Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 323, 2005 г.

Х. Д. Икрамов, А. М. Назари

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАССТОЯНИИ ОТ НОРМАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ДО МНОЖЕСТВА МАТРИЦ С КРАТНЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ НУЛЬ

1. Пусть $M_n(\mathbf{C})$ – множество комплексных $n \times n$-матриц ($n \geqslant 2$), а $\mathcal{L}$ – его подмножество, состоящее из матриц с кратным собственным значением нуль. Сопоставим матрице $A \in M_n(\mathbf{C})$ матрицу удвоенного порядка

$$P(\gamma) = \begin{pmatrix} A & \gamma I_n \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

зависящую от вещественного параметра γ. Для спектрального расстояния $\rho_2(A, \mathcal{L})$ от матрицы A до множества $\mathcal{L}$ в [1] получена формула

$$\rho_2(A, \mathcal{L}) = \max_{\gamma \geqslant 0} \sigma_{2n-1}(P(\gamma)). \tag{1}$$

Здесь $\sigma_{2n-1}(P(\gamma))$ есть предпоследнее сингулярное число матрицы $P(\gamma)$ при упорядочении сингулярных чисел по убыванию.

Пусть теперь $A \in M_n(\mathbf{C})$ – нормальная матрица с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, пронумерованными так, что

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|.$$

В [2] показано, что

$$\rho_2(A, \mathcal{L}) = \left(\frac{|\lambda_{n-1}|^2 + |\lambda_n|^2}{2} \right)^{1/2}. \tag{2}$$

Доказательство этого соотношения в [2] основано на использовании формулы (1).

Наконец, в [3] указаны явные формулы для вычисления матрицы $B = A + \Delta \in \mathcal{L}$, ближайшей (в смысле спектральной нормы) к нормальной матрице A. Примечательно в этих формулах то, что матрица-поправка Δ определяется двумя младшими собственными значениями матрицы A (т.е. числами λ_{n-1} и λ_n) и соответствующими собственными векторами q_{n-1} и q_n. Это означает, во-первых, что задача приближения нормальной матрицы матрицей из $\mathcal{L}$ по-существу является двумерной, и, во-вторых, что формула (2), возможно, допускает элементарный вывод. Доказательство в [2], использующее нетривиальную формулу (1), никак нельзя признать элементарным.

Цель настоящей заметки – предложить искомое элементарное доказательство, опирающееся лишь на простейшие факты из математического анализа.

2. Из сказанного выше следует, что мы можем ограничиться рассмотрением нормальных матриц второго порядка. Поскольку спектральная норма унитарно инвариантна, без ограничения общности, можно считать, что

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Если $a = b$, то с точностью до скалярного множителя A является унитарной матрицей. Комментарий по поводу этого случая см. ниже в п. 3. Впредь будем предполагать, что $a \neq b$.

Для упрощения дальнейших выкладок мы примем еще два ограничения:

1) Собственные значения a и b матрицы (3) будем считать вещественными числами (что делает A эрмитовой матрицей).

2) Ближайшую к A матрицу из $\mathcal{L}$ будем искать среди вещественных матриц

$$B = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Подчеркнем, что ограничения 1), 2) вводятся лишь для технического удобства. В случае комплексных a, b, x, y, u, v мы проводили бы в сущности те же рассуждения, переходя к вещественным переменным в представлениях $a = a_1 + ia_2, \dots, v = v_1 + iv_2$; однако число переменных удвоилось бы, а вычисления стали бы более громоздкими.

Принадлежность к $\mathcal{L}$ эквивалентна для матрицы (4) требованию, чтобы ее след и определитель были равны нулю, т.е.

$$x + y = 0,$$

$$xy - uv = 0.$$

Отсюда

$$x^2 + uv = 0. \tag{5}$$

Если допустить, что $u = 0$, то, согласно (5), $x = 0$ и

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что среди матриц такого вида ближайшей к A будет нулевая матрица, спектральное расстояние от которой до A равно $\max\{|a|, |b|\}$. Мы увидим, что при $|a| \neq |b|$ в $\mathcal{L}$ имеются матрицы, более близкие к A.

