Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 323, 2005 г.

В. Б. Хазанов

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ

Статья посвящена разработке прямых методов решения одно- и многопараметрических задач алгебры. Эти методы основаны на использовании методов вычисления минимального базиса нуль-пространства полиномиальной матрицы и базиса ее образа. Последние задачи могут решаться методами ранговой факторизации (метод ΔW-q разложения и производные от него методы [2–4, 7]), а также на базе результантного подхода (см. работу [12] этого сборника). Методы решения однопараметрических задач, основанные на использовании методов ранговой факторизации, приводятся в [6, 8], а основанные на использовании результантного подхода, описаны в [13, 16]. Методы решения многопараметрических задач, основанные на использовании методов ранговой факторизации приводятся в [2–4, 5]. Основной проблемой их применения является возможность появления дополнительных регулярных спектральных характеристик,[1] что связано с понятием сингулярного спектра матрицы (эта проблема обсуждается в [7]). При использовании результантного подхода указанная проблема не возникает. Методы решения одно- и многопараметрических задач идентичны (если не учитывать большую сложность структуры результантных матриц и вычислений их нуль-пространств), поэтому они будут даваться одновременно. При этом указание самих параметров (одного параметра λ или мультипараметра $\boldsymbol{\lambda}$) и их числа q будут опускаться.

Статья состоит из шести параграфов. В §1 описаны методы решения задач для скалярных и матричных полиномов: деление, вычисление наибольшего общего делителя (НОД) и наименьшего общего кратного (НОК). В §2 описаны методы вычисления бази-

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 05-01-00945 и НШ-2268.2003.1.

[1]Определения и свойства спектральных характеристик многопараметрических полиномиальных и рациональных матриц, которые используются в работе, приведены в [9–11].

сов суммы, разности и пересечения линейных оболочек полиномиальных векторов. В §3 описаны методы построения минимальных MFD (matrix fraction description) рациональной матрицы. В §4 описаны методы вычисления полиномиальных базисов образа и нуль-пространства рациональных матрицы. В §5 описаны методы решения матричных уравнений, а также вычисления обратных и псевдообратных матриц (как для полиномиальных, так и для рациональных объектов). В §6 описаны методы вычисления порождающего собственного вектора полиномиальной матрицы.

Все объекты рассматриваются над некоторым числовым полем (например, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).

§1. Решение задач для скалярных и матричных полиномов

1.1. Деление скалярных полиномов. Пусть f_i – скалярные полиномы степени s_i, $i = 1, 2$, и f_1 делится на f_2 $(s_1 \geqslant s_2) : f_1 = f_2 g$. Тогда имеет место соотношение

$$[f_1 \quad f_2] \begin{bmatrix} 1 \\ -g \end{bmatrix} = 0. \tag{1.1}$$

Следовательно, задача вычисления частного g сводится к задаче вычисления минимального базиса правого нуль-пространства матрицы $[f_1 \quad f_2]$:

- сформировать матрицу $F := [f_1 \quad f_2]$;
- вычислить минимальный базисный вектор $\mathbf{x} = \operatorname{col}\{x_i\}_{i=1}^2$ правого нуль-пространства матрицы F;
- вычислить искомый полином $g := -x_1^{-1} x_2$.

В силу минимальности базиса, компонента x_1 полиномиального вектора $\mathbf{x}$ является константой.

1.2. Вычисление НОД и НОК скалярных полиномов. Пусть g и h являются соответственно НОД и НОК полиномов f_i степени s_i, $i = 1, 2$. Тогда существуют полиномы u_i, $i = 1, 2$, удовлетворяющие соотношениям

$$f_i = g u_i, \quad h = f_i u_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2.$$

Тогда имеет место соотношение

$$[f_1 \quad f_2] \begin{bmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{bmatrix} = 0. \tag{1.2}$$

Следовательно, задача вычисления полиномов u_i, $i = 1, 2$, сводится к задаче вычисления минимального базиса правого нуль-пространства матрицы $[f_1 \quad f_2]$. Затем НОД g вычисляется как частное от деления f_i на u_i, а НОК h – как результат умножения f_i на u_j:

- сформировать матрицу $F = [f_1 \quad f_2]$;
- вычислить минимальный базисный вектор $\mathbf{x} = \operatorname{col}\{x_i\}_{i=1}^{2}$ правого нуль-пространства матрицы F;
- *если* $\deg f_2 = \deg x_1$,

    то

    - $g := 1$;
    - $h := f_1 f_2$,

    иначе

    - вычислить g как частное от деления полинома f_2 на полином x_1;
    - $h := f_1 x_1$.

