Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 323, 2005 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ. 7. МЕТОД *PG–q* ФАКТОРИЗАЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

§1. *PG-q* факторизация

Пусть $F = F(\mu_1, \dots, \mu_q)$ есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица полного ранга. Для определенности $\operatorname{rank} F = m$ ($F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$). Рассмотрим факторизацию матрицы F (PG-q факторизацию) вида

$$F = PG, \quad P = \prod_{k=1}^{q-1} P_k, \quad P_k = \prod_{i=1}^{n_k} \nabla_i^{(k)}. \tag{1}$$

Здесь G есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга m; $\nabla_i^{(k)}$ ($k = 1, \dots, q-1$, $i = 1, \dots, n_k$, $n_k = C_q^k$) есть регулярная $(q-k)$-параметрическая полиномиальная $m \times m$ матрица, характеристический полином $f[\nabla_i^{(k)}]$ которой является примитивным над кольцом полиномов от $q-k-1$ переменных;[1] P есть наибольший левый делитель матрицы F, т.е. регулярная q-параметрическая полиномиальная матрица, характеристический полином которой примитивен над кольцом полиномов от $q-1$ переменных.

Нули характеристического полинома $f[F]$ матрицы F будем обозначать наборами из q параметров вида $(\overline{\lambda}_k, \overline{\mu}^*_{q-k})$, где $\overline{\lambda}_k$ есть мультипараметр, состоящий из k свободных (нефиксированных) параметров, дополнительных к мультипараметру $\overline{\mu}^*_{q-k}$, состоящему из $q-k$ фиксированных параметров. Если не возникает двусмысленного толкования, то нули $f[F]$ (или, что то же, точки конечного спектра матрицы F) будем обозначать также символом $(\lambda, \overline{\mu}_*)$, где λ есть один из параметров мультипараметра $\overline{\lambda}_k$,

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 05-01-00945 и НШ 2268.2003.1.

[1]Среди матриц $\nabla_i^{(k)}$ могут быть тривиальные (унимодулярные) матрицы.

т.е. свободный параметр, $\overline{\mu}_*$ есть набор из $q-1$ дополнительных к λ параметров, среди которых, по крайней мере, один является фиксированным.

Если матрица F имеет полный столбцовый ранг, то GP-q факторизация F представляется равенством

$$F = \widehat{G}\widehat{P},$$

где $\widehat{G} := G^T$, $\widehat{P} = P^T$, $F^T = PG$ есть PG-q факторизация матрицы F^T.

1.1. Алгоритм PG-q факторизации матрицы

Пусть $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$. В предположении, что PG-q факторизация F существует, рассмотрим алгоритм ее вычисления. Алгоритм состоит из $q-1$ типичных (внешних) шагов. Каждый шаг k выделяет из преобразуемой матрицы левый делитель P_k.

Рассмотрим реализацию шага k. Пусть в результате выполнения $k-1$ шагов получено равенство:

$$F = P_1 \dots P_{k-1} G_{k-1}. \qquad (2)$$

Следует найти разложение вида

$$G_{k-1} = P_k G_k. \qquad (3)$$

Начальными данными шага k являются q-параметрическая полиномиальная $m\times n$ матрица G_{k-1} и множество $\alpha_k := \{\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_{n_k}^{(k)}\}$ мультипараметров $\alpha_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, n_k$ $(n_k = C_q^k)$. Мультипараметр $\alpha_i^{(k)}$ состоит из так называемых ведущих параметров $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ из множества $\{\mu_1, \dots, \mu_q\}$, по степеням которых преобразуемая матрица записывается в виде матричного полинома. Элементы множества α_k различны между собой и могут располагаться в любом лексикографическом порядке, фиксированном для каждого шага k. Например, $\alpha_k = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k; \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}; \dots, \lambda_{q-k+1}, \dots, \lambda_q\}$.

Переход от шага $k-1$ к шагу k состоит из n_k типичных (внутренних) шагов. Для первого (внутреннего) шага начальными данными являются $F_1^{(k)} := G_{k-1}$ и $\alpha_1^{(k)} = \lambda_1, \dots, \lambda_1 \equiv \mu_1, \dots, \mu_k$.

Выполняются следующие операции.

(1) Матрица $F_1^{(k)}$ представляется в виде матричного полинома от k переменных:

$$F_1^{(k)} = \sum_{t_1=0}^{s_1} \cdots \sum_{t_k=0}^{s_k} C_{t_1,\ldots,t_k}^{(k)} \lambda_1^{t_1} \ldots \lambda_k^{t_k}, \tag{4}$$

где $C_{t_1,\ldots t_k}^{(k)} = C_{t_1,\ldots t_k}^{(k)}(\mu_{k+1},\ldots,\mu_q)$ есть полиномиальная $(q-k)$-параметрическая $m \times n$ матрица.

