Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 323, 2005 г.

Л. Ю. Колотилина

ПСЕВДОБЛОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДИАГОНАЛЬНОГО ПРЕОБЛАДАНИЯ

§1. Введение

Эта работа является логическим продолжением статьи [2], в которой рассматривалась проблема вырожденности/невырожденности для матриц с диагональным преобладанием порядка k, а также для матриц с контурным диагональным преобладанием (определения см. в §2). В данной работе мы используем некоторые результаты, полученные в [2], и обобщаем их на случай блочных матриц. Точнее говоря, вводятся понятия так называемого псевдоблочного диагонального преобладания порядка k и псевдоблочного контурного диагонального преобладания, которые обобщают соответствующие точечные понятия. Для матриц, удовлетворяющих этим псевдоблочным условиям, исследуется проблема вырожденности/невырожденности.

В частности, получен псевдоблочный аналог обобщенной теоремы Островского–Брауэра (см. [10] и [2]) для блочной $N \times N$ матрицы, см., следствия 2.4 и 2.5 в §2. Как будет показано, в случае блочной 2×2 матрицы ($N = 2$) из последних утверждений вытекают результаты работ [5, 6, 8].

Статья построена следующим образом. В оставшейся части введения мы приводим список используемых обозначений и напоминаем некоторые определения и результаты, которые потребуются в дальнейшем. В §2 представлены новые результаты для матриц, обладающих псевдоблочным диагональным преобладанием порядка k и псевдоблочным контурным диагональным преобладанием. В §3 подробно рассматривается случай блочных 2×2 матриц. В заключительном §4 приведены некоторые области локализации собственных значений блочных матриц, возникающие из псевдоблочных условий невырожденности, представленных в §§2 и 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 03-01-00349 и НШ-2268.2003.1.

В статье используются следующие обозначения и определения.

• Неравенства между матрицами и векторами понимаются покомпонентно.

• $n \geqslant 1$ – натуральное число, и $\langle n \rangle = \{1, \ldots, n\}$.

• I_n – единичная матрица порядка n.

• $e = [1, \ldots, 1]^T$ – единичный вектор.

• Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, тогда

$$D_A = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$$

– это (точечная) диагональная часть матрицы A. Если же матрица A представлена в блочном виде как $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N$, где $1 \leqslant N \leqslant n$, то

$$\Delta_A = \operatorname{Diag}(A_{11}, \ldots, A_{NN})$$

– это соответствующая блочно диагональная часть A.

• Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $J \subseteq \langle n \rangle$, то $A[J] = (a_{ij})_{i,j \in J}$ – это главная подматрица A, определяемая индексным подмножеством J.

• Если $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, то $\rho(A)$ – спектральный радиус A, т.е. максимум модулей собственных значений A.

• Матрица сравнения $\mathfrak{M}(A) = (m_{ij})$ для A определяется следующим стандартным образом:

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = 1, \ldots, n, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases}$$

• Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, называется *Z-матрицей*, если

$$a_{ij} \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

• Матрица $A = tI_n - B$, $t > 0$, $B \geqslant 0$, называется *M-матрицей* (*невырожденной M-матрицей*), если

$$\rho(B) \leqslant t \qquad\qquad (\rho(B) < t).$$

• Матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, называется *H-матрицей* (*невырожденной H-матрицей*), если $\mathfrak{M}(A)$ является M-матрицей (невырожденной M-матрицей).

• Матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, имеет *слабое обобщенное диагональное преобладание* (*строгое обобщенное диагональное преобладание*) *по строкам*, если для некоторого положительного вектора

$u = (u_i) \in \mathbb{C}^n$ справедливы (строгие) неравенства

$$|a_{ii}|\, u_i \geqslant \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|\, u_j, \qquad i = 1,\dots,n. \tag{1.1}$$

• Для матрицы $A = (a_{ij}) = (A_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, мы вводим в рассмотрение следующие строчные и столбцовые суммы:

$$\begin{array}{rcl} r_i(A) &=& \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \\ r_i'(A) &=& r_i(A) - |a_{ii}|, \\ \tilde r_i(A) &=& r_i(A - \Delta_A), \end{array} \qquad i = 1,\dots,n,$$

и

$$\begin{array}{rcl} c_j(A) &=& \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \\ c_j'(A) &=& c_j(A) - |a_{jj}|, \\ \tilde c_j(A) &=& c_j(A - \Delta_A), \end{array} \qquad i = 1,\dots,n.$$

• Через G_A мы обозначаем ориентированный граф матрицы A с множеством вершин $\langle n\rangle = \{1,\dots,n\}$ и множеством дуг

$$E_A = \{(i,j):\ i,j \in \langle n\rangle \quad \& \quad a_{ij} \neq 0\}.$$

• Через

$$\mathfrak{P}_k(A) = \{(i_1,\dots,i_{k+1}):\ (i_j, i_{j+1}) \in E_A, \quad j = 1,\dots,k\}, \quad k \geqslant 1,$$

обозначается множество всех путей длины k в графе G_A. При $k = 0$ мы полагаем

$$\mathfrak{P}_0(A) = \langle n\rangle.$$

• Пусть $\pi \in \mathfrak{P}_k(A)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и $\delta_i > 0$, $i = 1,\dots,n$, – произвольные положительные числа. *Вес* пути π определяется следующим образом:

$$\begin{gathered} w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi) = \left[\delta_{i_1}^{\alpha}\ \left(\prod_{j=2}^{k} \delta_{i_j}\right)\ \delta_{i_{k+1}}^{1-\alpha}\right]^{1/k}, \qquad \text{если} \quad k \geqslant 1, \\ w_{\alpha,\,\delta_i}(\pi) = \delta_i, \qquad \text{если} \quad k = 0,\ \pi = i. \end{gathered} \tag{1.2}$$

• Через $\mathfrak{C}(A)$ обозначается множество всех простых контуров в G_A. Напомним, что простой *контур* длины k в G_A – это упорядоченная последовательность $\gamma = (i_1,\dots,i_k,i_{k+1})$, где $i_1,\dots,i_k \in \langle n\rangle$ все различны, $i_{k+1} = i_1$, и для каждого $j = 1,\dots,k$ в G_A существует дуга из i_j в i_{j+1}. Множество $\{i_1,\dots,i_k\}$ называется *носителем*

γ и обозначается через $\bar{\gamma}$. Длина контура γ обозначается через $|\gamma|$; $|\gamma| = k$.

• Если $\gamma = (i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}) \in \mathfrak{C}(A)$ – простой контур, то мы полагаем

$$\Pi_\gamma(A) = a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{k-1} i_k}\, a_{i_k i_{k+1}} = \prod_{j=1}^{|\gamma|} a_{i_j i_{j+1}}.$$

Заметим, что, в соответствии с (1.2), для любого контура $\gamma \in \mathfrak{C}(A)$, $|\gamma| \geqslant 1$, мы имеем

$$w_{\alpha,\,\delta_i}(\gamma) = \left(\prod_{i\in\bar{\gamma}} \delta_i\right)^{1/|\gamma|}, \tag{1.3}$$

так что вес контура не зависит от α.

В §2 нам понадобятся следующие стандартные характеризации H-матриц, которые нетрудно получить, например, воспользовавшись теоремами 6.2.3 и 6.4.6 из [3].

Лемма 1.1. *Пусть $A = D_A - R \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. Тогда A является H-матрицей (невырожденной H-матрицей) в том и только том случае, когда справедливо одно из следующих утверждений:*

(i) *матрица A обладает слабым обобщенным диагональным преобладанием (строгим обобщенным диагональным преобладанием) по строкам;*

(ii) *если D_A невырождена, то*

$$\rho(|D_A^{-1}R|) \leqslant 1 \qquad (\rho(|D_A^{-1}R|) < 1).$$

Следующая теорема дает решение проблемы вырожденности/невырожденности для неприводимых матриц, обладающих слабым обобщенным диагональным преобладанием, т.е. для неприводимых H-матриц.

Теорема 1.1 [2, теорема 3.1] (см. также [9, теорема 2.4]). *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, неприводима и удовлетворяет неравенствам (1.1) для некоторого положительного вектора $u = (u_i)$. Тогда A вырождена в том и только том случае, когда все неравенства в (1.1) являются равенствами, и выполнено условие*

$$(-1)^{|\gamma|}\, \Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i\in\bar{\gamma}} a_{ii} > 0 \qquad \text{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A). \tag{1.4}$$

Замечание 1.1. Заметим, что для неприводимой матрицы $A = D_A - R$, удовлетворяющей условию (1.1), матрица D_A необходимо является невырожденной, а условие (1.4) равносильно (см. [9] или [2]) существованию унитарной диагональной матрицы D такой, что

$$D^* \; D_A^{-1} A \; D = \mathfrak{M}(D_A^{-1} A),$$

откуда, в частности, следует, что A вырождена тогда и только тогда, когда вырождена ее матрица сравнения $\mathfrak{M}(A) = |D_A| - |R|$.

§2. Проблема вырожденности/невырожденности для матриц, удовлетворяющих псевдоблочным условиям диагонального преобладания

В работе [2] было введено понятие так называемого диагонального преобладания порядка k, которое было использовано при рассмотрении проблемы вырожденности/невырожденности для матриц. Подход, использованный в упомянутой работе, основывался на рассмотрении расщепления Якоби $A = D_A - R$. В этом параграфе мы используем некоторые из результатов статьи [2] для решения проблемы вырожденности/невырожденности для блочных матриц, удовлетворяющих некоторым псевдоблочным условиям диагонального преобладания. Для этого нам понадобится соответствующее блочное расщепление Якоби $A = \Delta_A - B$.

Напомним, что, в соответствии с определением 4.1 работы [2], матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, обладает *слабым (строгим) диагональным преобладанием порядка k по строкам с весом α*, где $k \geqslant 0$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, если для всех путей $\pi \in \mathfrak{P}_k(A - D_A)$ справедливо (строгое) неравенство

$$w_{\alpha,\, r_i'(A)}(\pi) \leqslant w_{\alpha,\, |a_{ii}|}(\pi). \tag{2.1}$$

Замечание 2.1. Если $A = D_A - R$, матрица D_A невырождена, и при некотором $k \geqslant 1$ $\mathfrak{P}_k(R) = \mathfrak{P}_k(|D_A^{-1} R|) = \varnothing$, то, как было показано в замечании 4.1 работы [2], все собственные значения матрицы $|D_A^{-1} R|$ равны нулю, так что $\rho(|D_A^{-1} R|) = 0$, и A является невырожденной H-матрицей по лемме 1.1.

