vw & 0 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель очевидным образом равен нулю, причем для такого вывода соотношение (20) не нужно.

Девять миноров второй группы представляют собой функциональные определители вида

$$\frac{\partial\,(f_1 f_2 f_3)}{\partial\,(t_1 t_2 t_3)}, \tag{21}$$

где две из переменных t_1, t_2, t_3 принадлежат группе (x, y, z), а третья – группе (u, v, w). Утверждение теоремы проверяется одним и тем же способом для всех девяти миноров. Для определенности, снова рассмотрим минор

$$\frac{\partial\,(f_1 f_2 f_3)}{\partial\,(xyu)}. \tag{22}$$

Дифференцируя (20) соответственно по x, y и u, находим

$$v(f_1)'_x - w(f_2)'_x + u(f_3)'_x = 0, \tag{23}$$

$$v(f_1)'_y - w(f_2)'_y + u(f_3)'_y = 0, \tag{24}$$

$$v(f_1)'_u - w(f_2)'_u + u(f_3)'_u + f_3 = 0. \tag{25}$$

В точках многообразия $\mathcal{L}$ равенство (25) принимает вид

$$v(f_1)'_u - w(f_2)'_u + u(f_3)'_u = 0, \tag{26}$$

поскольку $f_3 = 0$ на $\mathcal{L}$. Если хотя бы одна из координат u, v, w отлична от нуля, то соотношения (23), (24) и (26) означают линейную зависимость строк определителя (22). Но и в точках, где $u = v = w = 0$ (если такие точки на многообразии $\mathcal{L}$ имеются), минор (22) равен нулю по непрерывности. Как и в предыдущем разделе, рассуждение по непрерывности основано на том обстоятельстве, что $\mathcal{L}$ не вложено ни в одно из подпространств (10)–(12).

Девять миноров третьей группы суть определители вида (21), где лишь одна из переменных t_1, t_2, t_3 принадлежит группе (x, y, z), а две остальных – группе (u, v, w). И здесь рассуждения однотипны для всех девяти миноров. Для определенности, рассмотрим определитель

$$\frac{\partial\,(f_1 f_2 f_3)}{\partial\,(xuv)}. \tag{27}$$

По-прежнему выполняются равенства (23) и (25), а в точках многообразия $\mathcal{L}$ справедливо (26). Дифференцируя (20) по переменной v, имеем

$$v(f_1)_v' - w(f_2)_v' + u(f_3)_v' + f_1 = 0.$$

В точках из $\mathcal{L}$ это равенство принимает вид

$$v(f_1)_v' - w(f_2)_v' + u(f_3)_v' = 0. \tag{28}$$

Соотношения (23), (26) и (28) означают, что определитель (27) равен нулю в точках из $\mathcal{L}$, где хотя бы одна из координат u, v, w отлична от нуля. В действительности, этот определитель обращается в нуль тождественно на $\mathcal{L}$, что, как и выше, обосновывается соображениями непрерывности.

Четвертая группа содержит единственный минор

$$\frac{\partial\,(f_1 f_2 f_3)}{\partial\,(uvw)}. \tag{29}$$

Присоединяя к (26) и (28) соотношение

$$v(f_1)_w' - w(f_2)_w' + u(f_3)_w' - f_2 = 0,$$

получаемое дифференцированием равенства (20) по w, и учитывая, что $f_2 = 0$ в точках из $\mathcal{L}$, прежним образом выводим, что минор (29) равен нулю тождественно на $\mathcal{L}$. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Коразмерность многообразия $\mathcal{L}$ не превосходит двух.*

Действительно, теорема означает, что размерность касательного пространства в любой точке из $\mathcal{L}$ не превосходит двух.

Следствие 2. $\operatorname{codim} \mathcal{L} = 2$.

Доказательство. Достаточно показать, что касательные векторы

$$\left((f_1)'_x, (f_1)'_y, (f_1)'_z, (f_1)'_u, (f_1)'_v, (f_1)'_w\right)$$

и

$$\left((f_2)'_x, (f_2)'_y, (f_2)'_z, (f_2)'_u, (f_2)'_v, (f_2)'_w\right)$$

линейно независимы хотя бы в некоторых точках из $\mathcal{L}$. Имеем

$$\frac{\partial\,(f_1 f_2)}{\partial\,(xy)} = \begin{vmatrix} 0 & -uw \\ -uv & 0 \end{vmatrix} = -u^2vw.$$

Этот определитель отличен от нуля в точках, где $uvw \neq 0$, образующих открытое (в топологии Зарисского) плотное подмножество в $\mathcal{L}$. Отсюда вытекает справедливость следствия. □

Литература

1. P. Lax, *Linear Algebra.* — Wiley, New York (1997).
2. Х. Д. Икрамов, *О размерности многообразия симметричных матриц с кратными собственными значениями.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ., **44** (2004), 963–967.
3. Н. В. Илюшечкин, *Дискриминант характеристического многочлена нормальной матрицы.* — Мат. заметки, **51** (1992), 16–23.
4. B. N. Parlett, *The (matrix) discriminant as a determinant.* — Linear Algebra Appl., **355** (2002), 85–101.

Dana M., Ikramov Kh. D. On the codimension of the variety of symmetric matrices with multiple eigenvalues.

According to a result of Wigner and von Neumann, the dimension of the set $\mathcal{M}$ of $n \times n$ real symmetric matrices with multiple eigenvalues is equal to $N-2$, where $N = n(n+1)/2$. This value is determined by counting the number of free parameters in the spectral decomposition of a matrix. We show that the same dimension is obtained if $\mathcal{M}$ is interpreted as an algebraic variety.

Университет Курдистана,
г. Санандадж, Исламская
Республика Иран
Московский государственный
университет

Поступило 6 января 2005 г.