(2) Из коэффициентов $F_1^{(k)}$ формируется $(q-k)$-параметрическая полиномилальная матрица

$$\mathfrak{A}_1^{(k)} := [C_{t_1,\ldots,t_k}^{(k)},\ldots,C_{0,\ldots,0}^{(k)}],$$

имеющая размеры $m \times nN_k$, $N_k := \prod_{i=1}^{k}(s_i+1)$.

(3) К матрице $\mathfrak{A}_1^{(k)}$ применяется алгоритм ∇V-$(q-k)$ факторизации [1]:

$$\mathfrak{A}_1^{(k)} = \nabla_1^{(k)} V_1^{(k)}, \tag{5}$$

где $\nabla_1^{(k)}$ – регулярная полиномиальная $m \times m$ матрица, зависящая от $q-k$ параметров, $V_1^{(k}$ есть полиномиальная $(q-k)$-параметрическая $m \times nN_k$ матрица.

Результатом выполнения операций (1)–(3) являются равенства

$$F_1^{(k)} = \mathfrak{A}_1^{(k)}\Lambda_1^{(k)} = \nabla_1^{(k)}V_1^{(k)}\Lambda_1^{(k)} := \nabla_1^{(k)}F_2^{(k)}, \quad F_2^{(k)} := V_1^{(k)}\Lambda_1^{(k)}, \tag{6}$$

где $\Lambda_1^{(k)} := [\lambda_1^{s_k},\ldots,\lambda_k^{s_k}I_n,\ldots,I_n]^B$ есть полиномиальная k-параметрическая $nN_k \times n$ матрица, составленная в соответствии с выбранным расположением коэффициентов при формировании матрицы $\mathfrak{A}_1^{(k)}$, I_n – единичная матрица, $[\ldots]^B$ – символ блочного транспонирования.

Осуществляется переход к выполнению следующего (второго) внутреннего шага. В качестве начальных данных берется матрица $F_2^{(k)}$ из (6) и следующий набор ведущих параметров из множества α_k.

В результате выполнения n_k внутренних шагов будет получено равенство (3), где $P_k := \nabla_1^{(k)},\ldots,\nabla_{n_k}^{(k)}$, $G_k = F_{n_k}^{(k)}$.

Результатом выполнения $q-1$ внешних шагов будет разложение (1).

Обоснование алгоритма PG-q факторизации матрицы F полного строчного ранга (в предположении, что $\{\sigma_r[F] \cap \sigma_s[F]\}$ есть пустое множество) аналогично обоснованию алгоритма неполной относительной факторизации матрицы F из [2].

1.2. PG-q факторизация скалярного полинома

Пусть $f = f(\mu_1, \ldots, m_q)$ есть скалярный полином от q переменных. Равенство вида

$$f = p_0 p_1, \ldots, p_{q-1}, \quad p_k = \prod_{i=1}^{n_k} \delta_i^{(k)}, \tag{7}$$

назовем PG-q факторизацией скалярного полинома. Здесь $p_0 = p_0(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ – полином от q переменных, примитивный над кольцом полиномов от $q-1$ переменных, $\delta_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots, n_k$, $n_k = C_q^k$, есть полином от $q-k$ переменных из множества $\{\mu_1, \ldots, \mu_q\}$, примитивный над кольцом полиномов от $q-k-1$ переменных.

Алгоритм построения разложения (7) состоит из $q-1$ внешних шагов. Каждый шаг с номером k выделяет из преобразуемого полинома делитель p_k.

Рассмотрим реализацию шага k. Пусть в результате выполнения $k-1$ внешних шагов получено равенство

$$f = p_1, \ldots, p_{k-1} g_{k-1}.$$

Следует найти разложение вида

$$g_{k-1} = p_k g_k. \tag{8}$$

Начальными данными для выполнения шага k являются полином g_{k-1} от q переменных и множество α_k, элементами которого (аналогично алгоритму п. 1.1) являются наборы ведущих параметров $\lambda_{i_1}, \ldots \lambda_{i_k}$, выбираемые из множества $\{\mu_1, \ldots, \mu_q\}$ для записи g_{k-1} в виде полинома от k переменных. Элементы множества α_k различны между собой и располагаются в любой последовательности, фиксированной для каждого шага k.

Переход от шага $k-1$ к шагу k алгоритма состоит из n_k внутренних шагов.