Далее, в соответствии с работой [4] (см. также определение 6.1 в работе [2]), матрица $A = (a_{ij})$ обладает *слабым (строгим) контурным диагональным преобладанием по строкам*, если для любого простого контура $\gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A)$ справедливо (строгое) неравенство

$$w_{\alpha,\, r'_i(A)}(\gamma) = \prod_{i \in \bar{\gamma}} r'_i(A) \leqslant \prod_{i \in \bar{\gamma}} |a_{ii}| = w_{\alpha,\, |a_{ii}|}(\gamma). \tag{2.2}$$

Замечание 2.2. Если $\mathfrak{C}(A - D_A) = \varnothing$, то (см., напр., [7, теорема 6.1]) матрица A перестановочно подобна некоторой верхней треугольной матрице, так что A невырождена тогда и только тогда, когда невырождена ее диагональная часть D_A. Заметим также, что невырожденная треугольная матрица необходимо является невырожденной H-матрицей.

Понятия диагонального преобладания порядка k и контурного диагонального преобладания по столбцам вводятся аналогично, но с заменой строчных сумм $r'_i(A)$ на столбцовые суммы $c'_i(A)$.

Напомним также, что, в соответствии с определением 4.2 работы [2], матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, называется *квазинеприводимой*, если любая вершина графа G_A лежит на некотором простом контуре. Очевидно, любая матрица с ненулевыми диагональными элементами квазинеприводима.

В этом параграфе мы воспользуемся следующими двумя теоремами, установленными в работе [2]. Заметим, что их варианты, приводимые ниже, несколько отличаются от оригинальных формулировок. Точнее говоря, дополнительно указывается, что в условиях обеих теорем рассматриваемая матрица A является H-матрицей. Действительно, в работе [2] было показано, что $\rho(|D_A^{-1}R|) \leqslant 1$, но тогда, ввиду леммы 1.1, A необходимо является H-матрицей.

Теорема 2.1 [2, теорема 4.2]**.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – квазинеприводимая матрица, обладающая слабым диагональным преобладанием порядка k по строкам с весом α, где $k \geqslant 0$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда A является H-матрицей, и справедливы следующие утверждения:*

(i) *если либо $\mathfrak{P}_k(A - D_A) = \varnothing$, либо все неравенства в (2.1) выполняются строго, то матрица A невырождена;*

(ii) *если матрица A неприводима, то она является вырожденной тогда и только тогда, когда $n \geqslant 2$, все неравенства в (2.1) –*

равенства, и выполнено условие

$$(-1)^{|\gamma|}\ \Pi_\gamma(A) \Bigg/ \prod_{i\in\bar\gamma} a_{ii} > 0 \quad \text{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A-D_A). \quad (2.3)$$

Теорема 2.2 [2, теорема 6.4]**.** *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, квазинеприводима и обладает слабым контурным диагональным преобладанием по строкам. Тогда A является H-матрицей, и справедливы следующие утверждения:*

(i) *если либо $\mathfrak{C}(A - D_A) = \varnothing$, либо все неравенства в (2.2) являются строгими, то матрица A невырождена;*

(ii) *если матрица A неприводима, то она является вырожденной тогда и только тогда, когда $n \geqslant 2$, все неравенства в (2.2) – равенства, и выполнено условие (2.3).*

Теперь предположим, что $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N = \Delta_A - B$ и что блочно диагональная часть Δ_A матрицы A имеет строгое диагональное преобладание по строкам, т.е. вектор

$$p = (p_i) = \mathfrak{M}(\Delta_A)\, e \qquad (2.4)$$

положителен. В этом предположении $\mathfrak{M}(\Delta_A)$ является невырожденной M-матрицей, а Δ_A – невырожденная H-матрица.

Введем обозначение

$$D_p = \operatorname{diag}(p_1, \ldots, p_n)$$

и рассмотрим матрицу

$$C = D_p^{-1}\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}D_p = I_n - D_p^{-1}|B|\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}D_p. \qquad (2.5)$$

Очевидно, что

$$\Delta_C = D_C = I_n, \qquad (2.6)$$

и C – квазинеприводимая Z-матрица.

При доказательстве псевдоблочных обобщений теорем 2.1 и 2.2 мы будем использовать следующие простые результаты, устанавливающие некоторые взаимозависимости между свойствами матриц A и C.

Лемма 2.1. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{N} = \Delta_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant N \geqslant 1$, *и пусть*

$$p = \mathfrak{M}(\Delta_A)\, e > 0. \tag{2.7}$$

Пусть матрица C *определена с помощью соотношения* (2.5) *и пусть* $u = (u_i)_{i=1}^{n}$ *– положительный вектор. Положим*

$$v = \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} D_p u. \tag{2.8}$$

Если матрица C *имеет обобщенное диагональное преобладание с вектором* u, *т.е.*

$$\sum_{j\neq i} |c_{ij}|\, u_j \leqslant |c_{ii}|\, u_i = u_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2.9}$$

то матрица A *имеет обобщенное диагональное преобладание с вектором* v, *т.е.*

$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}|\, v_j \leqslant |a_{ii}|\, v_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Кроме того, некоторое неравенство в (2.9) *выполняется строго тогда и только тогда, когда соответствующее неравенство в* (2.10) *является строгим.*

Доказательство. Неравенства (2.9) можно записать в виде

$$D_p^{-1} |B|\, \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} D_p u \leqslant u$$

или, с учетом (2.8), в виде

$$|B| v \leqslant D_p u = \mathfrak{M}(\Delta_A) v.$$

Но последнее векторное неравенство равносильно неравенствам (2.10). Тем самым доказано, что из (2.9) следует (2.10). Оставшееся утверждение теперь уже очевидно. □

Следующий результат тривиальным образом вытекает из лемм 2.1 и 1.1 и теоремы 1.1.

Следствие 2.1. *Если в условиях леммы* 2.1 *либо все неравенства в* (2.9) *являются строгими, либо матрица* A *неприводима и по крайней мере одно из неравенств в* (2.9) *является строгим, то* A *– невырожденная* H*-матрица.*

Лемма 2.2. *Пусть матрица* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N = \Delta_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant N \geqslant 2$, *является вырожденной и неприводимой, пусть*

$$p = \mathfrak{M}(\Delta_A)\, e > 0$$

и пусть матрица C *определена в соответствии с* (2.5)*. Если* C *является* M*-матрицей, то она неприводима.*

Доказательство. Поскольку C – M-матрица, из утверждения (i) леммы 1.1 следует, что найдется положительный вектор u такой, что

$$Cu \geqslant 0.$$

Если бы имело место строгое неравенство $(Cu)_i > 0$, то, по следствию 2.1, матрица A была бы невырожденной. Следовательно,

$$Cu = 0, \tag{2.11}$$

так что C – вырожденная M-матрица. Допустим, что C приводима. Тогда существует $n \times n$ матрица-перестановка P такая, что матрица $G = P^TCP$ является блочной верхней треугольной. Представим G в виде

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix},$$

где G_{22} – блочно диагональная матрица с неприводимыми диагональными блоками. В силу (2.11), для положительного вектора $w = \left[\begin{smallmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \end{smallmatrix}\right] = P^T u \in \mathbb{R}^n$ мы имеем:

$$Gw = \begin{bmatrix} G_{11}w^{(1)} - |G_{12}|\, w^{(2)} \\ G_{22}w^{(2)} \end{bmatrix} = 0.$$

Следовательно,

$$G_{22}w^{(2)} = 0 \tag{2.12}$$

и

$$G_{11}w^{(1)} = |G_{12}|\, w^{(2)}. \tag{2.13}$$

Допустим, что $G_{12} \neq 0$. Тогда, по (2.13), вектор $G_{11}w^{(1)}$ имеет по крайней мере одну положительную компоненту, так что, ввиду (2.12) и (2.13), мы имеем

$$G \begin{bmatrix} (1+\xi)w^{(1)} \\ w^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi G_{11}w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \geqslant 0, \qquad \xi > 0, \tag{2.14}$$

и этот вектор имеет положительную компоненту. Следовательно, матрица C имеет слабое обобщенное диагональное преобладание с положительным вектором $v = (v_i) = P \begin{bmatrix} (1+\xi)w^{(1)} \\ w^{(2)} \end{bmatrix}$, и хотя бы одно из неравенств

$$\sum_{j \neq i} |c_{ij}|\, v_j \leqslant v_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

является строгим. Значит, по следствию 2.1, матрица A невырождена. Полученное противоречие доказывает, что $G_{12} = 0$.

Применив рассуждение по индукции, мы придем к заключению, что

$$G = \mathrm{Diag}(G_1, \ldots, G_s), \tag{2.15}$$

где все блоки G_i, $i = 1, \ldots, s$, неприводимы. Это означает, что матрица C либо неприводима, т.е. $s = 1$, либо разложима, т.е. $s \geqslant 2$. Таким образом, нам остается лишь показать, что C не может быть разложимой.

Равенство (2.11) можно записать в виде

$$D_p^{-1}|B|\, \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} D_p\, u = u. \tag{2.16}$$

Обозначим

$$v = \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} D_p\, u$$

и заметим, что вектор v положителен, поскольку положителен вектор u. Тогда равенство (2.16) равносильно соотношению

$$|B|\, v = \mathfrak{M}(\Delta_A)\, v.$$

Если $A = D_A - R$, то полученное соотношение равносильно равенству

$$|D_A|\, v = |R|\, v$$

и, следовательно, также и равенству

$$|D_A^{-1} R|\, v = v.$$

Последнее же означает, что положительный вектор v является перроновским вектором для матрицы $|D_A^{-1}R|$, которая неприводима, так как A неприводима.

