Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 323, 2005 г.

Х. Д. Икрамов

О ГЛАВНЫХ МИНОРАХ МАТРИЦЫ С КРАТНЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ

1. Пусть A – комплексная $n \times n$-матрица с кратным собственным значением λ_0. Используя сдвиг $B = A - \lambda_0 I$, можно без ограничения общности считать, что $\lambda_0 = 0$.

Собственное значение нуль матрицы A является кратным тогда и только тогда, когда два младших коэффициента ее характеристического многочлена

$$\phi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

равны нулю. Хорошо известно, что, с точностью до знака, коэффициент a_n равен определителю матрицы A, а коэффициент a_{n-1} – сумме всех ее главных миноров порядка $n-1$. Отсюда следует, что оба этих коэффициента являются многочленами (соответственно степени n и $n-1$) от элементов $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ матрицы A. Обозначим их в этом качестве через $F(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ и $G(a_{11}, \ldots, a_{nn})$. Итак, интересующий нас класс матриц можно описать системой уравнений

$$F(a_{11}, \ldots, a_{nn}) = 0, \tag{1}$$

$$G(a_{11}, \ldots, a_{nn}) = 0. \tag{2}$$

Предположим, что нуль является полупростым собственным значением для A, т.е. его алгебраическая кратность k ($k \geqslant 2$) совпадает с геометрической кратностью, равной дефекту $\operatorname{def} A$. В этом случае все миноры порядка $n-1$ в A равны нулю. Это верно, в частности, для главных миноров. Таким образом, система (1)–(2) имеет следствием гораздо более сильные, чем (2), требования равенства нулю *каждого* из главных миноров порядка $n-1$:

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n = 0. \tag{3}$$

Подчеркнем, что для справедливости этого вывода существенна полупростота нулевого собственного значения. Например,

2×2-матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

имеет единственное собственное значение нуль, но ее диагональные элементы отличны от нуля, что соответствует дефектности собственного значения.

Наличие подобных примеров исключает возможность вывода условий (3) из системы (1)–(2) чисто алгебраическим путем без использования информации о полупростоте собственного значения. Однако если сузить класс рассматриваемых матриц, то такой вывод становится возможен. Для класса эрмитовых матриц он проводится в п. 2 настоящей заметки. О полупростоте собственных значений здесь не приходится заботиться – для эрмитовой матрицы она обеспечена автоматически.

2. Чтобы упростить выкладки, ограничимся разбором случая $n = 3$. Запишем эрмитову матрицу A в виде

$$A = \begin{pmatrix} x & u & w \\ \overline{u} & y & v \\ \overline{w} & \overline{v} & z \end{pmatrix}, \qquad x, y, z \in \mathbf{R}.$$

Тогда

$$\Delta_1 = xy - |u|^2, \qquad \Delta_2 = xz - |w|^2, \qquad \Delta_3 = yz - |v|^2. \tag{4}$$

Докажем, для определенности, что $\Delta_3 = 0$. Поскольку любой из двух остальных главных миноров может быть переведен в положение Δ_3 посредством подходящей симметричной перестановки строк и столбцов, то наше рассуждение заодно установит, что Δ_1 и Δ_2 также равны нулю.

Предположим противное, т.е. $\Delta_3 \neq 0$. Уравнение (1) можно в нашем случае записать как

$$x\Delta_3 = \phi(y, z, u, v, w), \tag{5}$$

где

$$\phi = |u|^2 z + |w|^2 y - uv\overline{w} - \overline{u}\overline{v}w. \tag{6}$$

Выражение для x, полученное из (5), т.е.

$$x = \frac{\phi}{\Delta_3},$$

подставим в уравнение (2), которое для $n=3$ принимает вид

$$\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=0.$$

Имеем (см. (4))

$$\frac{\phi}{\Delta_3}(y+z)-|u|^2-|w|^2+\Delta_3=0.$$

Используя (6) и приводя подобные члены, получаем отсюда равенство

$$|u|^2|v|^2+|w|^2y^2-2\mathrm{Re}\,(uv\overline{w})y+|v|^2|w|^2+|u|^2z^2-2\mathrm{Re}\,(uv\overline{w})z+\Delta_3^2=0,$$

или

$$|uv-yw|^2+|zu-\overline{v}w|^2+\Delta_3^2=0.$$

Итак, $\Delta_3=0$, вопреки исходному предположению.

Ikramov Kh. D. On the principal minors of a matrix with a multiple eigenvalue.

The property of a Hermitian $n\times n$ matrix A that all its principal minors of order $n-1$ vanish is shown to be a purely algebraic implication of the fact that the two lowest coefficients of its characteristic polynomial are zero. To prove this assertion, no information on the rank or the eigenvalues of A is required.

Московский государственный университет

Поступило 6 апреля 2005 г.

E-mail: ikramov@cs.msu.su