Начальными данными первого (типичного) шага является полином $f^{(1)} := g_{k-1}$ и набор ведущих параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Выполняются следующие операции.

(1) Полином $f^{(1)}$ записывается в виде полинома от k переменных:

$$f^{(1)} = \sum_{t_1=0}^{s_1} \cdots \sum_{t_k=0}^{s_k} c^{(k)}_{t_1,\ldots,t_k} \lambda_1^{t_1}, \ldots, \lambda_k^{t_k}. \tag{9}$$

Здесь коэффициенты $c^{(k)}_{t_1,\ldots,t_k}$ суть полиномы от $q-k$ переменных, дополнительных к параметрам, выбранным в качестве ведущих в полиноме $f^{(1)}$. Для первого внутреннего шага $c^{(k)}_{t_1,\ldots,t_k} = c^{(k)}_{t_1,\ldots,t_k}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)$.

(2) Находится $\delta_1^{(k)}$, т.е. НОД последовательности полиномов $\{c^{(k)}_{t_1,\ldots,t_k}\}$ из (9), и равенства

$$c^{(k)}_{t_1,\ldots,t_k} = \delta_1^{(k)} \hat{c}_{t_1,\ldots,t_k},$$

где $\{\hat{c}^{(k)}_{t_1,\ldots,t_k}\}$ есть последовательность взаимно простых полиномов от $q-k$ переменных над кольцом полиномов от $q-k-1$ переменных.

Результатом выполнения операций (1), (2) является разложение вида

$$f^{(1)} = \delta_1^{(k)} f^{(2)}; \quad f^{(2)} := \sum_{t_1=0}^{s_1} \cdots \sum_{t_k=0}^{s_k} \hat{c}^{(k)}_{t_1,\ldots t_k} \lambda^{t_1}, \ldots, \lambda_k^{t_k}, \tag{10}$$

где $\delta_1^{(k)} = \delta_1^{(k)}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)$; $f^{(2)} = f^{(2)}(\mu_1, \ldots, \mu_q)$.

(3) Осуществляется переход к выполнению следующего (второго) внутреннего шага, начальными данными которого являются полином $f^{(2)}$ и следующий набор ведущих параметров из множества α_k.

В результате выполнения n_k внутренних шагов будут найдены полиномы

$$p_k = \delta_1^{(k)}, \ldots, \delta_{n_k}^{(k)} \quad \text{и} \quad g_k = f^{(n_k)}.$$

Результатом выполнения $q-1$ внешних шагов будет разложение (7), где $p_0 = g_{q-1}$.

Замечания. 1. Выполнение первого внешнего шага алгоритма $PG-q$ факторизации матричного (скалярного) полинома совпадает с алгоритмом неполной относительной факторизации (НОФ-q) матрицы F (полинома f) (см. [2]). Так если $F = \bar{P}\bar{F}$ – результат алгоритма НОФ матрицы F, то $P_1 = \bar{P}$, $G_1 = \bar{F}$. Аналогично, если $f = \varphi g$ есть результат алгоритма НОФ для полинома f, то $p_1 = \varphi$, $g_1 = g$, где g есть полином от q переменных, примитивный над кольцом полиномов от $q-1$ переменных.

2. Представление матрицы F вида $F = P_1 \dots P_k G_k$, полученное на шаге k алгоритма PG-q факторизации, будем называть PG-k факторизацией q-параметрической полиномиальной матрицы F.

1.3. Свойства PG-q факторизации

1°. PG-q факторизация является ранговой факторизацией матрицы F, т.е.

$$\operatorname{rank} F = \operatorname{rank} P = \operatorname{rank} G = m,$$

$\operatorname{rank} P = \operatorname{rank} P_k = \operatorname{rank} \nabla_i^{(k)} = m$, $k = 1, \dots, q-1$, $i = 1, \dots, n_k$. Справедливость следует из алгоритма построения $PG-q$ факторизации.

2°. $N_c[F] = N_c[G]$, $\sigma_s^+[F] = \sigma_s^+[G]$.

