Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 323, 2005 г.

Л. Ю. Колотилина

ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНЫХ ЗНАЧЕНИЙ, УЧИТЫВАЮЩИЕ СТРУКТУРУ РАЗРЕЖЕННОСТИ МАТРИЦЫ

§1. Введение

В работе представлены верхние и нижние оценки для сингулярных значений матрицы, учитывающие ее структуру разреженности или, что то же самое, структуру ее ориентированного графа. Полученные оценки улучшают соответствующие результаты из [5] и [6] и базируются на следующих теоремах.

Теорема 1.1 [2, следствие 5.1 и замечание 5.3]. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица порядка $n \geqslant 1$ и пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда для спектрального радиуса $\rho(A)$ матрицы A (т.е. ее перроновского корня) справедлива верхняя оценка*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i,j:a_{ij}\neq 0} \{r_i(A)^{\alpha}\, r_j(A)^{1-\alpha}\}.$$

Теорема 1.2 [4, следствие 7.2 при $k = 2$]. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcup_{i\neq j:\ a_{ij}\neq 0} \{z \in \mathbb{C}:\ |a_{ii} - z|\, |a_{jj} - z| \leqslant r'_i(A)\, r'_j(A)\}$$
$$\bigcup \Big\{a_{ii},\ 1 \leqslant i \leqslant n :\ A[i] \text{ – неприводимая компонента } A\Big\}.$$

Здесь и далее мы используем следующие обозначения:
если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, то

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad r'_i(A) = r_i(A) - |a_{ii}|, \qquad i = 1, \ldots, m;$$

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 03-01-00349 и НШ 2268.2003.1.

$$c_j(A) = \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|, \qquad c'_j(A) = c_j(A) - |a_{jj}|, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Если A – квадратная матрица, т.е. $m = n$, то через $\operatorname{Spec} A$ мы обозначаем спектр A, так что

$$\operatorname{Spec} A = \{\lambda_i(A),\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

где через $\lambda_i(A)$ обозначаются собственные значения A. Кроме того, на протяжении всей статьи мы предполагаем, что сингулярные значения матриц, а также собственные значения квадратных матриц с вещественным спектром всегда упорядочены в порядке невозрастания, т.е.

$$\sigma_1(A) \geqslant \dots \geqslant \sigma_q(A), \quad q = \min\{m,\ n\},$$

и

$$\lambda_1(A) \geqslant \dots \geqslant \lambda_n(A).$$

§2. Верхние оценки

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m, n \geqslant 1$, – произвольная матрица. Упорядочим $m+n$ величин $r_i(A)$, $i = 1, \dots, m$, и $c_j(A)$, $j = 1, \dots, n$, в порядке невозрастания и обозначим полученные суммы модулей по линиям A через

$$l_1(A) \geqslant l_2(A) \geqslant \dots \geqslant l_{m+n}(A) \geqslant 0.$$

Через A' обозначим матрицу, полученную в результате удаления из A любой линии (строки или столбца), такой что соответствующая сумма модулей компонент совпадает с $l_1(A)$, и положим

$$A_{(0)} = A; \qquad A_{(k)} = A'_{(k-1)}, \qquad k = 1, \dots, \min\{m,\ n\} - 1.$$

В этих обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1 [5, теорема 3.7.7]. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Тогда при $k = 1, \dots, \min\{m,\ n\}$,*

$$\sigma_k(A) \leqslant \sigma_1(A_{(k-1)}) \leqslant \left[\max_i r_i(A_{(k-1)})\ \max_j c_j(A_{(k-1)})\right]^{1/2}. \tag{2.1}$$

В частности,

$$\sigma_1(A) \leqslant \left[\max_i r_i(A)\ \max_j c_j(A)\right]^{1/2}. \tag{2.2}$$

Ниже мы установим оценки, улучшающие оценки теоремы 2.1. Для этого введем в рассмотрение вспомогательную эрмитову матрицу

$$B = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}.$$

Как хорошо известно, отличные от нуля собственные значения матрицы B совпадают с числами $\pm\sigma_i(A)$, $i = 1, \dots, \operatorname{rank} A$, и, в частности,

$$\sigma_1(A) = \rho(B). \tag{2.3}$$

Кроме того, в силу леммы Виландта (см., например, [7, II.5.7.5] или [4, лемма 2.1]), мы также имеем

$$\rho(B) \leqslant \rho(|B|). \tag{2.4}$$

Следовательно,

$$\sigma_1(A) \leqslant \rho(|B|), \tag{2.5}$$

и наибольшее сингулярное значение матрицы A можно ограничить сверху с помощью любой верхней оценки для перроновского корня неотрицательной эрмитовой матрицы $|B|$.