Замечания. 1. Вычисление НОД и НОК нескольких полиномов может осуществляться последовательным применением вышеописанного метода.

2. При вычислении минимального базисного вектора рассматриваемых нуль-пространств целесообразно использовать "столбцово-строчный" вариант результантной реализации умножения скалярных полиномов (см. [12]).

1.3. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений. Пусть задана система нелинейных алгебраических уравнений

$$f_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.3}$$

где f_i – скалярные полиномы степени s_i. Решение системы состоит из регулярной и сингулярной частей. Под регулярной частью понимаем множество нулей, определяемых нулями НОД g рассматриваемых полиномов:

$$f_i = g u_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Сингулярная часть, определяемая нулями системы

$$u_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

состоит из $(q-k)$-мерных многообразий нулей, отвечающих системам

$$h_j(\boldsymbol{\lambda}) = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad k > 1,$$

левые части которых удовлетворяют соотношениям[2]

$$f_i^{r_i}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^{k} g_{ij}(\boldsymbol{\lambda}) h_j(\boldsymbol{\lambda}), \quad i = 1, \dots, n.$$

В частности, нульмерное решение (если оно существует) представляет собой точку $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_q^*)$ и может быть задано очевидной совокупностью уравнений

$$h_k(\boldsymbol{\lambda}) := \lambda_j - \lambda_j^* = 0, \quad j = 1, \dots, q.$$

Полином g, определяющий регулярную часть нулей системы, вычисляется очевидным образом. Нульмерные решения могут быть вычислены методом исключения (см., например, [14, 15]).

1.4. Деление матричных пролиномов. Пусть полиномиальная $m \times n$ матрица F_1 делится слева на регулярную полиномиальную матрицу F_2 порядка m, т.е. существует такая $m \times n$ матрица G, что $F_1 = F_2 G$. Тогда имеет место соотношение

$$[F_1 \quad F_2] \begin{bmatrix} I_n \\ -G \end{bmatrix} = \mathbb{O}.$$

Следовательно, задача вычисления частного G эквивалентна задаче вычисления минимального базиса правого нуль-пространства матрицы $[F_1 \quad F_2]$:

- сформировать $m \times (n+m)$ матрицу $F := [F_1 \quad F_2]$;
- вычислить минимальный базис правого нуль-пространства матрицы F и получить его базисную $(n+m) \times n$ матрицу $X = \operatorname{col}\{X_i\}_{i=1}^2$;
- вычислить искомую $m \times n$ матрицу $G := X_1^{-1} X_2$.

В силу минимальности базиса, блочная компонента X_1 является невырожденной постоянной матрицей.

[2] См. теорему Гильберта о корнях [1].

1.5. Вычисление НОК матричных полиномов. Пусть полиномиальная $m \times n$ матрица H является наибольшим общим правым кратным (НОПК) полиномиальных $m \times n$ матриц F_i, $i = 1, 2$. Тогда существуют полиномиальные матрицы V_i порядка n, $i = 1, 2$, удовлетворяющие соотношениям

$$H = F_i V_i, \quad i = 1, 2. \tag{1.4}$$

Тогда имеет место соотношение

$$[F_1 \quad F_2] \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \mathbb{O}.$$

Следовательно, задача вычисления матриц V_i, $i = 1, 2$, сводится к задаче вычисления минимального базиса правого нуль-пространства матрицы $[F_1 \quad F_2]$. Затем матрица H вычисляется из соотношения (1.4):

- сформировать $m \times 2n$ матрицу $F := [F_1 \quad F_2]$;
- вычислить минимальный базис правого нуль-пространства матрицы F и получить его базисную $2n \times n$ матрицу $X = \operatorname{col}\{X_i\}_{i=1}^2$;
- вычислить искомую $m \times n$ матрицу $H := F_1 X_1$.

В силу минимальности базиса, матрица H действительно является НОПК матриц F_i, $i = 1, 2$.

§2. Вычисление базисов суммы, разности и пересечения подпространств

2.1. Вычисление базисов суммы и пересечения подпространств. Базисы суммы и пересечения линейных оболочек столбцов $m \times n_i$ матриц F_i, $i = 1, 2$, вычисляются очевидным образом. Для решения этих задач следует:

- сформировать полиномиальную $m \times (n_1 + n_2)$ матрицу $M := [F_1 \quad F_2]$

и, в первом случае,

- вычислить базис линейной оболочки столбцов матрицы M,

а во втором случае

- вычислить минимальный базис правого нуль-пространства матрицы M, представить его базисную $(n_1 + n_2) \times p$ матрицу в виде $N = [T_1 \quad -T_2]^B$ и получить искомую базисную матрицу $P := F_1 T_1$.