3°. Имеют место соотношения[2]

$$\sigma[F] = \sigma[P] \cup \{\sigma[P] \cap \sigma[G]\} \cup \sigma[G];$$

$$\sigma_r[F] = \sigma[P] \cup \sigma_r[G]; \quad \sigma_{rs}[F] = \{\{\sigma[P] \cup \sigma_r[G]\} \cap \sigma_s^+[F]\} \cup \sigma_{rs}[G].$$

Здесь $\sigma_s^+[G] = \sigma_s^+[F]$; $\sigma_{rs}[G] := \sigma_r[G] \cap \sigma_s^+[G]$; $\sigma_r[G] = \{|\cdot| : g[F] = 0\}$; $g[F]$ есть полином, входящий в неполную относительную факторизацию характеристического полинома $f[F]$ матрицы F, так что $g[F]$ есть полином от q переменных, примитивный над кольцом полиномов от $q-1$ переменных из множества $\{\mu_1, \dots, \mu_q\}$. Справедливость следует из 1° и 2° с учетом определения регулярного спектра матрицы (см. [6]).

4°. Каждой точке $(\lambda, \overline{\mu}_*) \in \sigma_{r_1}[P]$ соответствует левая $(\lambda, \overline{\mu}_*)$; y_* и правая $(\lambda, \overline{\mu}_*)$, x_* собственные пары матрицы F. При этом левые собственные векторы матриц F и P совпадают, а правые собственные векторы связаны соотношением

$$G(\lambda, \overline{\mu}_\alpha) x_* = \eta_*, \quad \text{где} \quad (\lambda, \mu_*) \notin \sigma_r[G].$$

Справедливость следует из определения собственных пар [6].

5°. Характеристические полиномы $f[P_i]$ и $f[P_j]$ при $i \neq j$ не имеют общих нулей. Справедливость следует из свойств нулей

---

[2] $\sigma_{r_1}[F]$ обозначает множество точек регулярного спектра $\sigma_r[F]$, уровень наследственности которых не превосходит единицы. На $\sigma_{r_1}[F]$ будем ссылаться как на собственный спектр матрицы F (см. [6]).

полиномов $f[P_k]$ и $f[\nabla_i^{(k)}]$. По построению нули $f[\nabla_i^{(k)}]$ зависят от $q-k$ фиксированных параметров, входящих в мультииндекс $\beta_i^{(k)}$, где $\{\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)}\} = \{\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_q}\}$, $\alpha_i^{(k)} \neq \alpha_j^{(k)}$, $\beta_i^{(k)} \neq \beta_j^{(k)}$ при $i \neq j$.

6°. Регулярная q-параметрическая матрица $P = \prod\limits_{k=1}^{q-1} P_k$ из равенства (1) является наибольшим левым делителем матрицы F: характеристический полином $f[P]$ не содержит нулей, зависящих от всех q переменных (или, другими словами, является примитивным полиномом над кольцом полиномов от $q-1$ переменных).

Действительно, по построению матрица G не содержит собственных пар, порожденных точками $(\lambda, \overline{\mu}_*)$ спектра матрицы F, так как совпадающие нули полиномов $f[P]$ и $f[G]$ принадлежат множеству $\{\sigma[P] \cap \sigma_s[G]\}$ и не могут быть исчерпаны из $\sigma[G]$.

7°. Результатом применения алгоритма PG-q факторизации к регулярной q-параметрической матрице F являются равенства

$$F = PG = \hat{G}\hat{P}, \quad f[F] = f[P]f[G] = f[\hat{P}]f[\hat{G}].$$

Здесь P и G ($\hat{P}$ и $\hat{G}$) регулярные q-параметрические матрицы; полином $f[G]$ (полином $f[\hat{G}]$) примитивен над кольцом полиномов от $q-1$ переменных; нули $f[G]$ (нули $f[\hat{G}]$) имеют фиксированными все q параметров; полиномы $f[P]$ и $f[\hat{P}]$ зависят от q переменных, а их нули имеют, по крайней мере, один из параметров свободным.

§2. Применение алгоритма PG-q факторизации

2.1. ΔG-q факторизация и алгоритм вычисления

Пусть $F \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, ρ – ранг F. Равенство вида

$$FG = [\widehat{\Delta}, \mathbb{O}] \tag{11}$$

называется ΔG-q факторизацией матрицы F, если выполнены следующие условия: $\mathbb{O}$ – нулевая $n \times (n-\rho)$ матрица; $G(\lambda, \overline{\mu}) = [\hat{G}_1, \hat{G}_0]$ – регулярная, q-параметрическая полиномиальная матрица, унимодулярная по λ. Блоки $\hat{G}_1$ и $\hat{G}_0$ матрицы G имеют соответственно размеры $n \times \rho$ и $n \times (n-\rho)$. $\hat{G}_0$ – базисная матрица нуль-пространства $N_c[F]$ из правых полиномиальных решений матрицы F, $\sigma_{r_1}[\hat{G}_1] = \varnothing$, $\sigma_{r_1}[\hat{G}_0] = \varnothing$; $\widehat{\Delta} = F\hat{G}_1$ – q-параметрическая полиномиальная $m \times \rho$ матрица ранга ρ, регулярный спектр которой содержит объединение регулярных спектров $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{rs}[F]$.