Воспользовавшись неравенством (2.5) и применив теорему 1.1 к матрице $|B|$, мы легко получаем следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m, n \geqslant 1$, и пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда*

$$\sigma_1(A) \leqslant \max_{i,j:\, a_{ij}\neq 0} \left\{ r_i(A)^{\alpha}\, c_j(A)^{1-\alpha},\ r_i(A)^{1-\alpha}\, c_j(A)^{\alpha} \right\}; \tag{2.6}$$

в частности (при $\alpha = 1/2$),

$$\sigma_1(A) \leqslant \max_{i,j:\, a_{ij}\neq 0} \left\{ r_i(A)\, c_j(A) \right\}^{1/2}. \tag{2.7}$$

Заметим, что оценка (2.7) улучшает оценку (2.2) и явно учитывает структуру разреженности матрицы A.

Для того, чтобы получить улучшенные верхние оценки для остальных сингулярных значений, мы используем следующий прием. Пусть матрица $A' = (a'_{ij})$ получена из A удалением произвольной строки или произвольного столбца. Тогда, очевидно, справедливо неравенство

$$\max_{i,j:\, a'_{ij}\neq 0} \left\{ r_i(A')\, c_j(A') \right\} \leqslant \max_{i,j:\, a_{ij}\neq 0} \left\{ r_i(A)\, c_j(A) \right\}. \tag{2.8}$$

Обозначим

$$A^{(0)} = A; \quad A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) = \left(A^{(k-1)}\right)', \quad k = 1, \ldots, \min\{m,\ n\} - 1.$$

Для того чтобы установить соотношения между сингулярными значениями матриц A и $A^{(k)}$, мы воспользуемся следующим известным результатом.

Лемма 2.2 (см., напр., [5, следствие 3.1.3]). *Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m, n \geqslant 1$. Тогда*

$$\sigma_i(A) \geqslant \sigma_i(A_r) \geqslant \sigma_{i+r}(A), \qquad i = 1, \ldots, \min\{m,\ n\},$$

где матрица A_r получена удалением в совокупности r строк и/или столбцов из A, и для $X \in \mathbb{C}^{p\times q}$ мы полагаем $\sigma_j(X) = 0$ при $j > \min\{p,\ q\}$.

При $i = 1$ и $r = k - 1$ из леммы 2.2 вытекают неравенства

$$\sigma_k(A) \leqslant \sigma_1(A_{k-1}), \qquad k = 1, \ldots, \min\{m,\ n\}. \tag{2.9}$$

Используя введенные обозначения, неравенство (2.9) и лемму 2.1, мы немедленно получаем следующую последовательность (которая является невозрастающей в силу (2.8)) верхних оценок для последовательных сингулярных значений матрицы A, улучшающих оценки теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m, n \geqslant 1$. Тогда для $k = 1, \ldots, \min\{m,\ n\}$ справедливы неравенства*

$$\sigma_k(A) \leqslant \sigma_1(A^{(k-1)}) \leqslant \max_{i,j:\ a_{ij}^{(k-1)} \neq 0} \left\{ r_i(A^{(k-1)})\ c_j(A^{(k-1)}) \right\}^{1/2}.$$

Замечание 2.1. Ясно, что верхняя оценка для $\sigma_1(A)$, полученная применением к $|B|$ верхней оценки Фробениуса

$$\rho(|B|) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m+n} r_i(B) = \max\left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant m} r_i(A),\ \max_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(A) \right\}, \tag{2.10}$$

хуже, чем оценка (2.2). Далее, поскольку матрица $|B|$ симметрична, верхняя оценка Островского

$$\rho(|B|) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m+n} \left\{ r_i(B)^{\alpha}\ c_i(B)^{1-\alpha} \right\}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