Заметим, что если бы матрица C была разложимой, т.е. в (2.15) мы имели бы $s \geqslant 2$, то для матрицы G нашлись бы по крайней мере два линейно независимых положительных вектора w и

$\tilde{w}$ таких, что $Gw = 0$ и $G\tilde{w} = 0$ (скажем, $w = \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \end{bmatrix}$ и $w = \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 2w^{(2)} \end{bmatrix}$). В этом случае, векторы $v = \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} D_p u$ и $\tilde{v} = \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} D_p \tilde{u}$, где $\tilde{u} = P\tilde{w}$, также были бы линейно независимыми, и мы бы имели

$$|D_A^{-1} R|\, v = v \qquad \text{и} \qquad |D_A^{-1} R|\, \tilde{v} = \tilde{v}.$$

Следовательно, неприводимая неотрицательная матрица $|D_A^{-1} R|$ имела бы два линейно независимых перроновских вектора, что невозможно в силу теории Перрона–Фробениуса (см., напр., [3, теорема 2.13]). Значит, $s = 1$, и матрица C является неприводимой. Лемма доказана. $\square$

Теперь мы готовы представить псевдоблочный аналог теоремы 2.1, сводящийся к ней при $N = n$. Заметим, что в противоположном крайнем случае, когда $N = 1$, предположения приводимой ниже теоремы 2.3 сводятся к наличию строгого диагонального преобладания у самой матрицы A.

Теорема 2.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) = (A_{ij})_{i,j=1}^N = \Delta_A - B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant N \geqslant 1$, *и предположим, что матрица* $\Delta_A = \mathrm{Diag}\,(A_{11}, \ldots, A_{NN})$ *имеет строгое диагональное преобладание по строкам, т.е.*

$$p = (p_i) = \mathfrak{M}(\Delta_A)\, e > 0. \tag{2.17}$$

Пусть $k \geqslant 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *и пусть*

$$\begin{gathered} w_{\alpha,\, \tilde{r}_i(A)}(\pi) \leqslant w_{\alpha,\, p_i}(\pi) \\ \text{для каждого} \quad \pi \in \mathfrak{P}_k(\mathfrak{M}(A)\, \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n). \end{gathered} \tag{2.18}$$

Тогда A является H-матрицей, и справедливы следующие утверждения:

(i) *если* $\mathfrak{P}_k\left(\mathfrak{M}(A)\, \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n\right) = \varnothing$ *или все неравенства в* (2.18) *выполняются строго, то A невырождена;*

(ii) *если A неприводима, то она является вырожденной тогда и только тогда, когда $n \geqslant 2$, матрица $\mathfrak{M}(A)\ \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}$ неприводима, все неравенства в* (2.18) *являются равенствами, и выполнено условие*

$$\begin{gathered} (-1)^{|\gamma|}\, \Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i \in \bar{\gamma}} a_{ii} > 0 \\ \text{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A). \end{gathered} \tag{2.19}$$

Доказательство. Используя обозначения, введенные в §1, а также соотношения (2.6) и (2.17), мы выводим:

$$\begin{aligned} r_i'(C) = \tilde{r}_i(C) &= r_i(C - \Delta_C) = r_i(D_p^{-1}|B|\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}D_p) \\ &= (D_p^{-1}|B|\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}p)_i = (D_p^{-1}|B|e)_i \\ &= \frac{r_i(B)}{p_i} = \frac{\tilde{r}_i(A)}{p_i}, \qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ввиду (2.6) и (2.20), условие, что матрица C имеет слабое диагональное преобладание порядка k по строкам с весом α, можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered} w_{\alpha,\, r_i'(C)}(\pi) = w_{\alpha,\, \frac{\tilde{r}_i(A)}{p_i}}(\pi) \leqslant 1 \\ \text{для каждого} \quad \pi \in \mathfrak{P}_k(\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n). \end{gathered} \tag{2.21}$$

Но условие (2.21), очевидно, равносильно условию (2.18). Итак, условие (2.18) означает, что матрица C имеет слабое диагональное преобладание порядка k по строкам с весом α. Следовательно, в условиях теоремы квазинеприводимая Z-матрица C является M-матрицей по теореме 2.1. В силу леммы 1.1, матрица C имеет слабое обобщенное диагональное преобладание, так что, по лемме 2.1, A имеет слабое обобщенное диагональное преобладание, и лемма 1.1 в применении к матрице A гарантирует, что A является H-матрицей.

Для того, чтобы доказать утверждение (i), заметим, что если $\mathfrak{P}_k(\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n) = \varnothing$, то C – невырожденная M-матрица в силу замечания 2.1. Если же все неравенства в (2.18) являются строгими, то квазинеприводимая Z-матрица C является невырожденной M-матрицей в силу утверждения (i) теоремы 2.1. В обоих случаях C имеет строгое обобщенное диагональное преобладание по лемме 1.1. Следовательно, ввиду следствия 2.1, исходная матрица A является невырожденной H-матрицей, и утверждение (i) доказано.

(ii) *Достаточность.* Предположим, что матрица A неприводима и что выполнены все условия утверждения (ii). Очевидно, что матрица C, будучи Z-матрицей, удовлетворяет условию

$$(-1)^{|\gamma|}\, \Pi_\gamma(C) \Big/ \prod_{i \in \bar{\gamma}} c_{ii} > 0 \quad \text{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(C - I_n).$$

Далее, поскольку C неприводима, $n \geqslant 2$, и все неравенства в (2.18) и (2.21) являются равенствами, матрица C вырождена в силу утверждения (ii) теоремы 2.1. Следовательно, матрица $\mathfrak{M}(A)$ также является вырожденной. Но, поскольку матрица A неприводима и удовлетворяет условию (2.19), то из вырожденности матрицы $\mathfrak{M}(A)$ следует вырожденность A, см. замечание 1.1.

Необходимость. Пусть матрица A неприводима и вырождена. Тогда A является вырожденной H-матрицей. Поскольку A – H-матрица, из леммы 1.1 следует, что существует положительный вектор $u = (u_i)$ такой, что

$$|a_{ii}|\, u_i \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\, u_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Поскольку A вырождена, из теоремы 1.1 следует, что все последние неравенства в действительность являются равенствами, а значит и $\mathfrak{M}(A)$, и C обе вырождены. Из теоремы 1.1 также следует, что выполнено условие (2.19). В силу леммы 2.2, вырожденная M-матрица C неприводима. Поскольку она удовлетворяет неравенствам (2.21), применимо утверждение (ii) теоремы 2.1, и мы можем заключить, что $n \geqslant 2$, и все неравенства в (2.21) (а значит также и в (2.18)) являются равенствами.

Тем самым теорема 2.3 доказана полностью. $\square$

Замечание 2.3. Ввиду (1.2), при $k = 0$ условие (2.18) сводится к неравенствам

$$\tilde{r}_i(A) \leqslant p_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

означающим, что матрица A имеет слабое диагональное преобладание. Если все эти неравенства являются строгими, то вектор p автоматически положителен. Если же матрица A неприводима, то применима теорема 1.1, а значит утверждение (ii) теоремы 2.3 верно не зависимо от положительности вектора p. Поэтому при $k = 0$ предположение о том, что матрица Δ_A имеет строгое диагональное преобладание оказывается излишним.

Из утверждения (ii) теоремы 2.3 вытекают следующие полезные достаточные условия невырожденности для неприводимых матриц со слабым псевдоблочным диагональным преобладанием порядка k.

Следствие 2.2. *Если в условиях теоремы* 2.3 *матрица* A *неприводима и*

- *либо хотя бы одно из неравенств в* (2.18) *является строгим,*
- *либо матрица* C *приводима,*

то обе матрицы A *и* C *невырождены.*

Замечание 2.4. Если $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{N}$ – неприводимая M-матрица и $\Delta_A\, e > 0$, то матрица $A\Delta_A^{-1}$ действительно может оказаться приводимой. Это так, например, в следующем случае. Пусть

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ \hline -1 & -1/4 & 1 \end{array}\right]$$

и

$$\Delta_A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Тогда матрица

$$A\Delta_A^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ \hline -1/2 & -3/4 & 1 \end{array}\right]$$

является приводимой. Заметим, что $p = \mathfrak{M}(\Delta_A)\, e = e$, $|A - \Delta_A|\, e = [0 \quad 4/5 \quad 5/4]^T$, и A удовлетворяет условию (2.18) при $\alpha = 1/2$ и $k = 1$:

$$p_1\, p_3 > \tilde{r}_1(A)\, \tilde{r}_3(A), \qquad p_2\, p_3 = \tilde{r}_2(A)\, \tilde{r}_3(A).$$

Следовательно, невырожденность матрицы A вытекает как из того факта, что неравенство в (2.18), соответствующее пути $\pi = (1, 3)$, является строгим, так и из приводимости матрицы $A\Delta_A^{-1}$.

Заметим, что условие (2.18) должно выполняться для всех путей π фиксированной длины в графе матрицы $\mathfrak{M}(A)\, \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n$, которая априори неизвестна. Также неизвестно, является ли эта последняя матрица приводимой. Однако, $(\mathfrak{M}(A)\, \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n)_{ii} = 0$, $i = 1, \ldots, N$, и если $A_{ij} = 0$, $i \neq j$, то блок $(\mathfrak{M}(A)\, \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n)_{ij} = -|A_{ij}|\, \mathfrak{M}(A_{jj})^{-1}$ также является нулевым. Следовательно, если мы определим $n \times n$ матрицу $S_A = (s_{ij})_{i,j=1}^n = (S_{ij})_{i,j=1}^N$ с помощью соотношений

$$S_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad A_{ij} = 0 \quad \text{или} \quad i = j, \\ \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, & \text{если} \quad A_{ij} \neq 0 \quad \text{и} \quad i \neq j, \end{cases} \tag{2.22}$$

то, очевидно,

$$\begin{aligned} &\mathfrak{P}_k(\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n) \subseteq \mathfrak{P}_k(S_A), \\ &\mathfrak{C}(\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n) \subseteq \mathfrak{C}(S_A). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Следовательно, по следствию 2.2, для того, чтобы матрица A была невырожденной, достаточно, чтобы неравенство в (2.18) выполнялось строго для всех путей $\pi \in \mathfrak{P}_k(S_A)$ или, если A неприводима, чтобы матрица S_A была приводимой. Тем самым мы приходим к следующему достаточному псевдоблочному условию невырожденности.

Следствие 2.3. *Пусть в обозначениях теоремы 2.3 выполнено условие (2.17) и пусть*

$$w_{\alpha,\,\tilde{r}_i(A)}(\pi) \leqslant w_{\alpha,\,p_i}(\pi) \quad \textit{для каждого} \quad \pi \in \mathfrak{P}_k(S_A), \tag{2.24}$$

где матрица S_A определена в соответствии с (2.22). Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) *если $\mathfrak{P}_k(S_A) = \varnothing$ или все неравенства в (2.24) являются строгими, то A – невырожденная H-матрица;*

(ii) *если матрица A неприводима, а матрица S_A приводима, то A – невырожденная H-матрица.*

В случае, когда $k = 1$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, теорема 2.3 немедленно дает нам следующее псевдоблочное обобщение обобщенной теоремы Островского–Брауэра (см. теорему 5.1 работы [2]).