Алгоритм вычисления ΔG-q факторизации выполняет следующие операции.

(1) К матрице $F := \sum\limits_{k=0}^{s} C_k(\overline{\mu})\lambda^k$ применяется алгоритм ΔW-q факторизации [5], т.е. находится матрица $W = W(\lambda, \overline{\mu})$, реализующая разложение вида

$$FW = [\Delta, \mathbb{O}]. \tag{12}$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $n\times(n-\rho)$ матрица, $W = [W_1, W_0]$, $W_0 = W_0(\lambda, \overline{\mu})$ – базисная матрица $N_c[F]$; матрицы $W := W(\lambda, \overline{\mu}) \in \mathcal{F}_n^{n\times n}$, $W_1 \in \mathcal{F}_\rho^{n\times\rho}$, $W_0 \in \mathcal{F}_{n-\rho}^{n\times(n-\rho)}$ имеют регулярные спектры, не зависящие от параметра λ (коротко говоря, являются унимодулярными по параметру λ).

(2) К матрицам W_1^T и W_0^T применяется алгоритм PG-q факторизации, т.е. находятся разложения вида

$$W_1 = \hat{G}_1\hat{P}_1, \quad W_0 = \hat{G}_0\hat{P}_0.$$

(3) Формируется матрица

$$G := [\hat{C}_1, \hat{G}_0] = W\,\mathrm{blockdiag}\{\hat{P}_1^{-1}, \hat{P}_0^{-1}\},$$

реализующая искомую ΔG-q факторизацию (11).

Для обоснования алгритма ΔG-q факторизации рассмотрим следующие свойства.

1°. Матрица G, реализующая разложение (11), является регулярной q-параметрической полиномиальной матрицей, унимодулярной по параметру λ:

$$\sigma[G] = \{|\cdot| : \det G = 0\} = \sigma_\nu[W].$$

Здесь через $\sigma_\nu[W] = \sigma_\nu[G]$ обозначено множество точек $(\lambda, \bar{\nu}_*)$ спектра матрицы $W(\lambda, \overline{\mu}) = [W_1, W_0]$, каждой из которых соответствует спектральная пара $(\lambda, \bar{\nu}_k)$; $y_k = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$, удовлетворяющая равенству

$$W_1(\lambda, \nu_*)y_1 = -W_0(\lambda, \nu_*)y_0 \neq 0.$$

2°. Спектр матрицы $G = G(\lambda, \overline{\mu})$ совпадает с множеством точек $\sigma_{\lambda\nu}[W]$, так что любой точке $(\lambda, \nu_*) \in \sigma[G]$ соответствует спектральная пара (λ, ν_*), $\hat{y}_* = \begin{pmatrix} \hat{y_1} \\ \hat{y_0} \end{pmatrix}$. При этом

$$\hat{G}_1(\lambda, \nu_*)\hat{y}_1 = -\hat{G}_0(\lambda, \nu_*)y_0 \neq 0.$$

Справедливость следует из способа построения матрицы G.

3°. $\hat{G}_0(\lambda, \overline{\mu})$ есть базисная матрица нуль-пространства $N_c[F]$ из правых полиномиальных решений матрицы F.

Справедливость следует из способа построения $\hat{G}_0$ и свойств алгоритма ΔW-q факторизации F.

4°. Имеют место равенства

$$\sigma_{r1}[\hat{G}_i] = \varnothing, \quad \sigma_r[\hat{G}_i] = \sigma_{rs}[\hat{G}_i], \qquad i = 1, 0.$$

Для определенности доказательство приводим для матрицы $\hat{G}_1$. По построению $\hat{G}_1 = W_1\hat{P}_1^{-1}$. Рассмотрим PG-q факторизацию матрицы $W_1^T : W_1^T = P_1G_1$. С учетом свойств PG-q факторизации имеем

$$\sigma_r[W_1^T] = \sigma[P_1] \cup \{\sigma[P_1] \cap \sigma[\hat{G}_1^T]\} \cup \sigma_{rs}[\hat{G}_1] \cup \sigma_{r1}[\hat{G}_1^T], \tag{13}$$