К аналогичному итогу приводит случай $v = 0$. Поэтому в дальнейшем считаем, что

$$uv \neq 0.$$

Это позволяет переписать (5) в виде

$$v = -\frac{x^2}{u}$$

и рассматривать допустимые матрицы из $\mathcal{L}$ как двухпараметрическое семейство

$$B = \begin{pmatrix} x & u \\ -\frac{x^2}{u} & -x \end{pmatrix}. \tag{6}$$

3. Наша задача состоит в том, чтобы выбором значений параметров x и u минимизировать спектральную норму (т.е. старшее сингулярное число) матрицы

$$\Delta = B - A = \begin{pmatrix} x - a & u \\ -\frac{x^2}{u} & -x - b \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Вместо сингулярных чисел σ_1, σ_2 ($\sigma_1 \geqslant \sigma_2$) матрицы (7) удобнее работать с их квадратами $\lambda_1 = \sigma_1^2$ и $\lambda_2 = \sigma_2^2$. Числа λ_1 и λ_2 суть корни квадратного уравнения

$$F(\lambda, x, u) = \lambda^2 - \chi_1 \lambda + \chi_2 = 0, \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered} \chi_1(x, u) = (x-a)^2 + (x+b)^2 + u^2 + \frac{x^4}{u^2} = \\ a^2 + b^2 + 2x(b-a) + 2x^2 + u^2 + \frac{x^4}{u^2}, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\chi_2(x,u) = \chi_2(x) = \left[(a-x)(b+x) + u\cdot\frac{x^2}{u}\right]^2 = \\ \big[ab + x(a-b)\big]^2 = a^2b^2 + 2xab(a-b) + (a-b)^2x^2. \tag{10}$$

В точках (x, u), где корни уравнения (8) различны (т.е. там, где $F'_\lambda(\lambda, x, u) \neq 0$), эти корни являются дифференцируемыми функциями от x и u, частные производные которых даются выражениями

$$\lambda'_x = -\frac{F'_x}{F'_\lambda}, \qquad \lambda'_u = -\frac{F'_u}{F'_\lambda}. \tag{11}$$

В стационарных точках этих функций имеем

$$F'_x = 0, \qquad F'_u = 0, \tag{12}$$

или, учитывая формулы (8)–(10),

$$-(\chi_1)'_x\lambda + (\chi_2)'_x = 0, \tag{13}$$

$$\lambda(\chi_1)'_u = 0. \tag{14}$$

Для интересующих нас стационарных точек $\lambda \neq 0$. Действительно, равенство $\|\Delta\|_2 = 0$ означало бы, что $A \in \mathcal{L}$. Последнее возможно лишь при $a = b = 0$. Поскольку

$$(\chi_1)'_u = 2u - \frac{2x^4}{u^3},$$

уравнение (14) превращается в соотношение

$$u^4 = x^4.$$

Два вещественных решения

$$u = x \quad \text{и} \quad u = -x$$

этого соотношения приводят к взаимно транспонированным матрицам (6):

$$B_1 = \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B_2 = \begin{pmatrix} x & -x \\ x & -x \end{pmatrix}.$$

Поэтому достаточно рассматривать один из указанных случаев. Для определенности, будем считать, что

$$u = x.$$

С учетом этого условия, имеем

$$(\chi_1)'_x = 2(b-a) + 4x + \frac{4x^3}{u^2} = 2(b-a) + 8x,$$

$$(\chi_2)'_x = 2ab(a-b) + 2x(a-b)^2.$$

Нетрудно проверить, что эти линейные функции от x одновременно обращаются в нуль только при $b = -a$, т.е. когда с точностью до скалярного множителя A является ортогональной матрицей. В этом специальном случае из теоремы Экарта–Янга (см. [4]) следует, что

$$\rho_2(A, \mathcal{L}) = |a|$$

и это расстояние реализуется выбором в $\mathcal{L}$ нулевой матрицы.

В дальнейшем мы считаем, что $(\chi_1)'_x \neq 0$ (иначе, в силу (13), $(\chi_2)'_x = 0$, что возвращает нас к только что рассмотренной ситуации). Тогда из (13) получаем

$$\lambda = (a-b)\frac{ab + x(a-b)}{4x + b - a}. \tag{15}$$

Подставляя это выражение в (8), приходим к алгебраическому уравнению относительно x. Поскольку старшие члены взаимно уничтожаются, это уравнение имеет третью (а не четвертую) степень. Применяя к нему библиотечную процедуру *factor* системы *Maple*, находим, что уравнение имеет простой корень

$$\widehat{x} = \frac{ab}{b-a} \tag{16}$$

и двойной корень

$$x_0 = \frac{a-b}{2}. \tag{17}$$

Очевидно, что корню (16) соответствует $\lambda = 0$ (см. (15)). Как уже говорилось, этот случай не представляет для нас интереса.