Следствие 2.4. *Пусть матрица $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant N \geqslant 1$, удовлетворяет условию*

$$p = (p_i) = \mathfrak{M}(\Delta_A)\, e > 0, \tag{2.25}$$

и предположим, что

$$\begin{aligned} &\tilde{r}_i(A)^\alpha\, \tilde{r}_j(A)^{1-\alpha} \leqslant p_i^\alpha\, p_j^{1-\alpha} \quad \textit{для всех} \quad i \neq j \quad \textit{таких,} \\ &\textit{что} \quad \left(\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}\right)_{ij} \neq 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Тогда A является H-матрицей, и справедливы следующие утверждения:

(i) *если либо $A = \Delta_A$, либо все неравенства в (2.26) выполняются строго, то матрица A невырождена;*

(ii) *если матрица A неприводима, то она вырождена тогда и только тогда, когда $n \geqslant 2$, матрица $\mathfrak{M}(A)\ \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}$ неприводима, все неравенства в (2.26) являются равенствами, и выполнено условие*

$$(-1)^{|\gamma|}\ \Pi_\gamma(A) \Bigg/ \prod_{i\in\bar\gamma} a_{ii} > 0 \quad \text{для каждого } \gamma \in \mathfrak{C}(A-D_A). \tag{2.27}$$

В работе [2] (см. следствие 5.1) для неприводимых матриц был установлен следующий вариант обобщенной теоремы Островского–Брауэра.

Теорема 2.4. *Пусть матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, неприводима и удовлетворяет условию*

$$\begin{gathered} r_i'(A)^\alpha\ r_j'(A)^{1-\alpha} \leqslant |a_{ii}|^\alpha\ |a_{jj}|^{1-\alpha} \\ \text{для всех} \quad i \neq j \quad \text{таких, что} \quad a_{ij} \neq 0, \end{gathered} \tag{2.28}$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда матрица A вырождена в том и только том случае, когда выполнено условие (2.27), и, кроме того,

- *либо*
$$r_i'(A) = |a_{ii}|, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{2.29}$$
- *либо $\alpha = 1/2$; $\langle n\rangle = S_1 \cup S_2$, где для некоторой константы $c > 1$*
$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ i \in \langle n\rangle :\ |a_{ii}| = c\, r_i'(A) \right\}, \\ S_2 &= \left\{ i \in \langle n\rangle :\ |a_{ii}| = c^{-1} r_i'(A) \right\}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

  и обе главные подматрицы $A[S_1]$ и $A[S_2]$ диагональны.

Теперь мы покажем, что из следствия 2.4 и теоремы 2.4 вытекает следующее описание вырожденных неприводимых блочных матриц, удовлетворяющих условию (2.24) при $k = 1$ (которое, вообще говоря, является более строгим, чем условие (2.26)) и условию (2.25).

Следствие 2.5. *Пусть матрица* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant N \geqslant 2$, *неприводима и удовлетворяет условию* (2.25). *Предположим, что при некотором* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

$$\begin{gathered} \tilde r_i(A)^\alpha\, \tilde r_j(A)^{1-\alpha} \leqslant p_i^\alpha\, p_j^{1-\alpha} \quad \text{для всех} \quad i \neq j \quad \text{таких,} \\ \text{что} \quad (S_A)_{ij} \neq 0, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n, \end{gathered} \tag{2.31}$$

где матрица S_A *определена в соответствии с* (2.22).

Тогда H*-матрица* A *вырождена в том и только том случае, когда выполнены следующие условия:*

(i) *матрица* $\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}$ *неприводима;*

(ii) *выполнено условие* (2.27)*;*

(iii) – *либо*

$$p_i = \tilde r_i(A), \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{2.32}$$

– *либо* $\alpha = 1/2$*;*

$$\langle n\rangle = S_1 \cup S_2, \tag{2.33}$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \{i \in \langle n\rangle :\ p_i = c\,\tilde r_i(A)\}, \\ S_2 &= \left\{i \in \langle n\rangle :\ p_i = c^{-1}\tilde r_i(A)\right\}, \end{aligned} \tag{2.34}$$

и $c > 1$ – *некоторая константа, и если множества* S_1 *и* S_2 *упорядочены естественно, то*

$$\begin{bmatrix} A[S_1] & 0 \\ 0 & A[S_2] \end{bmatrix} = P^T \Delta_A P, \tag{2.35}$$

где P – *матрица-перестановка, меняющая местами только целиком блочные строки и столбцы матрицы* Δ_A.

Доказательство. Заметим, что в условиях следствия 2.5 матрица A удовлетворяет предположениям следствия 2.4 и теоремы 2.3 при $k = 1$, тогда как Z-матрица $C = D_p^{-1}\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}D_p$ является квазинеприводимой. Кроме того, ввиду (2.31), соотношений (см. (2.20))

$$r_i'(C) = \frac{\tilde r_i(A)}{p_i}, \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{2.36}$$

и равенств

$$c_{ii} = 1, \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{2.37}$$

матрица C удовлетворяет условию (2.28) теоремы 2.4.

Необходимость. Пусть матрица A вырождена. Тогда, как было показано при доказательстве теоремы 2.3, матрица C является вырожденной M-матрицей. В силу утверждения (ii) следствия 2.4, C неприводима и удовлетворяет условию (2.27). Следовательно, по теореме 2.4 с учетом равенств (2.37),

- либо
$$r'_i(C) = |c_{ii}| = 1, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2.38}$$
- либо $\alpha = 1/2$; $\langle n\rangle = S_1 \cup S_2$, где $c > 1$, и множества S_1 и S_2 определены следующим образом:
$$\begin{gathered} S_1 = \left\{i \in \langle n\rangle : \ r'_i(C) = c^{-1}\right\}, \\ S_2 = \left\{i \in \langle n\rangle : \ r'_i(C) = c\right\}, \end{gathered} \tag{2.39}$$
причем обе главные подматрицы $C[S_1]$ и $C[S_2]$ диагональны.

Если справедливы равенства (2.38), то, ввиду (2.36) и (2.37), выполнены условия (2.32).

В противном случае, $\alpha = 1/2$, и справедливо равенство (2.33). Далее, в силу (2.36) и (2.37), соотношения (2.39) равносильны соотношениям (2.34) с той же самой константой $c > 1$. Таким образом, нам остается лишь доказать (2.35).

Для этого определим непересекающиеся подмножества индексов J_i, $i = 1, \ldots, N$, с помощью соотношений
$$A_{ii} = A[J_i], \qquad i = 1, \ldots, N.$$
Мы покажем, что для каждого r, $1 \leqslant r \leqslant N$,
$$J_r \cap S_1 \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad J_r \subseteq S_1. \tag{2.40}$$
Действительно, пусть $i \in J_r \cap S_1$. Поскольку матрица C неприводима, а подматрица $C[S_1]$ диагональна, найдется индекс $j \in S_2$ такой, что $c_{ij} \neq 0$. Следовательно, в силу (2.34), мы имеем
$$p_j = c^{-1}\, \tilde r_j(A). \tag{2.41}$$
Но из условия (2.31) с $\alpha = 1/2$ следует, что
$$\tilde r_l(A)\, \tilde r_j(A) \leqslant p_l\, p_j \quad \text{для всех} \quad l \in J_r,$$

а значит с учетом (2.41) мы имеем

$$p_l \geqslant \frac{\tilde{r}_j(A)}{p_j}\, \tilde{r}_l(A) = c\,\tilde{r}_l(A), \qquad l \in J_r.$$

Следовательно, $l \notin S_2$, так что $l \in S_1$, и $J_r \subseteq S_1$, что и доказывает (2.40).

Итак, ввиду (2.33) и (2.40), для каждого r, $1 \leqslant r \leqslant N$, множество J_r целиком принадлежит либо S_1, либо S_2.

Пусть p – перестановка степени n, переводящая множество $\{1, \dots, n\}$ с естественным упорядочением во множество $S = \{S_1, S_2\}$, где оба множества S_1 и S_2 также упорядочены естественно. Очевидно, что p переставляет множества J_r, $r = 1, \dots, N$, целиком. Обозначим соответствующую матрицу-перестановку через P. Тогда мы имеем

$$A[S] = P^T A P,$$

откуда следует, что

$$\Delta_{A[S]} = P^T \Delta_A P. \tag{2.42}$$

Кроме того, если $i \neq j$ и $J_i, J_j \subseteq S_k$, где $k = 1, 2$, то $A_{ij} = 0$, поскольку в противном случае мы бы имели

$$\left(D_p C D_p^{-1}\right)_{ij} = -|A_{ij}|\, \mathfrak{M}(A_{jj})^{-1} \neq 0,$$

что противоречило бы тому факту, что обе подматрицы $C[S_k]$, $k = 1, 2$, диагональны. Значит, обе подматрицы $A[S_k]$, $k = 1, 2$, блочно диагональны, и, ввиду (2.42), справедливо равенство (2.35).