где $\sigma_{r_1}[\hat{G}_1^T] = \sigma_{r_1}[\hat{G}_1]\} = \{| \cdot | : g[G_1] = 0\} = \varnothing$, так как точки регулярного спектра матрицы W_1 (матрицы $\hat{G}_1$) не зависят от, по крайней мере, одного параметра λ. По построению $\sigma_r[\hat{G}_1] = \sigma_r[W_1] \setminus \sigma[P_1]$. Тогда из (13) находим

$$\sigma_r[\hat{G}_1] = \{\sigma[P_1] \cap \sigma[\hat{G}_1^T]\} \cup \sigma_{rs}[\hat{G}_1] = \{\sigma[P_1] \cap \sigma_s^+[\hat{G}_1^T]\} \cup \sigma_{rs}[\hat{G}_1],$$

так как $\sigma[\hat{G}_1^T] = \sigma_{rs}[\hat{G}_1] \cup \sigma_s^+[\hat{G}_1^T]$. С другой стороны, принимая во внимание, что $\sigma_{r_1}[\hat{G}_1] = \varnothing$ по определению регулярного спектра (см. [6]), имеем $\sigma_r[\hat{G}_1] = \sigma_{rs}[\hat{G}_1]$. Следовательно, $\{\sigma[P_1] \cap \sigma_s^+[G_1^T]\} \subseteq \sigma_{rs}[\hat{G}_1]$. Отсюда $\sigma_r[\hat{G}_1] = \sigma_{rs}[\hat{G}_1]$, что и завершает доказательство свойства 4°.

5°. Справедливо соотношение

$$\sigma[\hat{G}_1] = \sigma_{rs}[\hat{G}_1] = \{\sigma_{rs}[\hat{G}_1] \cap \sigma_{rs}[F]\} \cup \{\sigma_{rs}[\hat{G}_1) \cap \sigma_s^+[F]\}.$$

Действительно, матрица $G(\lambda, \overline{\mu})$, реализующая ΔG-q факторизацию (11), является λ-сопутствующей матрицей для $F(\lambda, \overline{\mu}) \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$, что следует из доказанных выше свойств $1^\circ - 3^\circ$. Тогда справедливость 5° следует из свойств λ-сопутствующих матриц (см. [6], п. 2.5).

6°. Матрица $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}(\lambda, \overline{\mu})$ из (11) является регулярной q-параметрической полиномиальной матрицей, спектр которой удовлетворяет равенству

$$\sigma[\widehat{\Delta}] = \sigma_{r1}[F] \cup \{\sigma_r[F] \cap \sigma_s^+[F]\}. \tag{14}$$

Регулярность $\widehat{\Delta}$ следует из равенства $\widehat{\Delta} = F\hat{G}_1$, так как $\operatorname{rank}\widehat{\Delta} = \operatorname{rank} F = \operatorname{rank}\hat{G}_1 = m$, и $\widehat{\Delta}$ есть квадратная матрица. Докажем справедливость (14). Спектр матрицы $\widehat{\Delta}$ состоит из точек $\sigma_r[\widetilde{\Delta}]$, в которых уравнение $F\hat{G}_1 x = 0$ $(\hat{G}_1 x = y,\ Fy = 0)$ имеет нетривиальное решение. Представим $\sigma_r[\widehat{\Delta}]$ в виде трех множеств: $\sigma_r[\widehat{\Delta}] = I \cup II \cup III$, где $I := \sigma_r[F] \setminus \sigma_r[\hat{G}_1] = \sigma_r[F] \setminus \sigma_{rs}[\hat{G}_1]$; $II := \sigma_r[F] \cap \sigma_r[\hat{G}_1]$, а множество III состоит из точек $\sigma[\hat{G}_1]$, не принадлежащих множеству $\sigma_r[F]$.

С учетом свойства 5° имеем $III = \sigma_{rs}[\hat{G}_1] \cap \sigma_s^+[F]$. Докажем равенство $II = \sigma_{rs}[\hat{G}_1]$. Принимая во внимание равенства $\sigma_r[F] = \sigma_{r1}[F] \cup \sigma_{rs}[F]$ и $\sigma_{rs}[F] = \sigma_{rs}[G_1]$, мы выводим

$$II = \sigma_r[F] \cap \sigma_r[\hat{G}_1] = \{\sigma_{r_1}[F] \cup \sigma_{rs}[F]\} \cap \sigma_{rs}[\hat{G}_1] =$$

$$= \{\sigma_{r1}[F] \cap \sigma_{rs}[\hat{G}_1]\} \cup \{\sigma_{rs}[F] \cap \sigma_{rs}[\hat{G}_1]\} =$$

$$= \{\sigma_{r_1}[F] \cap \sigma_{r_s}[\hat{G}_1]\} \cup \sigma_{r_s}[\hat{G}_1] = \sigma_{rs}[\hat{G}_1].$$

Подставляя множества I, II и III в $\sigma_r\ [\widehat{\Delta}]$, убеждаемся в справедливости (14). Этим завершено доказательство свойства 5° и обоснование алгоритма $\Delta G{-}q$ факторизации.