2.2. Вычисление базиса разности подпространств. Для вычисления базиса разности $F_1 \setminus F_2$ подпространств F_1 и F_2, если $F_1 \supset F_2$, следует:

- вычислить базисную $m \times (m - r_1)$ матрицу X_1 правого нуль-пространства матрицы F_1^T;
- сформировать полиномиальную $m \times (m - r_1 + n)$ матрицу $M := [X_1 \quad F_2]$;
- вычислить минимальный базис правого нуль-пространства матрицы M^T, базисная $m \times (m - r)$ матрица P которого и определяет искомый базис.

Для вычисления базиса разности $F_1 \setminus F_2$ в общем случае следует:

- вычислить базис линейной оболочки столбцов матрицы $M := [F_1 \quad F_2]$;
- вычислить базис разности $M \setminus F_2$.

2.3. Вычисление базиса пересечения нуль-пространств. Для определения базиса пересечения правых нуль-пространств $m_i \times n$ матриц F_i, $i = 1, 2$, следует:

- сформировать полиномиальную $(m_1 + m_2) \times n$ матрицу $M := [F_1 \quad F_2]^B$;
- вычислить минимальный базис правого нуль-пространства матрицы M.

Очевидным образом приведенные методы обобщаются на случай нескольких полиномиальных $m_i \times n_i$ матриц F_i, $i = 1, \ldots, k$.

§3. Построение минимальной MFD рациональной матрицы

3.1. Построение базисной MFD. Пусть элементы рациональной $m \times n$ матрицы R заданы в виде дробей: $r_{ij} = \frac{f_{ij}}{g_{ij}}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Левая MFD $R = T^{-1}S$, где S и T – полиномиальные матрицы размеров $m \times n$ и $m \times m$ соответственно, T является регулярной матрицей ($\det T \not\equiv 0$), может быть построена следующим образом. Используя методы §1, представить все элементы матрицы R в виде несократимых дробей и найти НОК t_i знаменателей всех элементов строки i, так что

$$r_{ij} = \frac{f_{ij}}{g_{ij}} = \frac{s_{ij}}{t_i}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда $R = T^{-1}S$, где $T = \operatorname{diag}\{t_i\}_{i=1}^{m}$, $S = \operatorname{matr}\{s_{ij}\}_{i=1,\ j=1}^{m\quad n}$.

Замечания. 1. Аналогичным образом можно построить правую MFD $R = ST^{-1}$, где S и T – полиномиальные матрицы размеров $m \times n$ и $n \times n$ соответственно, T является регулярной матрицей ($\det T \not\equiv 0$).

2. Правая и левая MFD $S_\mathrm{R}T_\mathrm{R}^{-1}$ и $T_\mathrm{L}^{-1}S_\mathrm{L}$ называются минимальными по степени, если столбцы матриц

$$\begin{bmatrix} T_\mathrm{R} \\ -S_\mathrm{R} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} S_\mathrm{L}^T \\ T_\mathrm{L}^T \end{bmatrix}$$

образуют минимальный базис соответствующего подпространства.

3.2. Построение правой минимальной MFD. Пусть рациональная $m \times n$ матрица R представлена в виде левой MFD: $R = T_\mathrm{L}^{-1}S_\mathrm{L}$ и требуется построить правую минимальную по степени MFD $R = S_\mathrm{R}T_\mathrm{R}^{-1}$. Если при этом полиномиальная $(n+m) \times n$ матрица $N = [T_\mathrm{R} - S_\mathrm{R}]^B$ не имеет конечного спектра, то соответствующая MFD будет несократимой. Из очевидного соотношения

$$[S_\mathrm{L} \quad T_\mathrm{L}] \begin{bmatrix} T_\mathrm{R} \\ -S_\mathrm{R} \end{bmatrix} = \mathbb{O}_{m\times n}$$

следует, что столбцы $(n+m) \times n$ матрицы N образуют минимальный базис правого нуль-пространства $m \times (n+m)$ матрицы $M = [S_\mathrm{L} \quad T_\mathrm{L}]$.