Достаточность. Предположим, что матрица C неприводима и выполнено условие (2.27). Тогда, ввиду утверждения (ii) следствия 2.4, для того, чтобы неприводимая матрица A была вырожденной, достаточно, чтобы при некотором α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, было бы выполнено условие

$$\begin{gathered} \tilde{r}_i(A)^\alpha\, \tilde{r}_j(A)^{1-\alpha} = p_i^\alpha\, p_j^{1-\alpha} \quad \text{для всех} \quad i \neq j \quad \text{таких,} \\ \text{что} \quad (\mathfrak{M}(A)\, \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1})_{ij} \neq 0, \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n. \end{gathered} \tag{2.43}$$

Мы утверждаем, что оно выполнено при $\alpha = 1/2$. Действительно, если равенства (2.32) справедливы, то соотношения (2.43) выполнены при любом α. В противном случае из (2.34) следует, что

$$\tilde{r}_i(A)\, \tilde{r}_j(A) = p_i\, p_j \quad \text{для всех} \quad i \in S_1 \quad \text{и всех} \quad j \in S_2. \tag{2.44}$$

Но из соотношения (2.35) следует, что если $r \neq s$ и оба множества J_r и J_s принадлежат либо S_1, либо S_2, то $A_{rs} = 0$, так что и $C_{rs} = 0$. Итак, при $r \neq s$ блок C_{rs} не является нулевым только если $J_r \in S_1$ и $J_s \in S_2$ или наоборот. Поскольку все диагональные блоки C_{rr}, $r = 1, \dots, N$, являются единичными матрицами, все ненулевые внедиагональные элементы c_{ij} матрицы C расположены в ненулевых внедиагональных блоках, откуда следует, что либо $i \in S_1$ и $j \in S_2$, либо наоборот. Но для таких $i \neq j$ условие (2.43) с $\alpha = 1/2$ выполняется в силу (2.44). $\square$

Замечание 2.5. Заметим, что в части достаточности в следствии 2.5 условие неприводимости (i) может быть опущено, поскольку оно следует из условий (ii) и (iii). Действительно, как из (2.32), так и из (2.34) следует, что

$$r_i'(C) = \frac{\tilde{r}_i(A)}{p_i} > 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Поэтому, если бы матрица C была приводимой и матрица $\tilde{C} = P^T C P$ была бы верхней блочно треугольной матрицей с неприводимыми диагональными блоками, то неприводимая компонента $C[S]$ матрицы C, соответствующая последнему диагональному блоку матрицы $\tilde{C}$, имела бы порядок не меньший 2. Кроме того, мы бы имели

$$r_i'(C[S]) = r_i'(C) \qquad \text{для всех} \quad i \in S,$$

а также

$$r_i'(C[S])\, r_j'(C[S]) = 1 \quad \text{для всех} \quad i \in S \cap S_1 \quad \text{и} \quad j \in S \cap S_2.$$

Поэтому, по теореме 2.4, неприводимая компонента $C[S]$ была бы вырожденной, а значит матрицы C, $\mathfrak{M}(A)$ и A также были бы вырожденными. Но, с другой стороны, ввиду следствия 2.5, из приводимости матрицы C следовала бы невырожденность A. Полученное противоречие доказывает, что матрица C неприводима, что и требовалось доказать.

Следующая теорема является псевдоблочным аналогом теоремы 2.2 и сводится к ней в точечном случае ($N = n$).

Теорема 2.5. *Пусть* $A = (a_{ij}) = (A_{ij})_{i,j=1}^N = \Delta_A - B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant N \geqslant 1$, *и предположим, что*

$$p = (p_i) = \mathfrak{M}(\Delta_A)\, e > 0$$

и

$$\prod_{i\in\bar\gamma} \tilde r_i(A) \leqslant \prod_{i\in\bar\gamma} p_i \quad \textit{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n). \tag{2.45}$$

Тогда A является H-матрицей, и справедливы следующие утверждения:

(i) *если $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n) = \varnothing$ или все неравенства в (2.45) выполняются строго, то матрица A невырождена;*

(ii) *если матрица A неприводима, то она вырождена тогда и только тогда, когда $n \geqslant 2$, матрица $\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}$ неприводима, все неравенства в (2.45) являются равенствами, и выполнено условие*

$$(-1)^{|\gamma|}\, \Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i\in\bar\gamma} a_{ii} > 0 \quad \textit{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A). \tag{2.46}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.3. В соответствии с (2.2) и с учетом (2.20), матрица C, определенная в (2.5), имеет слабое контурное диагональное преобладание по строкам, если

$$\prod_{i\in\bar\gamma} r_i'(C) = \prod_{i\in\bar\gamma} \frac{\tilde r_i(A)}{p_i} \leqslant 1 \quad \text{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(C - I_n) \tag{2.47}$$

или, что равносильно, если выполнено условие (2.45).

Если условие (2.45) выполнено, то квазинеприводимая Z-матрица C является M-матрицей по теореме 2.2. В силу леммы 1.1, C имеет обобщенное диагональное преобладание, так что, по лемме 2.1, A имеет обобщенное диагональное преобладание. Следовательно, опять же по лемме 1.1, A является H-матрицей.

(i) если $\mathfrak{C}(C - I_n) = \mathfrak{C}(\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n) = \varnothing$, то C – невырожденная M-матрица по замечанию 2.2. Если $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n) \neq \varnothing$ и все неравенства в (2.45) являются строгими, то C – невырожденная M-матрица по утверждению (i) теоремы 2.2. Значит, в обоих случаях матрица C имеет строгое обобщенное диагональное преобладание по лемме 1.1, так что, по следствию 2.1,

A – невырожденная H-матрица. Тем самым утверждение (i) доказано.

(ii) *Достаточность.* Пусть матрица A неприводима и пусть выполнены условия утверждения (ii). Поскольку C неприводима, все неравенства в (2.45) являются равенствами, и выполнено условие

$$(-1)^{|\gamma|}\,\Pi_\gamma(C) \Big/ \prod_{i\in\bar\gamma} c_{ii} > 0 \quad \text{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(C - I_n),$$

то матрица C вырождена в силу утверждения (ii) теоремы 2.2. Следовательно, матрица $\mathfrak{M}(A)$ также вырождена. Наконец, из вырожденности $\mathfrak{M}(A)$ и условия (2.46) вытекает, что A вырождена (см. доказательство теоремы 2.3).

Необходимость. Пусть матрица A неприводима и вырождена. Тогда A является вырожденной H-матрицей. В силу леммы 1.1 и теоремы 1.1, найдется положительный вектор $u = (u_i)$ такой, что

$$|a_{ii}|\,u_i = \sum_{i\neq j} |a_{ij}|\,u_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2.48}$$

и, кроме того, A удовлетворяет условию (2.46). Заметим, что, ввиду (2.48), $\mathfrak{M}(A)\,u = 0$. Значит, $\mathfrak{M}(A)$ вырождена, так что и C тоже вырождена.

Наконец, по лемме 2.2, вырожденная M-матрица C неприводима, и, следовательно, по утверждению (ii) теоремы 2.2, $n \geqslant 2$, и все неравенства в (2.47) и (2.45) являются равенствами.

Теорема 2.5 доказана полностью. $\square$

Заменив в условии (2.45) теоремы 2.5 множество $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n)$ множеством $\mathfrak{C}(S_A) \supseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1} - I_n)$ (см. (2.23)), мы немедленно приходим к следующему контурному аналогу следствия 2.3.

Следствие 2.6. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N = \Delta_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant N \geqslant 1$, *и предположим, что*

$$p = (p_i) = \mathfrak{M}(\Delta_A)\,e > 0$$

и

$$\prod_{i\in\bar\gamma} \tilde r_i(A) \leqslant \prod_{i\in\bar\gamma} p_i \quad \textit{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(S_A), \tag{2.49}$$

где матрица S_A определена в соответствии с (2.22). Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) *если $\mathfrak{C}(S_A) = \varnothing$ или все неравенства в (2.49) выполняются строго, то A является невырожденной H-матрицей;*

(ii) *если матрица A неприводима, а матрица S_A приводима, то A – невырожденная H-матрица.*

Замечание 2.6. В предположении, что матрица Δ_A имеет строгое диагональное преобладание по столбцам, т.е.

$$q = (q_i) = [\mathfrak{M}(\Delta_A)]^T e > 0,$$

справедливы столбцовые аналоги теорем 2.3 и 2.5, а также следствий 2.2–2.6, которые формулируются в терминах множеств $\mathfrak{P}_k(\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}\mathfrak{M}(A) - I_n)$ и $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}\mathfrak{M}(A) - I_n)$ (или $\mathfrak{P}_k(S_A)$ и $\mathfrak{C}(S_A)$), а также величин $\tilde{c}_i(A)$ и q_i $i = 1, \dots, n$.

Замечание 2.7. Результаты этого параграфа легко обобщить на случай обобщенного псевдоблочного диагонального преобладания. Для этого достаточно применить их к матрице $D^{-1}AD$, где $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$, $d_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, – невырожденная диагональная матрица.

§3. Случай блочных 2×2 матриц

В этом параграфе мы рассматриваем частный случай блочных 2×2 матриц ($N = 2$), которые могут быть представлены в виде

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \qquad n \geqslant 2, \tag{3.1}$$

где $A_{11} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$, $1 \leqslant n_1 < n$, и $k = 1$.

Ясно, что утверждения о невырожденности легко могут быть перенесены с блочных 2×2 матриц на матрицы, которые получаются из последних с помощью симметричных перестановок строк и столбцов, но, чтобы не усложнять обозначений, мы этого делать не будем.

Обозначим

$$p = (p_i) = \mathfrak{M}(\Delta_A)\, e, \qquad p^{(1)} = \mathfrak{M}(A_{11})\, e, \qquad p^{(2)} = \mathfrak{M}(A_{22})\, e.$$

Для $N = 2$ и произвольного α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, следствие 2.4 дает нам следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть матрица A вида (3.1) удовлетворяет условиям*

$$p = \mathfrak{M}(\Delta_A)\, e > 0 \tag{3.2}$$

и

$$\begin{gathered} \tilde{r}_i(A)^{\alpha}\, \tilde{r}_j(A)^{1-\alpha} \leqslant p_i^{\alpha}\, p_j^{1-\alpha} \quad \text{для всех} \quad i \neq j \quad \text{таких,} \\ \text{что} \quad \left(\mathfrak{M}(A)\, \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}\right)_{ij} \neq 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \end{gathered} \tag{3.3}$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда A является H-матрицей, и справедливы следующие утверждения:

(i) *если либо $A = \Delta_A$, либо все неравенства в (3.3) являются строгими, то матрица A невырождена;*

(ii) *если A неприводима, то она вырождена в том и только том случае, когда матрица $\mathfrak{M}(A)\, \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}$ неприводима, все неравенства в (3.3) являются равенствами, и выполнено условие*

$$\begin{gathered} (-1)^{|\gamma|}\, \Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i \in \bar{\gamma}} a_{ii} > 0 \\ \text{для каждого} \quad \gamma \in \mathfrak{C}(A - D_A). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Для матриц вида (3.1) утверждение (i) следствия 2.3 при $k = 1$ дает следующее достаточное условие невырожденности, использующее матрицу S_A, определенную в (2.22).

Следствие 3.1. *Если матрица A вида (3.1) удовлетворяет предположению (3.2) и условию*

$$\begin{gathered} \tilde{r}_i(A)^{\alpha}\, \tilde{r}_j(A)^{1-\alpha} < p_i^{\alpha}\, p_j^{1-\alpha} \\ \text{для всех } i \text{ и } j \text{ таких, что либо} \quad i \leqslant n_1 \text{ и } j > n_1, \\ \text{либо} \quad i > n_1 \quad \text{и} \quad j \leqslant n_1, \end{gathered} \tag{3.5}$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то A является невырожденной H-матрицей.