Замечания. 1. Выбор ведущего параметра λ при записи $F \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ в виде матричного полинома $F(\mu_1, \ldots, \mu_q) = \sum_{k=0}^{s} C_k(\overline{\mu})\lambda^k$ в алгоритме ΔG-q факторизации назовем согласованным, если λ совпадает со свободным параметром, входящим в любую критическую точку $(\lambda, \overline{\nu}_k)$ спектра матрицы F. При согласованном выборе λ справедливы следующие утверждения:

1) Все критические точки $\sigma[F]$, имеющие λ одним из своих свободных параметров, принадлежат спектру матрицы G, реализующей ΔG-q факторизацию.

2) Любая точка $(\lambda, \nu_*) \in \sigma[G]$ является точкой спектра матрицы $\widehat{\Delta}$:

$$\widehat{\Delta}(\lambda, \bar{\nu}_*)y_1 = 0, \quad y_1 \neq 0, \quad \text{где} \quad y_* = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

$(\lambda, \overline{\nu}_x)$; y_* есть спектральная пара матрицы G.

2. Если пара $(\lambda, \overline{\nu}_*)$, $y_* = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$, удовлетворяющая условию $\hat{G}_1(\lambda, \bar{\nu}_*)y_1 = -(\hat{G}_0(\lambda, \bar{\nu}_x)y_0 \neq 0$, является спектральной парой матрицы $G = [\bar{G}_1, \bar{G}_0]$, то $(\lambda, \bar{\nu}_*)$ есть критическая точка спектра матрицы F.

Справедливость следует из определения критических точек (см. [6]) и свойств матрицы $\widehat{\Delta}$.

2.2. Построение базиса $N_c[F]$, не содержащего собственного спектра

Базисные матрицы нуль-пространства $N_c[F]$ q-параметрической полиномиальной матрицы $F \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ могут иметь различные спектры. При этом сингулярный и смешанный спектры одинаковы для различных базисов $N_c[F]$ и совпадают с сингулярным и смешанным спектрами матрицы F. Несовпадающими могут быть только собственные спектры. По определению, собственный спектр матрицы состоит из собственных значений, порожденных нулями характеристического полинома матрицы (в том числе и нулями полинома g), имеющими уровень наследственности не больше единицы (см. [6]). Неоднозначности спектральных характеристик в базисных матрицах можно избежать исчерпыванием собственных спектров. Например, это исчерпывание можно реализовать, если базисная матрица имеет регулярный спектр, не зависящий от, по крайней мере, одного из параметров (или, что то же, характеристический полином базисной матрицы от q-переменных не содержит нулей полинома g). Базисную матрицу W_0 с такими свойствами можно построить алгоритмом ΔW-q факторизации матрицы $F(\lambda, \overline{\mu}) = \sum\limits_{k=0}^{s} C_k(\overline{\mu})\lambda^k$. Преобразование W_0 в искомый базис $\hat{G}_0$, где $\sigma_{r_1}[\hat{G}_0] = \varnothing$, реализуется с помощью алгоритма PG-q факторизации матрицы W_0^T аналогично рассморенному в п.2.1.

2.3. Вычисление относительной факторизации скалярного полинома

Пусть $f := f(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ есть скалярный полином от q переменных, относительную факторизацию [3] которого следует найти. С этой целью полином f представляем в виде

$$f = p_0 \prod_{k=1}^{q-1} \prod_{i=1}^{n_k} \delta_i^{(k)}, \tag{15}$$

используя алгоритм PG-q факторизации скалярного полинома из п. 1.2.

Докажем, что факторизация f вида (15) является относительной факторизацией полинома f. Действительно, по построению p_0 есть полином от q переменных, примитивный над кольцом полиномов от $q-1$ переменных. Другими словами, p_0 есть несократимый полином (или произведение несократимых полиномов) от q переменных. Каждый полином $\delta_i^{(k)}$ из (15), при фиксированных индексах i и k, есть полином от $q-k$ переменных, примитивный над кольцом полиномов от $q-k-1$ переменных. Из сказанного следует, что PG-q факторизация скалярного полинома вида (15) является также и его относительной факторизацией.