Следовательно, для построения правой минимальной MFD достаточно выполнить следующие операции:

- сформировать полиномиальную $m \times (n+m)$ матрицу $M := [S_\mathrm{L} \quad T_\mathrm{L}]$;
- вычислить минимальный базис ее правого нуль-пространства и представить его базисную $(n+m) \times n$ матрицу в виде $N = [T_\mathrm{R} - S_\mathrm{R}]^B$. Блоки матрицы N дают искомую MFD $R = S_\mathrm{R}T_\mathrm{R}^{-1}$.

Замечания. 1. В однопараметрическом случае минимальная по степени MFD является одновременно и несократимой.

2. В многопараметрическом случае минимальная по степени MFD гарантированно является несократимой, если пересечение конечных регулярного и сингулярного спектров матрицы $M = [S_\mathrm{L} \quad T_\mathrm{L}]$ является пустым.

3.3. Построение левой минимальной MFD. Если рациональная $m \times n$ матрица R представлена в виде правой MFD: $R = R_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$, то для $R^T = (T_{\mathrm{R}}^T)^{-1} S_{\mathrm{R}}^T$ строится правая минимальная MFD $R^T = \widetilde{S}_{\mathrm{R}} \widetilde{T}_{\mathrm{R}}^{-1}$, так что $R = (\widetilde{T}_{\mathrm{R}}^T)^{-1} \widetilde{S}_{\mathrm{R}}^T$ – левая минимальная MFD исходной матрицы R.

Построение левой минимальной MFD матрицы, заданной в виде $R = T_{\mathrm{L}}^{-1} S_{\mathrm{L}}$ осуществляется в два этапа. Вначале строится правая минимальная MFD $R = S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$, затем для $R^T = (T_{\mathrm{R}}^T)^{-1} S_{\mathrm{R}}^T$ строится правая минимальная MFD $R^T = \widetilde{S}_{\mathrm{R}} \widetilde{T}_{\mathrm{R}}^{-1}$, так что $R = (\widetilde{T}_{\mathrm{R}}^T)^{-1} \widetilde{S}_{\mathrm{R}}^T$ – левая минимальная MFD исходной матрицы R.

§4. Вычисление базиса образа рациональной матрицы

4.1. Вычисление базиса образа рациональной матрицы. Для вычисления полиномиального базиса рациональной $m \times n$ матрицы R следует:

- построить правую MFD матрицы $R = S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$;
- вычислить базис линейной оболочки столбцов $m \times n$ матрицы S_{R}.

4.2. Вычисление минимального базиса нуль-пространства рациональной матрицы. Для вычисления минимального базиса правого нуль-пространства рациональной $m \times n$ матрицы R следует:

- построить левую MFD матрицы $R = T_{\mathrm{L}}^{-1} S_{\mathrm{L}}$;
- вычислить минимальный базис правого нуль-пространства полиномиальной $m \times n$ матрицы S_{L}.

Замечание. Если элементы рациональной $m \times n$ матрицы R заданы в виде дробей: $r_{ij} = \frac{f_{ij}}{g_{ij}}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, то для решения рассматриваемых задач достаточно строить лишь соответствующую базисную MFD матрицы R.

§5. Решение линейных систем, матричных уравнений и обращение матриц

Рассмотрим методы решения линейной системы

$$F\mathbf{x} = \mathbf{g}, \tag{5.1}$$

матричного уравнения

$$FX = G, \tag{5.2}$$

а также вычисления обратной матрицы F^{-1} или псевдообратной матрицы F^{+} регулярной или сингулярной матрицы F соответственно. Здесь F и G – матрицы размеров $m \times n$ и $m \times p$ соответственно, а $\mathbf{g}$ – m-мерный вектор. Если все объекты являются полиномиальными, то и n-мерный вектор $\mathbf{x}$, и $n \times p$ матрица X являются в общем случае рациональными. Будем вычислять их минимальные MFD.

5.1. Решение уравнений с регулярной матрицей и обращение матрицы. Если F является регулярной матрицей порядка n, то неизвестные $\mathbf{x}$ и X представимы в виде левых MFD: $\mathbf{x} = F^{-1}\mathbf{g}$, $X = F^{-1}G$. Таким образом, решение уравнений (5.1) и (5.2) сводится к построению минимальных MFD соответственно рационального вектора и рациональной матрицы. В первом случае следует:

- вычислить минимальную правую MFD $\mathbf{x} := \mathbf{s}_{\mathrm{R}} t_{\mathrm{R}}^{-1}$ рационального вектора $\mathbf{x} = F^{-1}\mathbf{g}$;
- вычислить (если это необходимо) минимальную левую MFD $\mathbf{x} := T_{\mathrm{L}}^{-1}\mathbf{s}_{\mathrm{L}}$ рационального вектора $\mathbf{x} = \mathbf{s}_{\mathrm{R}} t_{\mathrm{R}}^{-1}$.