Заметим, что, перемножая неравенства в (3.5), соответствующие $i = r$, $j = s$ и $i = s$, $j = r$, мы приходим к условию

$$\tilde{r}_i(A)\, \tilde{r}_j(A) < p_i\, p_j \qquad \text{для всех} \quad i \leqslant n_1 \quad \text{и} \quad j > n_1, \tag{3.6}$$

совпадающему с условием (3.5), в котором $\alpha = 1/2$.

Таким образом, если условие (3.5) выполнено для произвольного α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то оно необходимо выполнено и для $\alpha = 1/2$, так что следствие 3.1 вытекает из следующего более простого (по форме) результата.

Следствие 3.2. *Если матрица A вида* (3.1) *удовлетворяет условиям* (3.2) *и* (3.6), *то она является невырожденной H-матрицей.*

Теперь мы покажем, что, в условиях следствия 3.2, предположение (3.2) можно заменить некоторыми более слабыми предположениями. Однако, в совокупности с условием (3.6), каждое из последних оказывается равносильным условию (3.2).

Действительно, если $p_i > 0$ для всех $i = 1, \ldots, n_1$, т.е. вектор $p^{(1)}$ положителен, то, в силу (3.6), мы имеем

$$p_j > \frac{\tilde{r}_i(A)}{p_i}\, \tilde{r}_j(A) \geqslant 0, \qquad n_1 < j \leqslant n.$$

Следовательно, в следствии 3.2 условие (3.2) можно заменить на более слабое условие

$$\mathfrak{M}(A_{11})\, e > 0, \tag{3.7}$$

которое равносильно (3.2), если выполнено условие (3.6). Полученная модификация следствия 3.2 совпадает (с точностью до симметричной перестановки строк и столбцов) с главным результатом работы [5] (см. также [11, теорема 3.1]), в котором обобщается более ранний результат из работы [1], соответствующий случаю $n_1 = 1$.

Заметим также, что если неравенства (3.6) справедливы, то условие (3.7) можно заменить на еще более слабое условие

$$p_{i_0} > 0 \quad \text{при некотором} \quad i_0 \in \langle n \rangle. \tag{3.8}$$

Действительно, пусть, например, $i_0 \leqslant n_1$. Тогда из (3.6) и (3.8) следует, что

$$p_j > \frac{\tilde{r}_{i_0}(A)}{p_{i_0}}\, \tilde{r}_j(A) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad j > n_1,$$

так что из условия (3.6) следует, что

$$p_i > \tilde{r}_i(A)\, \frac{\tilde{r}_j(A)}{p_j} \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad i \leqslant n_1.$$

Итак, предположение (3.8) равносильно предположению (3.2), если только справедливы строгие неравенства (3.6).

Это приводит нас к следующему более слабому (по видимости) достаточному условию невырожденности.

Следствие 3.3. *Если матрица A вида* (3.1) *удовлетворяет условиям* (3.6) *и* (3.8), *то она является невырожденной H-матрицей.*

Еще одна модификация следствия 3.2 была предложена в работе [6], в которой вместо условия (3.2) использовалось предположение, что

$$J = \{i: \ i \in \langle n \rangle \ \& \ |a_{ii}| > r'_i(A)\} \neq \varnothing, \tag{3.9}$$

т.е. хотя бы одна из строк матрицы A имеет строгое диагональное преобладание. Из условия (3.9) вытекает, что, хотя бы для одного $i_0 \in \langle n \rangle$,

$$p_{i_0} > \tilde{r}_{i_0}(A) \geqslant 0,$$

так что условие (3.8) заведомо выполнено. Следовательно, как уже было показано, выполнено и условие (3.2).

Обратно, если выполнены условия (3.6) и (3.2), то

$$\frac{\tilde{r}_i(A)}{p_i} \, \frac{\tilde{r}_j(A)}{p_j} < 1 \quad \text{для всех} \quad i \leqslant n_1, \quad j > n_1.$$

Следовательно, для некоторого $i_0 \in \langle n \rangle$ мы имеем

$$\frac{\tilde{r}_{i_0}(A)}{p_{i_0}} < 1$$

или, что равносильно,

$$|a_{i_0 i_0}| > r'_{i_0}(A).$$

Значит, строка матрицы A с номером i_0 имеет строгое диагональное преобладание, так что условие (3.9) выполнено. Этим завершается доказательство равносильности условий (3.9) и (3.2) при выполнении неравенств (3.6).

В частном случае блочных 2×2 матриц следствие 2.5, дающее необходимые и достаточные условия вырожденности для неприводимых матриц, принимает следующий более простой вид.

Теорема 3.2. *Пусть матрица A вида* (3.1) *неприводима и удовлетворяет условию* (3.2). *Предположим, что при некотором α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,*

$$\tilde{r}_i(A)^{\alpha} \, \tilde{r}_j(A)^{1-\alpha} \leqslant p_i^{\alpha} \, p_j^{1-\alpha}, \tag{3.10}$$
$$\text{если либо } i \leqslant n_1 \text{ и } j > n_1, \quad \text{либо} \quad i > n_1 \text{ и } j \leqslant n_1.$$

Тогда матрица A является вырожденной в том и только том случае, когда справедливы следующие утверждения:

(i) *матрица $\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}$ неприводима;*

(ii) *выполнено условие* (3.4)*;*

(iii) – *либо*

$$p_i = \tilde r_i(A), \qquad i = 1, \dots, n, \tag{3.11}$$

– *либо $\alpha = 1/2$, и существует положительная константа $c \neq 1$ такая, что*

$$\begin{aligned} p_i &= c\,\tilde r_i(A), \qquad i \leqslant n_1,\\ p_i &= c^{-1}\tilde r_i(A), \quad i > n_1. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Замечание 3.1. Ввиду замечания 2.5, для того, чтобы неприводимая матрица A вида (3.1), удовлетворяющая условиям (3.2) и (3.10), была вырожденной, достаточно, чтобы выполнялись условия (ii) и (iii) теоремы 3.2. При этом матрица $\mathfrak{M}(A)\ \mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}$ обязательно будет неприводимой. Следовательно, если выполнено условие (3.4) и матрица $\mathfrak{M}(A)\,\mathfrak{M}(\Delta_A)^{-1}$ приводима, то утверждение (iii) не может быть справедливым, так что по крайней мере одно из неравенств в (3.10), где $\alpha = 1/2$, является строгим.

Из условия (3.10) очевидно следует, что

$$\tilde r_i(A)\,\tilde r_j(A) \leqslant p_i\,p_j \quad \text{для всех} \quad i \leqslant n_1 \quad \text{и} \quad j > n_1. \tag{3.13}$$

Значит, в теореме 3.2 условие (3.10), соответствующее произвольному α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, можно заменить на условие (3.13), соответствующее $\alpha = 1/2$, причем такая замена не ведет к ослаблению результата.

Также следует напомнить, что в работе [6] был установлен следующий результат, соответствующий $\alpha = 1/2$.

Теорема 3.3 [6]**.** *Пусть матрица A вида* (3.1) *неприводима и пусть выполнено условие* (3.9)*. Если справедливы нестрогие неравенства* (3.13) *и хотя бы одно из них является строгим, то A является невырожденной H-матрицей.*

Заметим, что последняя теорема не следует ни из утверждения (ii) теоремы 3.1, ни из теоремы 3.2, поскольку, вообще говоря, в предположениях теоремы 3.3 вектор p является неотрицательным, но не обязан быть положительным. Это верно, например, для неприводимой M-матрицы

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -3/4 & 1 & -1/2 \\ \hline 0 & -1/4 & 1 \end{array}\right],$$

которая, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 3.3, но при этом вектор $p = [0 \quad 1/4 \quad 1]^T$ имеет нулевую компоненту.

Теорема, приводимая ниже, улучшает теорему 3.3 в следующих аспектах. Во-первых, ослабляется условие (3.9), и, вовторых, достаточные для невырожденности условия заменяются на соответствующие необходимые и достаточные условия вырожденности. Эта теорема также усиливает теорему 3.2, поскольку в ней допускается, что вектор p может быть неотрицательным.

Теорема 3.4. *Пусть матрица A вида* (3.1) *неприводима и пусть вектор $p = \mathfrak{M}(\Delta_A)e$ имеет положительную компоненту. Если A удовлетворяет нестрогим неравенствам* (3.13), *то она вырождена в том и только том случае, когда*

$$\begin{aligned} p_i &= c^{-1}\,\tilde r_i(A), \qquad i \leqslant n_1, \\ p_j &= c\,\tilde r_j(A), \qquad j > n_1, \end{aligned} \qquad \text{где} \quad c > 0 \ \text{– константа}, \tag{3.14}$$

и выполнено условие (3.4).

Доказательство. Заметим, что из неприводимости A, неравенств (3.13) и предположения о том, что вектор p имеет положительную компоненту, следует, что все компоненты этого вектора неотрицательны.

Действительно, поскольку матрица A неприводима, найдутся индексы $i^* \leqslant n_1$ и $j^* > n_1$ такие, что

$$\tilde r_{i^*}(A) > 0 \quad \text{и} \quad \tilde r_{j^*}(A) > 0. \tag{3.15}$$

Тогда, ввиду (3.13), как p_{i^*}, так и p_{j^*} не равны нулю и имеют одинаковые знаки. Пусть $p_k > 0$ и предположим, что $k > n_1$. В этом случае, в силу (3.13), мы имеем $p_{i^*}\,p_k \geqslant 0$, откуда следует, что

$$p_{i^*} > 0 \qquad \text{и} \qquad p_{j^*} > 0. \tag{3.16}$$

В том случае, когда $k \leqslant n_1$, неравенства (3.16) устанавливаются аналогично. Наконец, ввиду (3.16), из (3.13) вытекает, что

$$p_j \geqslant \frac{\tilde{r}_{i^*}(A)}{p_{i^*}}\, \tilde{r}_j(A) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad j > n_1$$

и, аналогично,

$$p_i \geqslant \frac{\tilde{r}_{j^*}(A)}{p_{j^*}}\, \tilde{r}_i(A) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad i \leqslant n_1.$$

Итак, вектор p неотрицателен.