совпадает с (2.10). Наконец, из структурной симметрии матрицы $|B|$ следует (см. [3, замечание 2.2]), что оценка

$$\rho(|B|) \leqslant \max_{i,j:\, b_{ij}\neq 0} \{r_i(B)\, r_j(B)\}^{1/2},$$

даваемая теоремой 1.1, совпадает с контурной оценкой (см. [1] или [3, следствие 2.2])

$$\rho(|B|) \leqslant \max_{\gamma\in\mathfrak{C}(B)} \left\{ \prod_{i\in\bar\gamma} r_i(B) \right\}^{1/|\gamma|}$$

(где $\mathfrak{C}(B)$ – множество простых контуров в ориентированном графе матрицы B, $\bar\gamma$ – носитель γ, и $|\gamma|$ – это длина γ), так же как и с соответствующими верхними оценками для $\rho(|B|)$, зависящими от путей, которые были предложены в [2].

§3. Нижние оценки

В этом параграфе будут предложены улучшенные варианты следующих нижних оценок для наименьшего сингулярного значения квадратной матрицы.

Теорема 3.1 [6, теорема 3]**.** *Пусть* $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 2$. *Тогда*

$$\sigma_n(A) \geqslant \frac{1}{2} \min_{\substack{1\leqslant i,\, j\leqslant n\\ i\neq j}} \left\{ \operatorname{Re} a_{ii}+\operatorname{Re} a_{jj} - \sqrt{(\operatorname{Re} a_{ii}-\operatorname{Re} a_{jj})^2+4r_i'(H(A))r_j'(H(A))} \right\}. \tag{3.1}$$

Здесь и ниже

$$H(A)=(A+A^*)/2$$

– это эрмитова часть матрицы A.

Теорема 3.2 [6, следствие 1]**.** *Пусть* $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 2$. *Тогда*

$$\sigma_n(A) \geqslant \frac{1}{2} \min_{\substack{1\leqslant i,\, j\leqslant n\\ i\neq j}} \left\{ |a_{ii}|+|a_{jj}| - \sqrt{(|a_{ii}|-|a_{jj}|)^2+\left[r_i'(A)+c_i'(A)\right]\left[r_j'(A)+c_j'(A)\right]} \right\}. \tag{3.2}$$

Также мы обобщим предложенные оценки на случай прямоугольных матриц и представим нижние оценки для всех сингулярных значений.

Следующая лемма вытекает из теоремы 1.2.

Лемма 3.1. *Пусть* $H = (h_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *– эрмитова матрица. Определим величины*[1]

$$\alpha(H) = \frac{1}{2} \min_{i\neq j:h_{ij}\neq 0} \left\{ h_{ii} + h_{jj} - \sqrt{(h_{ii} - h_{jj})^2 + 4r_i'(H)r_j'(H)} \right\}, \quad (3.3)$$

$$\beta(H) = \min_{i:\, r_i'(H)=0} h_{ii}. \quad (3.4)$$

Тогда

$$\text{либо} \quad \lambda_n(H) = \beta(H), \quad \text{либо} \quad \lambda_n(H) \geqslant \alpha(H). \quad (3.5)$$

Доказательство. Применяя теорему 1.2 к эрмитовой матрице H, собственные значения которой вещественны, и используя очевидное неравенство

$$\lambda_n(H) \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} h_{ii},$$

мы приходим к заключению, что либо

$$\lambda_n(H) = \beta(H),$$

либо при некоторых i и j, $i \neq j$, таких что $h_{ij} \neq 0$, справедливо неравенство

$$(h_{ii} - \lambda_n(H))(h_{jj} - \lambda_n(H)) \leqslant r_i'(H)\, r_j'(H).$$

В последнем случае легко видеть, что $\lambda_n(H)$ удовлетворяет квадратичному неравенству

$$\lambda_n(H)^2 - \lambda_n(H)(h_{ii} + h_{jj}) + h_{ii}\, h_{jj} - r_i'(H)r_j'(H) \leqslant 0,$$

из которого немедленно следует, что $\lambda_n(H) \geqslant \alpha(H)$. □

[1] Мы постулируем, что минимум по пустому множеству равен $+\infty$.