2.4. Вычисление наибольшего общего делителя последовательности скалярных полиномов

Пусть $f_1, \ldots, f_n$ – скалярные полиномы от k ($k \leqslant q$) переменных, наибольший общий делитель δ которых следует найти.

Для решения задачи выполняются следующие операции.

(1) К каждому полиному f_r, $r = 1, \ldots, n$, применяется алгоритм PG-q факторизации из п. 1.2, т.е. находятся равенства

$$f_r = p_0^{(r)} p_1^{(r)}, \ldots, p_{q-1}^{(r)},$$

где

$$p_k^{(r)} = \prod_{i=1}^{n_k} \delta_{ir}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, q-1, \quad r = 1, \ldots, n.$$

(2) Вычисляется полином $\delta_i^{(k)}$, т.е. НОД последовательности $\{\delta_{ir}^{(k)}\}$, $r = 1, \ldots, n$, для каждой фиксированной пары индексов i и k, $i = 1, \ldots, n_k$; $k = 0, 1, \ldots, q-1$. С этой целью к матрице $F_i^{(k)} :=$

$[\delta_{i_1}^{(k)}, \dots, \delta_{i_n}^{(k)}]$ применяется алгоритм ΔG-q факторизации из п. 2.1:

$$F_i^{(k)} G_i^{(k)} = [\delta_i^{(k)}, \mathbb{O}]. \tag{16}$$

При построении равенства (16) для фиксированной пары i и k, $k \neq 0$, матрица $F_i^{(k)}$ записывается в виде матричного полинома по степеням параметра λ, выбранного в качестве ведущего. В качестве λ берется любой из параметров мультипараметра $\beta_i^{(k)}$. Заметим, что при таком выборе λ спектр матрицы $G_i^{(k)}$ не будет порождать посторонних нулей в полиноме $\delta_i^{(k)}$, так что $\delta_i^{(k)}$ является искомым НОД полиномов последовательности $\{\delta_{ir}^{(k)}\}$, $r = 1, \dots, n$.

Для вычисления НОД полиномов последовательности $\{p_0^{(r)}\}$, $r = 1, \dots, n$, к матрице $F^{(0)} := [p_0^{(1)}, \dots, p_0^{(n)}]$ также применяется алгоритм ΔG-q факторизации

$$F^{(0)} G^{(0)} = [\delta^{(0)}, \mathbb{O}],$$

при этом в качестве ведущего параметра λ в матричном полиноме $F^{(0)} = \sum c_k(\overline{\mu})\lambda^k$ может быть выбран любой из параметов можества $\{\mu_1, \dots, \mu_q\}$. В результате применения операций (1), (2) к каждой из последовательностей $\{\delta_{ir}^{(k)}\}$, $r = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, n_k$, $k = 1, \dots, q-1$, и $\{p_0^{(r)}\}$, $r = 1, \dots, n$, будет найден искомый НОД полиномов $\{f_r\}$, $r = 1, \dots, n$, в виде его относительной факторизации

$$\delta = \delta^{(0)} \prod_{k=1}^{q-1} \prod_{i=1}^{n_k} \delta_i^{(k)}.$$

Автор благодит В. Б. Хазанова за замечания, сделанные при чтении рукописи.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 5. Алгоритм ∇V-q факторизации и его применения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **309** (2004), 144–153.
2. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры. 2. Метод неполной относительной факторизации и его применение.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **296** (2003), 89–164.
3. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Относительная факторизация многочленов от нескольких переменных.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ., **36** No. 8 (1996), 6–11.

4. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **229** (1995), 184–321.
5. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **229** (1995), 191–246.
6. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры 6. Спектральные характеристики полиномиальных матриц*, Зап. научн. семин. ПОМИ, **323** (2005), 132–149.

Kublanovskaya V. N. To solving multiparameter problems of algebra. 7. The method of PG-q factorization and its applications.

The paper continues the development of rank-factorization methods for solving certain algebraic problems for multiparameter polynomial matrices and introduces a new rank factorization of a q-parameter polynomial $m \times n$ matrix F of full row rank (called the PG-q factorization) of the form $F = PG$, where $P = \prod_{k=1}^{q-1} \prod_{i=1}^{n_k} \nabla_i^{(k)}$ is the greatest left divisor of F; $\nabla_i^{(k)}$ is a regular polynomial matrix the characteristic polynomial of which is a primitive polynomial in $q-k$ variables over the ring of polynomials in $q-k-1$ variables, and G is a q-parameter polynomial matrix of rank m. The PG-q algorithm is suggested, and its applications to solving some problems of algebra are presented.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: verakub@pdmi.ras.ru

Поступило 9 февраля 2005 г.