Несложно проверить, что для корня (17)

$$\chi_1(x_0, x_0) = a^2 + b^2$$

и

$$\chi_2(x_0) = [ab + \frac{(a-b)^2}{2}]^2 = \frac{(a^2+b^2)^2}{4}.$$

Таким образом, условие различия корней уравнения (8)

$$\chi_1^2 - 4\chi_2 \neq 0$$

в точке (x_0, x_0) нарушено, а потому F_λ' обращается в нуль в точке (λ_0, x_0, x_0), где

$$\lambda_0 = (a-b)\frac{ab + x_0(a-b)}{4x_0 + b - a} = \frac{a^2+b^2}{2}. \qquad (18)$$

Тем самым формулы (11), на которых основывался вывод уравнений (12), утрачивают смысл в точке (x_0, x_0), а λ_1 и λ_2 как функции от x и u теряют в этой точке дифференцируемость. Очевидно, однако, что λ_1 должно достигать своего минимального значения (поскольку расстояние от A до замкнутого множества $\mathcal{L}$ реализуется некоторой матрицей из $\mathcal{L}$) и точку, где этот минимум достигается, если она не является стационарной, нужно искать как раз там, где дифференцируемость утрачивается. Поэтому рассмотрим подробней условие

$$\chi_1^2 = 4\chi_2.$$

Поскольку χ_2 само является квадратом, это условие эквивалентно паре соотношений

$$\chi_1 = 2\chi_3 \qquad (19)$$

и

$$\chi_1 = -2\chi_3, \qquad (20)$$

где $\chi_3(x) = ab + x(a-b)$. Учитывая (9), имеем

$$\chi_1(x,u) - 2\chi_3(x) \geqslant \chi_1(x,x) - 2\chi_3(x) =$$

$$4x^2 + 2x(b-a) + a^2 + b^2 - 2ab - 2x(a-b) = 4x^2 - 4x(a-b) + (a-b)^2.$$

Минимум квадратного трехчлена в правой части достигается при $x = x_0$ и равен нулю. Таким образом, равенство (19) возможно лишь в точках (x_0, x_0) и $(x_0, -x_0)$.

Аналогично,

$$\chi_1(x,u) + 2\chi_3(x) \geqslant \chi_1(x,x) + 2\chi_3(x) =$$

$$4x^2 + 2x(b-a) + a^2 + b^2 + 2ab + 2x(a-b) = 4x^2 + (a+b)^2.$$

Таким образом, равенство (20) возможно лишь в уже рассмотренном случае $b = -a$; при этом B есть нулевая матрица.

Подведем итог. Точки (x_0, x_0) и $(x_0, -x_0)$ – единственные точки пространства параметров x, u, где функции λ_1 и λ_2 теряют дифференцируемость. Именно в этих точках функция λ_1 достигает своего минимального значения, указываемого формулой (18). Соответственно, минимум старшего сингулярного числа на множестве матриц вида (7) равен

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{1/2}.$$

Это не что иное, как формула (2) при $n = 2$.

Матрицы из $\mathcal{L}$, ближайшие к A, имеют при $|a| \neq |b|$ вид

$$B_1 = \frac{a-b}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B_2 = B_1^T.$$

Литература

1. A. N. Malyshev, *A formula for the* 2*-norm distance from a matrix to the set of matrices with multiple eigenvalues.* — Numer. Math., **83** (1999), 443–454.
2. Х. Д. Икрамов, А. М. Назари, *Об одном замечательном следствии формулы Малышева.* — ДАН, **385** (2002), 599–600.
3. Х. Д. Икрамов, *Явные формулы для матрицы с кратным собственным значением нуль, ближайшей к заданной нормальной матрице.* — ДАН, **398** (2004), 599–601.
4. C. Eckart, G. Young, *The approximation of one matrix by another of lower rank.* — Psychometrica, **1** (1936), 211–218.

Ikramov Kh. D., Nazari A. M. On the 2-norm distance from a normal matrix to the set of matrices with a multiple zero eigenvalue.

An elementary proof is given for a formula for the 2-norm distance from a normal matrix A to the set of matrices with a multiple zero eigenvalue. Earlier, the authors obtained this formula as an implication of a nontrivial result due to A. N. Malyshev.

Московский государственный университет
Университет г. Эрак,
Исламская Республика Иран
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 6 января 2005 г.