Следствие 3.1. *Пусть* $H = (h_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *– эрмитова матрица. Тогда*

$$\lambda_n(H) \geqslant \min\left\{\alpha(H),\ \min_{1\leqslant i\leqslant n} h_{ii}\right\}.$$

Доказательство. Сперва, воспользовавшись леммой 3.1, мы покажем, что

$$\lambda_n(H) \geqslant \min\{\alpha(H),\ \beta(H)\}. \tag{3.6}$$

Действительно, если $\alpha(H) \geqslant \beta(H)$, то либо

$$\lambda_n(H) = \beta(H) = \min\{\alpha(H),\ \beta(H)\},$$

либо

$$\lambda_n(H) \geqslant \alpha(H) \geqslant \beta(H) = \min\{\alpha(H),\ \beta(H)\}.$$

В противном случае, если $\alpha(H) < \beta(H)$, то либо

$$\lambda_n(H) = \beta(H) > \alpha(H) = \min\{\alpha(H),\ \beta(H)\},$$

либо

$$\lambda_n(H) \geqslant \alpha(H) = \min\{\alpha(H),\ \beta(H)\}.$$

Таким образом, неравенство (3.6) установлено.

Заметим теперь, что, в силу (3.3),

$$\alpha(H) \leqslant \min_{i:\, r_i'(H)\neq 0} h_{ii}. \tag{3.7}$$

Следовательно, если $\alpha(H) \leqslant \beta(H) = \min_{i:\, r_i'(H)=0} h_{ii}$, то по (3.7) мы также имеем

$$\alpha(H) \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} h_{ii},$$

и из неравенства (3.6) следует, что

$$\lambda_n(H) \geqslant \alpha(H) = \min\{\alpha(H),\ \min_{1\leqslant i\leqslant n} h_{ii}\}.$$

В противном случае, если $\alpha(H) > \beta(H)$, то по (3.6) мы имеем

$$\lambda_n(H) \geqslant \beta(H) \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} h_{ii} = \min\{\alpha(H),\ \min_{1\leqslant i\leqslant n} h_{ii}\},$$

что и завершает доказательство следствия 3.1. $\square$

Следующие свойства собственных значений эрмитовой матрицы (неравенства Коши) хорошо известны.

Лемма 3.2 (см., напр., [7, II.4.4.7]). *Пусть $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – эрмитова матрица и пусть $H_{[k]}$ – произвольная главная подматрица порядка k, $1 \leqslant k < n$, матрицы H. Тогда*

$$\lambda_i(H) \geqslant \lambda_i(H_{[k]}), \qquad i = 1, \ldots, k,$$

и, в частности,

$$\lambda_k(H) \geqslant \lambda_k(H_{[k]}).$$

Теперь определим последовательность вложенных главных подматриц эрмитовой матриц $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ следующим образом. Через $H' = (h'_{ij})$ обозначим подматрицу, полученную из матрицы H удалением произвольной строки и одноименного столбца. Очевидно,

$$\min\{\alpha(H), \min_{1\leqslant i\leqslant n} h_{ii}\} \leqslant \min\{\alpha(H'), \min_{1\leqslant i\leqslant n} h'_{ii}\}. \tag{3.8}$$

Положим

$$H^{[n]} = H; \qquad H^{[k]} = \left(H^{[k+1]}\right)', \qquad k = n-1, \ldots, 1. \tag{3.9}$$

В этих обозначениях следствие 3.1 и лемма 3.2 немедленно дают нам следующие нижние оценки для собственных значений эрмитовой матрицы.

Теорема 3.3. *Пусть $H = (h_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – эрмитова матрица и пусть последовательность $H^{[k]} = \{h^{[k]}_{ij}\}$ ее главных $k \times k$ подматриц определена в соответствии с (3.9). Тогда*

$$\lambda_k(H) \geqslant \lambda_k(H^{[k]}) \geqslant \min\left\{\alpha(H^{[k]}), \min_{i\in \mathrm{K}}\{h^{[k]}_{ii}\}\right\}, \qquad k = n, n-1, \ldots, 1, \tag{3.10}$$

где K – это множество индексов, специфицирующих подматрицу $H^{[k]}$, т.е. $H^{[k]} = H[\mathrm{K}]$.

Замечание 3.1. Неравенство (3.8) очевидно обеспечивает, что правые части соотношений (3.10) образуют неубывающую последовательность нижних оценок для собственных значений $\lambda_n(H), \ldots, \lambda_1(H)$ соответственно.

Следующая хорошо известная лемма позволяет перенести оценки теоремы 3.3 с собственных значений эрмитовой матрицы на сингулярные значения произвольной квадратной матрицы.