Теперь мы покажем, что

$$p_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{r}_k(A) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{3.17}$$

Действительно, если $k \leqslant n_1$, то, в силу (3.13), мы имеем

$$0 = p_k\, p_{j^*} \geqslant \tilde{r}_k(A)\, \tilde{r}_{j^*}(A) \geqslant 0.$$

Ввиду (3.15), отсюда необходимо следует, что $\tilde{r}_k(A) = 0$. Случай $k > n_1$ рассматривается так же.

Положим

$$c = \frac{\tilde{r}_{i_0}(A)}{p_{i_0}} = \max_{\substack{i \leqslant n_1:\\ p_i > 0}} \left\{ \frac{\tilde{r}_i(A)}{p_i} \right\}. \tag{3.18}$$

Поскольку, по (3.16), мы имеем $p_{i^*} > 0$, константа c определена. Кроме того, $c > 0$, поскольку в противном случае, ввиду (3.17), мы бы имели $\tilde{r}_i(A) = 0$ для всех $i \leqslant n_1$, и матрица A была бы приводимой.

Рассмотрим вектор

$$v = \mathfrak{M}(A) \begin{bmatrix} c\, e \\ e \end{bmatrix}.$$

Покажем, что он неотрицателен. Действительно, для любого $i \leqslant n_1$ мы имеем

$$v_i = c\, p_i - \tilde{r}_i(A).$$

Если $p_i = 0$, то, по (3.17), $\tilde{r}_i(A) = 0$, так что $v_i = 0$. Если же $p_i > 0$, то, по (3.18), мы имеем $\tilde{r}_i(A) \leqslant c\, p_i$, так что $v_i \geqslant 0$. Таким образом,

$$v_i = c\, p_i - \tilde{r}_i(A) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad i \leqslant n_1. \tag{3.19}$$

Для любого $j > n_1$ мы имеем

$$v_j = p_j - c\,\tilde{r}_j(A).$$

Пусть $p_j = 0$. Тогда, по (3.17), $\tilde{r}_j(A) = 0$, так что $v_j = 0$. Если же $p_j > 0$, то, используя (3.18) и (3.13), мы выводим:

$$c\,\tilde{r}_j(A) = \frac{\tilde{r}_{i_0}(A)}{p_{i_0}}\,\tilde{r}_j(A) \leqslant p_j,$$

откуда следует, что

$$v_j = p_j - c\,\tilde{r}_j(A) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad j > n_1. \tag{3.20}$$

Итак, вектор v является неотрицательным, и, по теореме 1.1, неприводимая матрица A является вырожденной тогда и только тогда, когда $v = 0$ и A удовлетворяет условию (3.4).

Наконец, ввиду (3.19) и (3.20), вектор v является нулевым тогда и только тогда, когда справедливы равенства (3.14). Теорема 3.3 доказана. $\square$

В заключение этого параграфа мы рассмотрим еще один набор условий, достаточных для того, чтобы блочная 2×2 матрица была бы невырожденной H-матрицей. Отметим, что эти условия содержат произведение матрицы $\mathfrak{M}(A_{11})^{-1}$ на вектор и, следовательно, для их проверки необходимо решить систему линейных уравнений с матрицей $\mathfrak{M}(A_{11})$. Приводимая ниже теорема является незначительной модификацией теоремы 1 работы [8].

Теорема 3.5. *Пусть матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, имеет вид* (3.1) *и пусть выполнены следующие условия:*

(i) *A_{11} является невырожденной H-матрицей;*

(ii)
$$\mathfrak{M}(A_{11})^{-1}\,|A_{12}|\,e < \alpha\, e, \tag{3.21}$$

где

$$\alpha = \min_{j>n_1} \frac{p_j(A_{22})}{\tilde{r}_j(A)}. \tag{3.22}$$

Тогда A является невырожденной H-матрицей.

Ниже мы приводим независимое доказательство теоремы 3.5, основанное на применении следствия 3.2 к матрице, незначительно отличающейся от A. Тем самым проясняется суть предположений теоремы 3.5.

Доказательство. Поскольку в условиях теоремы 3.5 подматрица A_{11} является невырожденной H-матрицей, мы можем рассмотреть матрицу

$$B = \begin{bmatrix} I & -\mathfrak{M}(A_{11})^{-1}|A_{12}| \\ -|A_{21}| & \mathfrak{M}(A_{22}) \end{bmatrix}.$$

Введем обозначения

$$\tilde{r}^{(1)} = |A_{12}|\, e, \qquad \tilde{r}^{(2)} = |A_{21}|\, e.$$

Тогда условие (3.22) равносильно неравенству

$$\alpha\, \tilde{r}^{(2)} \leqslant p^{(2)}, \tag{3.23}$$

тогда как условие (3.21) можно записать в виде

$$\mathfrak{M}(A_{11})^{-1}\, \tilde{r}^{(1)} < \alpha\, e. \tag{3.24}$$

С помощью (3.24) и (3.23) мы выводим:

$$\begin{gathered} \left[\mathfrak{M}(A_{11})^{-1}\, \tilde{r}^{(1)}\right]_i \tilde{r}_j^{(2)} < \alpha\, \tilde{r}_j^{(2)} \leqslant p_j^{(2)} \\ \text{для всех} \quad i \leqslant n_1,\ j > n_1. \end{gathered} \tag{3.25}$$

Заметим теперь, что последнее условие в точности совпадает с условием (3.6) в применении к матрице B. Далее, в силу (3.25), вектор $\Delta_B\, e = \left[\begin{smallmatrix} e \\ p^{(2)} \end{smallmatrix}\right]$ положителен. Следовательно, Z-матрица B является невырожденной M-матрицей по следствию 3.2. Наконец, поскольку

$$\mathfrak{M}(A) = \begin{bmatrix} \mathfrak{M}(A_{11}) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} B,$$

то Z-матрица $\mathfrak{M}(A)$ невырождена и монотонна. Следовательно, $\mathfrak{M}(A)$ является невырожденной M-матрицей, а A – невырожденной H-матрицей. $\square$

§4. Области локализации собственных значений

В этом параграфе для полноты изложения мы приводим результаты о локализации собственных значений, равносильные некоторым утверждениям о невырожденности матриц, представленным в §§2 и 3.

Ниже через $\operatorname{Spec}(A)$ обозначается спектр квадратной матрицы A с комплексными элементами, а также используются следующие дополнительные обозначения.

Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} = (A_{ij})_{i,j=1}^{N} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant N \geqslant 1$. Для любого $z \in \mathbb{C}$ положим

$$s_i(z) = |z - a_{ii}| - r_i'(\Delta_A), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.1}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} G_i(\Delta_A) &= \{z \in \mathbb{C} :\ |z - a_{ii}| \leqslant r_i'(\Delta_A)\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} :\ s_i(z) \leqslant 0\}, \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.2}$$

так что множества $G_i(\Delta_A)$ являются кругами Гершгорина для блочно диагональной части Δ_A матрицы A.

Наконец, положим

$$\begin{aligned} P_{\alpha,\,\pi}(A) = \bigl\{z \in \mathbb{C} :\ w_{\alpha,\, s_i(z)}(\pi) \leqslant w_{\alpha,\, \tilde r_i(A)}(\pi)\bigr\}, \\ \pi \in \mathfrak{P}_k(S_A), \quad k \geqslant 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где матрица S_A определена в соответствии с (2.22) и зависит только от расположения ненулевых внедиагональных элементов в A.

В соответствии с (4.3), для каждого простого контура $\gamma \in \mathfrak{C}(S_A)$, не зависимо от α, мы имеем:

$$\begin{aligned} P_\gamma(A) &= \bigl\{z \in \mathbb{C} :\ w_{s_i(z)}(\gamma) \leqslant w_{\tilde r_i(A)}(\gamma)\bigr\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} :\ \prod_{i\in\bar\gamma} s_i(z) \leqslant \prod_{i\in\bar\gamma} \tilde r_i(A) \right\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

В этих обозначениях из утверждения (i) следствия 2.3 мы немедленно получаем следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{N} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant N \geqslant 1$, *пусть* $k \geqslant 0$ *и пусть* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. *Тогда*

$$\operatorname{Spec}(A) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i(\Delta_A) \right) \cup \left(\bigcup_{\pi \in \mathfrak{P}_k(S_A)} P_{\alpha,\,\pi}(A) \right). \tag{4.5}$$

Заметим, что в том крайнем случае, когда $N = n$, т.е. $\Delta_A = D_A$, справедливы соотношения

$$G_i(\Delta_A) = G_i(D_A) = \{a_{ii}\}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

и

$$\begin{aligned} s_i(z) &= |z - a_{ii}|, \\ \tilde{r}_i(A) &= r'_i(A), \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Кроме того, если $A[i] = a_{ii}$ не является неприводимой компонентой матрицы A, то i принадлежит некоторому простому контуру из $\mathfrak{C}(S_A) = \mathfrak{C}(A - D_A)$, и, следовательно, для любого $k \geqslant 1$, также и некоторому пути $\pi \in \mathfrak{P}_k(S_A) = \mathfrak{P}_k(A - D_A)$. Итак, при $N = n$ и $k \geqslant 1$, из теоремы 4.1 следует, что

$$\operatorname{Spec}(A) \subseteq \left(\bigcup_{\pi \in \mathfrak{P}_k(A - D_A)} \{z \in \mathbb{C} : \ w_{\alpha,\, |z - a_{ii}|}(\pi) \leqslant w_{\alpha,\, r'_i(A)}(\pi)\} \right) \tag{4.6}$$

$$\cup \, \{a_{ii} : \ i \in \langle n \rangle \ \&\ a_{ii} \text{ -- неприводимая компонента матрицы } A\},$$

что согласуется с утверждением следствия 7.2 работы [2].

В противоположном крайнем случае, когда $N = 1$, мы имеем $\Delta_A = A$, так что при $k \geqslant 1$ множество $\mathfrak{P}_k(S_A) = \mathfrak{P}_k(0)$ является пустым. Следовательно, в рассматриваемом случае теорема 4.1 сводится к теореме Гершгорина.