Во втором случае следует:

- вычислить минимальную правую MFD $X := S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$ рациональной матрицы $X = F^{-1}G$;
- вычислить (если это необходимо) минимальную левую MFD $X := T_{\mathrm{L}}^{-1} S_{\mathrm{L}}$ рациональной матрицы $X = S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$.

Для вычисления обратной матрицы F^{-1} достаточно решить матричное уравнение вида (5.2) при $G = I_n$.

Замечания. 1. Очевидно, что решение матричного уравнения (5.2) может быть осуществлено последовательным решением систем вида (5.1):

$$F\mathbf{x}_j = \mathbf{g}_j, \quad j = 1, \dots, p, \tag{5.3}$$

где $\mathbf{g}_j$ и $\mathbf{x}_j$, $j = 1, \dots, p$, – столбцы матриц G и X соответственно.

2. Если вектор $\mathbf{g}$ или столбцы матрицы G являются линейными комбинациями с полиномиальными коэффициентами столбцов матрицы F, то из минимальности построенного базиса следует, что t_{R} или T_{R} являются постоянными, так что вектор $\mathbf{x} = \mathbf{s}_{\mathrm{R}} t_{\mathrm{R}}^{-1}$

или матрица $X = S_{\mathrm{R}}T_{\mathrm{R}}^{-1}$ являются полиномиальными. В частности, полиномиальной будет матрица $F^{-1} = S_{\mathrm{R}}T_{\mathrm{R}}^{-1}$, обратная к унимодулярной матрице F.

3. Пусть F, G и $\mathbf{g}$ являются рациональными. Тогда для решения уравнения (5.1) следует:

- вычислить правые MFD матрицы $F := S_F T_F^{-1}$ и вектора $\mathbf{g} := \mathbf{s}_{\mathbf{g}} t_{\mathbf{g}}^{-1}$;
- решить систему $(t_{\mathbf{g}} S_F)\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{s}_{\mathbf{g}}$ и вычислить $\widetilde{\mathbf{x}} := \widetilde{\mathbf{s}}\,\widetilde{t}^{-1}$;
- вычислить минимальную левую MFD $\mathbf{x} := T_{\mathrm{L}}^{-1}\mathbf{s}_{\mathrm{L}}$ вектора $\mathbf{x} = (T_F\widetilde{\mathbf{s}})\widetilde{t}^{-1}$;
- вычислить (если это необходимо) минимальную правую MFD $\mathbf{x} := \mathbf{s}_{\mathrm{R}} t_{\mathrm{R}}^{-1}$ рационального вектора $\mathbf{x} = T_{\mathrm{L}}^{-1}\mathbf{s}_{\mathrm{L}}$.

Для решения уравнения (5.2) следует:

- вычислить MFD матриц $F := S_F T_F^{-1}$ и $G := T_G^{-1} S_G$;
- решить матричное уравнение $(T_G S_F)\widetilde{X} = S_G$ и вычислить $\widetilde{X} := \widetilde{S}\widetilde{T}^{-1}$;
- вычислить минимальную левую MFD $X := T_{\mathrm{L}}^{-1} S_{\mathrm{L}}$ матрицы $X = (T_F\widetilde{S})\widetilde{T}^{-1}$;
- вычислить (если это необходимо) минимальную правую MFD $X := S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$ рациональной матрицы $X = T_{\mathrm{L}}^{-1} S_{\mathrm{L}}$.

5.2. Решение совместного матричного уравнения с сингулярной матрицей. Пусть $m \times n$ матрица F является сингулярной, но уравнение[3] (5.2) является совместным: $\operatorname{rank} F = \operatorname{rank}[G \quad F] = r$. Если $r < n$, то описанный ниже подход дает одно из бесчисленного множества решений. Как и прежде, решение уравнения будем искать в виде $X = ST^{-1}$. Тогда столбцы $(p+n) \times p$ матрицы $[T \quad -S]^B$ должны принадлежать правому нуль-пространству $m \times (p+n)$ матрицы $M = [G \quad F]$, размерность которого $p+n-r \geqslant p$. Представим базисную матрицу этого нуль-пространства в виде $N = [C \quad -D]^B$, где C и D – полиномиальные матрицы размеров $p \times (p+n-r)$ и $n \times (p+n-r)$, соответственно.