Лемма 3.3 (см., напр., [5, следствие 3.1.5]). *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. *Тогда*

$$\sigma_i(A) \geqslant \lambda_i(H(A)), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Из леммы 3.3 и теоремы 3.3 немедленно вытекает следующий результат, обобщающий и уточняющий теорему 3.1.

Теорема 3.4. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. *Тогда*

$$\sigma_k(A) \geqslant \min\left\{\alpha(H(A^{[k]})),\ \min_{i\in \mathrm{K}} \operatorname{Re} a_{ii}\right\}, \qquad k = n, \ldots, 1,$$

где $A^{[k]}$, $k = n, \ldots, 1$, *– это произвольная последовательность вложенных главных* $k \times k$ *подматриц матрицы* A; K *– множество индексов, специфицирующих подматрицу* $A^{[k]}$, *т.е.* $A^{[k]} = A[\mathrm{K}]$, *и, в соответствии с* (3.3),

$$\alpha(H(A^{[k]})) = \frac{1}{2} \min_{\substack{i\neq j:\ i,j\in \mathrm{K} \\ a_{ij}+\overline{a_{ji}}\neq 0}}$$

$$\left\{\operatorname{Re} a_{ii} + \operatorname{Re} a_{jj} - \sqrt{(\operatorname{Re} a_{ii} - \operatorname{Re} a_{jj})^2 + 4 r_i'\left(H(A^{[k]})\right)\ r_j'\left(H(A^{[k]})\right)}\right\}.$$

Далее, следуя подходу, использованному при доказательстве следствия 3.7 в [5], от заданной матрицы A перейдем к матрице $B = SA = (b_{ij})$, где

$$S = \operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_n), \quad s_i = \begin{cases} |a_{ii}|/a_{ii}, & \text{если}\ \ a_{ii} \neq 0, \\ 1, & \text{если}\ \ a_{ii} = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Ясно, что

$$\{H(B)\}_{ii} = |a_{ii}|, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Поскольку, с другой стороны, сингулярные значения матрицы B совпадают с сингулярными значениями A, то, применяя теорему 3.4 к матрице B, мы получаем следующий результат.

Следствие 3.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *пусть унитарная диагональная матрица* S *определена, как в* (3.11), *и пусть* $(SA)^{[k]}$, $k = n, \ldots, 1$, *– произвольная последовательность вложенных главных* $k \times k$ *подматриц матрицы* SA. *Тогда*

$$\sigma_k(A) \geqslant \min\left\{\frac{1}{2} \min_{\substack{i\neq j:\ i,j\in \mathrm{K}\\ \overline{\{SA\}_{ij}+\{SA\}_{ji}\neq 0}}} \left\{|a_{ii}|+|a_{jj}|\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{(|a_{ii}|-|a_{jj}|)^2+4r'_i(H(SA)^{[k]})\, r'_j(H(SA)^{[k]})}\right\},\ \min_{i\in\mathrm{K}}|a_{ii}|\right\},$$

$$k=n,\ldots,1,$$

где $(SA)^{[k]}=(SA)[\mathrm{K}]$.

В силу неравенства треугольника и унитарности матрицы S, мы имеем

$$r'_i(H(SA)^{[k]}) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{j\in\mathrm{K}\\ j\neq i}} |s_i\, a_{ij} + \overline{s_j}\, \overline{a_{ji}}| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{\substack{j\in\mathrm{K}\\ j\neq i}} (|a_{ij}|+|a_{ji}|)$$

$$= \frac{1}{2}\left[r'_i(A^{[k]}) + c'_i(A^{[k]})\right], \quad i\in\mathrm{K}, \tag{3.12}$$

где $A^{[k]}=A[\mathrm{K}]$. С учетом (3.12) из следствия 3.2 легко выводятся следующие упрощенные оценки для сингулярных значений матрицы A, зависящие лишь от модулей ее диагональных элементов и ее строчных и столбцовых сумм и улучшающие (при $k=n$) оценку (3.2).