Заметим также, что при $k = 0$ и произвольном N мы по определению имеем $\mathfrak{P}_0(S_A) = \langle n \rangle$, так что

$$\bigcup_{\pi \in \mathfrak{P}_0(S_A)} P_{\alpha,\, \pi}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : \ s_i(z) \leqslant \tilde{r}_i(A)\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : \ |z - a_{ii}| \leqslant r'_i(A)\} = \bigcup_{i=1}^{n} G_i(A) \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i(\Delta_A).$$

Значит при $k = 0$, как и при $N = 1$, включение (4.5), даваемое теоремой 4.1, сводится к теореме Гершгорина.

Аналогично, из утверждения (i) следствия 2.6 вытекает следующий результат о локализации собственных значений.

Теорема 4.2. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant N \geqslant 1$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}(A) &\subseteq \left(\bigcup_{i=1}^n G_i(\Delta_A)\right) \cup \left(\bigcup_{\gamma\in\mathfrak{C}(S_A)} P_\gamma(A)\right) \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^n G_i(\Delta_A)\right) \cup \left(\bigcup_{\gamma\in\mathfrak{C}(S_A)} \left\{z\in\mathbb{C}:\ \prod_{i\in\bar\gamma} s_i(z) \leqslant \prod_{i\in\bar\gamma} \tilde r_i(A)\right\}\right).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Заметим, что при $N = 1$ область локализации, даваемая теоремой 4.2, совпадает с объединением кругов Гершгорина $\bigcup\limits_{i=1}^n G_i(A)$, тогда как при $N = n$ мы имеем включение

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}(A) \subseteq &\bigcup_{\substack{\gamma\in\mathfrak{C}(A):\\ |\gamma|\geqslant 2}} \left\{z\in\mathbb{C}:\ \prod_{i\in\bar\gamma} |z-a_{ii}| \leqslant \prod_{i\in\bar\gamma} r_i'(A)\right\} \\ &\cup \{a_{ii}:\ i\in\langle n\rangle\ \&\ a_{ii} - \text{неприводимая компонента матрицы } A\},\end{aligned} \tag{4.8}$$

совпадающее с включением (7.7) работы [2] при $p = r = 1$, $D_1 = I_n$ и $\beta_1 = 1$. Заметим также, что включение (4.8) подобно, но несколько слабее (в приводимом случае), чем утверждение теоремы 2.5 из монографии [11], в которой дополнительно предполагается, что известны все неприводимые компоненты матрицы A (что позволяет заменить величины $r_i'(A)$ аналогичными строчными суммами для соответствующих неприводимых компонент матрицы A).

В том случае, когда $N = 2$, $k = 1$ и

$$\begin{gathered} A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad n \geqslant 2, \\ A_{11} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}, \quad 1 \leqslant n_1 < n, \end{gathered} \tag{4.9}$$

следствие 3.3 дает нам следующее улучшение теоремы 6 из статьи [5] (см. также теорему 3.12 из [11]).

Теорема 4.3. *Для произвольной матрицы A вида (4.9) справедливо включение*

$$\operatorname{Spec}(A) \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} :\ |z - a_{ii}| \leqslant r_i'(\Delta_A)\} \right) \tag{4.10}$$

$$\cup \left(\bigcup_{i \leqslant n_1,\, j > n_1} \{z \in \mathbb{C} :\ [|z - a_{ii}| - r_i'(\Delta_A)]\, [|z - a_{jj}| - r_j'(\Delta_A)] \leqslant \tilde{r}_i(A)\, \tilde{r}_j(A)\} \right).$$

Отметим, что в правую часть (4.10) входит пересечение (а не объединение) кругов Гершгорина для блочно диагональной части Δ_A матрицы A.

В заключение мы приведем два результата, касающихся граничных собственных значений неприводимых матриц.

Следующая теорема является эквивалентной переформулировкой теоремы 3.4.

Теорема 4.4. *Пусть матрица A вида (4.9) неприводима. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям*

$$\lambda \notin \bigcap_{i=1}^{n} G_i(\Delta_A) \tag{4.11}$$

и

$$\begin{gathered} [|\lambda - a_{ii}| - r_i'(\Delta_A)]\, [|\lambda - a_{jj}| - r_j'(\Delta_A)] \geqslant \tilde{r}_i(A)\, \tilde{r}_j(A) \\ \text{для всех} \quad i \leqslant n_1 \quad \text{и} \quad j > n_1, \end{gathered} \tag{4.12}$$

является собственным значением матрицы A тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{ii}| &= r_i'(\Delta_A) + c^{-1}\tilde{r}_i(A), \qquad & i \leqslant n_1, \\ |\lambda - a_{jj}| &= r_j'(\Delta_A) + c\, \tilde{r}_j(A), \qquad & j > n_1, \end{aligned} \tag{4.13}$$

где $c > 0$ – некоторая константа, и выполнено условие

$$\Pi_\gamma(A) \Big/ \prod_{i \in \bar{\gamma}} (\lambda - a_{ii}) > 0 \quad \text{для всех} \;\; \gamma \in \mathfrak{C}(A),\ |\gamma| \geqslant 2\,. \tag{4.14}$$

Заметим, что при $c < 1$ из условий (4.13) следует, что

$$\lambda \in \bigcup_{j>n_1} G_j^0(A) \qquad \text{и} \qquad \lambda \notin \bigcup_{i\leqslant n_1} G_i(A),$$

а при $c > 1$, что

$$\lambda \in \bigcup_{i\leqslant n_1} G_i^0(A) \qquad \text{и} \qquad \lambda \notin \bigcup_{j>n_1} G_j(A),$$

где мы используем обозначение

$$G_k^0(A) = \{z \in \mathbb{C}: \ |z - a_{kk}| < r_k'(A)\}.$$

Тем самым при $c \neq 1$ λ не является граничной точкой ни одного из кругов Гершгорина для A.

В случае же, когда $c = 1$, соотношения (4.13) означают, что

$$|\lambda - a_{ii}| = r_i'(A), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

т.е. λ является общей граничной точкой всех кругов Гершгорина для матрицы A. Кроме того, при всех $c > 0$ точка λ является общей граничной точкой всех “псевдоовалов”

$$[|\lambda - a_{ii}| - r_i'(\Delta_A)]\,[|\lambda - a_{jj}| - r_j'(\Delta_A)] \leqslant \tilde r_i(A)\,\tilde r_j(A), \quad i \leqslant n_1, \quad j > n_1.$$

Заключительный результат относится к более общему случаю, когда $k = 1$, но $N \geqslant 2$ произвольно, и, ввиду замечания 2.5, равносилен следствию 2.5.

Теорема 4.5. *Пусть матрица $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant N \geqslant 2$, неприводима и пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям*

$$\lambda \notin \bigcup_{i=1}^{n} G_i(\Delta_A) \tag{4.15}$$

и

$$[|\lambda - a_{ii}| - r_i'(\Delta_A)]^\alpha\,[|\lambda - a_{jj}| - r_j'(\Delta_A)]^{1-\alpha} \geqslant \tilde r_i(A)^\alpha\,\tilde r_j(A)^{1-\alpha} \tag{4.16}$$

$$\text{для всех } i \neq j \text{ таких, что } (S_A)_{ij} \neq 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

является собственным значением матрицы A тогда и только тогда, когда справедливы следующие утверждения:

(i) *выполнено условие* (4.14);

(ii) – *либо*

$$|\lambda - a_{ii}| = r'_i(A), \qquad i = 1, \dots, n,$$

– *либо* $\alpha = 1/2$, $\langle n \rangle = S_1 \cup S_2$, *где для некоторой константы* $c > 1$

$$S_1 = \{i \in \langle n \rangle : \ |\lambda - a_{ii}| = r'_i(\Delta_A) + c\, \tilde{r}_i(A)\},$$

$$S_2 = \{j \in \langle n \rangle : \ |\lambda - a_{jj}| = r'_j(\Delta_A) + c^{-1}\, \tilde{r}_j(A)\},$$

и если множества S_1 *анд* S_2 *упорядочены естественно, то*

$$\begin{bmatrix} A[S_1] & 0 \\ 0 & A[S_2] \end{bmatrix} = P^T \Delta_A P,$$

где P – *матрица перестановки, меняющая местами блочные строки и столбцы матрицы* Δ_A.

В частности, из теоремы 4.5 следует, что точка λ, удовлетворяющая условиям (4.15) и (4.16), является собственным значением неприводимой матрицы A только в том случае, когда все неравенства в (4.16) выполняются с равенствами, т.е. λ – общая граничная точка всех областей $P_{\alpha,\,\pi}(A)$, $\pi \in \mathfrak{P}_1(S_A)$.

Литература

1. Л. С. Дашниц, М. С. Зусманович, *О некоторых критериях регулярности матриц и локализации спектра.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ., **10** (1970), 1092–1097.
2. Л. Ю. Колотилина, *Проблема вырожденности/невырожденности для матриц, удовлетворяющих условиям диагонального преобладания, формулируемым в терминах ориентированных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **309** (2004), 40–83.
3. A. Berman, R. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* — Academic Press, New York (1969).
4. R. Brualdi, *Matrices, eigenvalues, and directed graphs.* — Linear Multilinear Algebra, **11** (1982), 143–165.
5. L. Cvetkovic, V. Kostic, R. S. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion set.* — Electron. Trans. Numer. Anal., **18** (2004), 73–80.
6. Y. Gao, X. Wang, *Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M-matrices.* — Linear Algebra Appl., **169** (1992), 257–268.
7. F. Harary, *Graph Theory.* — Addison–Wesley Publ. Co. (1969).
8. T. Huang, *A note on generalized diagonally dominant matrices.* — Linear Algebra Appl., **225** (1992), 237–242.
9. L. Yu. Kolotilina, *Nonsingularity/singularity criteria for nonstrictly block diagonally dominant matrices.* — Linear Algebra Appl., **359** (2003), 133–159.

10. L. Yu. Kolotilina, *Generalizations of the Ostrowski-Brauer theorem.* — Linear Algebra Appl., **364** (2003), 65–80.
11. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles.* — Springer Series Comput. Math., **36**, Springer (2004).

Kolotilina L. Yu., Pseudoblock conditions of diagonal dominance.

The paper presents new pseudoblock diagonal-dominance conditions for matrices with fixed block partitioning, which generalize the pointwise kth-order diagonal-dominance conditions and pointwise circuit diagonal-dominance conditions. For matrices satisfying pseudoblock conditions, the singularity/nonsingularity problem is considered. In particular, for block 2×2 matrices, certain known results are improved and generalized. Some eigenvalue inclusion regions corresponding to pseudoblock nonsingularity conditions are presented.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 14 июня 2005 г.