Покажем, что $\operatorname{rank} C = p$. Доказательство проведем от противного. Предположим, что $\operatorname{rank} C = \widetilde{p} < p$. Тогда существует такая

[3] Решение системы (5.1), являющейся частным случаем уравнения (5.2), вычисляется аналогично.

регулярная матрица P порядка $p+n-r$, что

$$\begin{bmatrix} C \\ -D \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \widetilde{C} & \mathbb{O} \\ -\widetilde{D} & -\widehat{D} \end{bmatrix},$$

где полиномиальные матрицы $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$, $\widehat{D}$ и нулевая матрица $\mathbb{O}$ имеют размеры $p \times \widetilde{p}$, $n \times \widetilde{p}$, $n \times (p+n-r-\widetilde{p})$ и $p \times (p+n-\widetilde{p}-r)$ соответственно. Следовательно, линейно независимые матрицы $\widehat{D}$, число которых $p-\widetilde{p}+n-r > n-r$, принадлежат правому нуль-пространству матрицы F, что противоречит предположению о том, что $\operatorname{rank} F = r$.

Используя метод построения базиса образа матрицы, сформируем из p линейно независимых столбцов матрицы C регулярную матрицу T_{R}, а из соответствующих столбцов матрицы D – матрицу S_{R}. Тогда матрица $X = S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$ является решением уравнения (5.2). Таким образом, для решения рассматриваемой задачи следует:

- сформировать полиномиальную $m \times (p+n)$ матрицу $M = [G \quad F]$;
- вычислить минимальный базис ее правого нуль-пространства и представить его базисную $(p+n)\times(p+n-r)$ матрицу в виде $N = [C \quad -D]^B$ с блоками C и D размеров $p \times (p+n-r)$ и $n \times (p+n-r)$ соответственно;
- *если* $r = n$,

  то

  $T_{\mathrm{R}} := C;\quad S_{\mathrm{R}} := D,$

  иначе

  вычислить базис образа матрицы C из ее p линейно независимых столбцов и сформировать из них матрицу T_{R} порядка p;

  из соответствующих столбцов матрицы D сформировать $n \times p$ матрицу S_{R};
- вычислить (если это необходимо) минимальную левую MFD $X := T_{\mathrm{L}}^{-1} S_{\mathrm{L}}$ рациональной матрицы $X = S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$.

Замечания 1–3 из предыдущего пункта остаются справедливыми.

4. Пусть столбцы матрицы F образуют базис некоторого подпространства. Тогда разложение вектора $\mathbf{g}$, принадлежащего этому подпространству, по указанному базису сводится к задаче (4.2). Если столбцы матрицы G образуют базис того же подпространства, то определение матрицы P перехода от базиса F к базису G приводит к задаче (4.1).

5. Если $\operatorname{rank} F = r < n$, то для вычисления ее ранговой факторизации $F = BC$, где B – полиномиальная $m \times r$ матрица полного столбцового ранга, а C – рациональная $r \times m$ матрица полного строчного ранга, следует:

- вычислить базисную матрицу B образа матрицы F;
- решить совместное уравнение $BC = F$, найти минимальную левую MFD рациональной матрицы $C := T^{-1}S$;
- получить ранговую факторизацию $F := BT^{-1}S$.

Здесь B и S – полиномиальные матрицы полного столбцового и строчного ранга размеров $m \times r$ и $r \times n$ соответственно, а T – регулярная полиномиальная матрица порядка r.

6. Рациональная $m \times n$ матрица R ранга $r < \min\{m, n\}$ может быть представлена в виде минимальной ранговой факторизации $R = ST^{-1}V$, где S, T, V – полиномиальные матрицы размеров $m \times r$, $r \times r$, $r \times n$, T – регулярная матрица, причем ST^{-1} и $T^{-1}V$ являются минимальными по степени MFD.

5.3. Решение системы с сингулярной матрицей и вычисление псевдообратной матрицы. Хотя совокупность систем (5.3) эквивалентна матричному уравнению (5.2), возможны случаи, когда некоторые из систем (5.3) являются совместными, а некоторые – несовместными. Поэтому будем рассматривать решение одной системы (5.1). Распространим известные понятия обобщенного и нормального решений системы линейных уравнений с постоянной матрицей F на случай, когда F является полиномиальной или рациональной матрицей.