Следствие 3.3. *Пусть* $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 1$, *и пусть* $A^{[k]}$, $k=n,\ldots,1$, – *произвольная последовательность вложенных главных* $k\times k$ *подматриц матрицы* A. *Тогда*

$$\sigma_k(A) \geqslant \min\left\{\frac{1}{2} \min_{\substack{i\neq j:\ i,j\in \mathrm{K}\\ |a_{ij}|+|a_{ji}|\neq 0}} \left\{|a_{ii}|+|a_{jj}|\right.\right.$$

$$\left.-\sqrt{(|a_{ii}|-|a_{jj}|)^2+\left[r'_i(A^{[k]})+c'_i(A^{[k]})\right]\left[r'_j(A^{[k]})+c'_j(A^{[k]})\right]}\right\},$$

$$\left.\min_{i\in\mathrm{K}}|a_{ii}|\right\}, \qquad k=n,\ldots,1, \tag{3.13}$$

где $A^{[k]}=A[\mathrm{K}]$.

Наконец, рассмотрим случай прямоугольной матрицы $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $m,n\geqslant 1$. Обозначим $q=\min\{m,\ n\}$ и положим

$$\hat{A} = \{a_{ij}\}_{1\leqslant i,\, j\leqslant q}. \tag{3.14}$$

Тогда, ввиду леммы 2.2, мы имеем

$$\sigma_i(A) \geqslant \sigma_i(\hat{A}), \qquad i = 1, \dots, q. \tag{3.15}$$

Применив следствие 3.3 к $q \times q$ матрице $\hat{A}$ и воспользовавшись неравенствами (3.15), мы приходим к следующему окончательному результату.

Теорема 3.5. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m, n \geqslant 1$, *и пусть* $q = \min\{m,\ n\}$. *Тогда для произвольной последовательности вложенных главных* $k \times k$ *подматриц* $A^{[k]}$, $k = n, \dots, 1$, $q \times q$ *матрицы* $\hat{A}$, *определенной в* (3.14), *справедливы неравенства*

$$\sigma_k(A) \geqslant \min\Bigg\{\frac{1}{2} \min_{\substack{i\neq j:\ i,j\in \mathrm{K}\\ |a_{ij}|+|a_{ji}|\neq 0}} \Bigg\{|a_{ii}| + |a_{jj}| - \Bigg[(|a_{ii}| - |a_{jj}|)^2 + \sum_{\substack{s\in\mathrm{K}\\ s\neq i}}(|a_{is}| + |a_{si}|) \sum_{\substack{r\in\mathrm{K}\\ r\neq j}}(|a_{jr}| + |a_{rj}|)\Bigg]^{1/2}\Bigg\},\ \min_{i\in\mathrm{K}} |a_{ii}|\Bigg\},$$

$$k = n, \dots, 1, \tag{3.16}$$

где $A[\mathrm{K}] = A^{[k]}$.

Замечание 3.2. Поскольку сингулярные значения любой матрицы инвариантны относительно перестановок ее строк и столбцов, сингулярные значения $m \times n$ матрицы A можно ограничить снизу, применив оценки (3.16) к произвольной матрице вида PAQ, где P и Q – это матрицы-перестановки размеров $m \times m$ и $n \times n$ соответственно. Отсюда, в частности, следует, что при оценивании сингулярных значений главная диагональ матрицы теряет ту специфическую роль, которую она играет в оценках типа Гершгорина для собственных значений.

Литература

1. Ю. А. Альпин, *Границы для перроновского корня неотрицательной матрицы, учитывающие свойства ее графа.* — Мат. заметки, **58** (1995), 635–637.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **284** (2002), 77–122.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **296** (2003), 60–88.

4. Л. Ю. Колотилина, *Проблема вырожденности/невырожденности для матриц, удовлетворяющих условиям диагонального преобладания, формулируемым в терминах ориентированных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **309** (2004), 40–83.
5. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis.* — Cambridge University Press (1991).
6. C. R. Johnson, T. Szulc, *Further lower bounds for the smallest singular value.* — Linear Algebra Appl., **272** (1998), 169–179.
7. M. Marcus, H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities.* — Allyn and Bacon, Inc., Boston (1964).

Kolotilina L. Yu. Bounds for the singular values of a matrix involving its sparsity pattern.

The paper presents new upper and lower bounds for the singular values of a rectangular matrix explicitly involving the matrix sparsity pattern. These bounds are based on an upper bound for the Perron root of a nonnegative matrix and on the sparsity-dependent version of the Ostrowski–Brauer theorem on eigenvalue inclusion regions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 9 февраля 2005 г.