Если матрица F имеет полный столбцовый ранг, то для вычисления обобщенного решения системы (5.1) следует:

- вычислить регулярную матрицу $\widetilde{F} := F^T F$ и вектор $\widetilde{\mathbf{g}} := F^T \mathbf{g}$;
- решить систему $\widetilde{F}\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{g}}$ и найти минимальную правую MFD $\mathbf{x} := \mathbf{s}_{\mathrm{R}} t_{\mathrm{R}}^{-1}$.

Если матрица F имеет полный строчный ранг, то для вычисления нормального решения системы (5.1) следует:

- вычислить регулярную матрицу $\widetilde{F} := FF^T$;
- решить систему $\widetilde{F}\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{g}}$ и найти минимальную правую MFD $\widetilde{\mathbf{x}} := \widetilde{\mathbf{s}}_{\mathrm{R}} t_{\mathrm{R}}^{-1}$;
- вычислить полиномиальный вектор $\mathbf{s}_{\mathrm{R}} := F^T\widetilde{\mathbf{s}}_{\mathrm{R}}$ и найти правую MFD $\mathbf{x} := \mathbf{s}_{\mathrm{R}} t_{\mathrm{R}}^{-1}$.

В случае, когда $r = \operatorname{rank} F < \min\{m, n\}$, следует:

- вычислить ранговую факторизацию $m \times n$ матрицы $F = BT^{-1}S$;
- вычислить обобщенное решение системы $B\mathbf{z} = \mathbf{g}$;
- вычислить нормальное решение системы $S\mathbf{x} = T\mathbf{z}$.

Псевдообратную матрицу F^+ полиномиальной или рациональной матрицы F также будем определять аналогично случаю постоянных матриц. Если матрица F имеет полный столбцовый или строчный ранг, то $F^+ = (F^T F)\, F^T$ или $F^+ = F^T(FF^T)^{-1}$, соответственно. Если $F = BT^{-1}S$ – ранговая факторизация матрицы F, то $F^+ = S^T(SS^T)^{-1}T\,(B^T B)^{-1}\, B^T$. Будем искать минимальные MFD псевдообратных матриц, являющихся в общем случае рациональными.

Если F – полиномиальная матрица полного столбцового ранга, то для вычисления матрицы F^+ следует:

- вычислить левую MFD матрицы $(F^T F)^{-1} = T_1^{-1} S_1$;
- вычислить минимальную правую MFD $F^+ := S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$ матрицы $F^+ = T_1^{-1}(S_1\, F^T)$;
- вычислить (если это необходимо) минимальную левую MFD $F^+ := T_{\mathrm{L}}^{-1} S_{\mathrm{L}}$ матрицы $F^+ = S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$.

Если F – рациональная матрица полного столбцового ранга, то для вычисления матрицы F^+ следует:

- вычислить правую MFD матрицы $F := S_F T_F^{-1}$;
- вычислить правую MFD матрицы $S_F^+ := S_1 T_1^{-1}$;
- вычислить минимальную левую MFD $F^+ := T_{\mathrm{L}}^{-1} S_{\mathrm{L}}$ матрицы $F^+ = (T_F S_1) T_1^{-1}$.

Если F – полиномиальная матрица полного строчного ранга, то для вычисления матрицы F^+ следует:

- вычислить правую MFD матрицы $(FF^T)^{-1} = S_1 T_1^{-1}$;

- вычислить минимальную левую MFD $F^+ := T_{\mathrm{L}}^{-1} S_{\mathrm{L}}$ матрицы $F^+ = (F^T S_1) T_1^{-1}$;
- вычислить (если это необходимо) минимальную правую MFD $F^+ := S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$ матрицы $F^+ = T_{\mathrm{L}}^{-1} S_{\mathrm{L}}$.

Если F – рациональная матрица полного строчного ранга, то для вычисления матрицы F^+ следует:

- вычислить левую MFD матрицы $F := T_F^{-1} S_F$;
- вычислить левую MFD матрицы $S_F^+ := T_1^{-1} S_1$;
- вычислить минимальную правую MFD $F^+ := S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$ матрицы $F^+ = T_1^{-1}(S_1 T_F)$.

Если F – полиномиальная матрица и $r = \operatorname{rank} F < \min\{m, n\}$, то для вычисления матрицы F^+ следует:

- вычислить ранговую факторизацию $F = BT^{-1}S$;
- вычислить MFD матриц $B^+ := S_1 T_1^{-1}$, $S^+ := T_2^{-1} S_2$;
- вычислить минимальную левую MFD $T_3^{-1} S_3$ матрицы $(S_2 T S_1) T_1^{-1}$;
- вычислить минимальную правую MFD $F^+ := S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$ матрицы $F^+ = (T_3 T_2)^{-1} S_3$;
- вычислить (если это необходимо) минимальную левую MFD $F^+ := T_{\mathrm{L}}^{-1} S_{\mathrm{L}}$ матрицы $F^+ = S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$.

Если F – рациональная матрица и $r = \operatorname{rank} F < \min\{m, n\}$, то для вычисления матрицы F^+ следует:

- вычислить правую MFD матрицы $F = S_F T_F^{-1}$;
- вычислить ранговую факторизацию $S_F = BT^{-1}S$;
- вычислить MFD матриц $B^+ := S_1 T_1^{-1}$, $S^+ := T_2^{-1} S_2$;
- вычислить минимальную левую MFD $T_3^{-1} S_3$ матрицы $(S_2 T S_1)(T_F T_1)^{-1}$;
- вычислить минимальную правую MFD $F^+ := S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$ матрицы $F^+ = (T_3 T_2)^{-1} S_3$;
- вычислить (если это необходимо) минимальную левую MFD $F^+ := T_{\mathrm{L}}^{-1} S_{\mathrm{L}}$ матрицы $F^+ = S_{\mathrm{R}} T_{\mathrm{R}}^{-1}$.

§6. Вычисление порождающего собственного вектора

Пусть χ – заданный собственный полином $m \times n$ матрицы F и требуется найти отвечающий ему n-мерный порождающий собственный вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий соотношению вида

$$F\mathbf{x} = \chi\mathbf{z},$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$ – свободные векторы (не имеющие конечного регулярного спектра). Запишем это соотношение в виде

$$[F \quad \chi I_m] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{z} \end{bmatrix} = \mathbb{O}_m. \tag{6.1}$$

6.1. Случай неприводимого собственного полинома. Если χ – неприводимый полином, то для построения минимального по степени порождающего собственного вектора[4] $\mathbf{x}$ достаточно выполнить следующие операции:

- сформировать полиномиальную $m \times (n+m)$ матрицу $M := [F \quad \chi I_m]$;
- вычислить минимальный базис ее правого нуль-пространства и представить его базисную $(n+m) \times n$ матрицу в виде $N = [T \quad -S]^B$;
- вычислить базис образа матрицы T и выбрать ее столбец $\mathbf{t}_j$ минимальной степени;
- выбрать соответствующий столбец $\mathbf{s}_j$ матрицы S;
- положить $\mathbf{x} := \mathbf{t}_j$, $\mathbf{z} := \mathbf{s}_j$.

Действительно, вектор $\mathbf{t}_j$ должен быть свободным в силу неприводимости полинома χ. Если вектор $\mathbf{s}_j$ не является свободным: $\mathbf{s}_j = \delta_j \widetilde{\mathbf{s}}_j$, где $\widetilde{\mathbf{s}}_j$ – свободный вектор, то порождающий собственный вектор $\mathbf{t}_j$ отвечает в действительности собственному полиному $\chi\delta$.

6.2. Использование характеристического полинома. Если собственный полином χ является приводимым, необходимо исследовать, являются ли столбцы матриц T и S свободными. В частности, если известен характеристический полином φ матрицы F, то вычисление порождающих собственных векторов и соответствующих им собственных полиномов требует выполнения следующих операций:

[4] Порождающие собственные векторы определяются неоднозначно.

- сформировать полиномиальную $m \times (n+m)$ матрицу $M := [F \quad \varphi I_m]$;
- вычислить минимальный базис ее правого нуль-пространства и представить его базисную $(n+m) \times n$ матрицу в виде $N = [T \quad -S]^B = \mathrm{row}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{t}_j \\ -\mathbf{s}_j \end{bmatrix}\right\}_{j=1}^{n}$;
- для $j = 1$ до n выполнять
  - вычислить НОД γ_j и δ_j компонент векторов $\mathbf{t}_j$ и $\mathbf{s}_j$ соответственно и представить $\mathbf{t}_j = \gamma_j \widetilde{\mathbf{t}}_j$, $\mathbf{s}_j = \delta_j \widetilde{\mathbf{s}}_j$;
  - вычислить полином $\chi_j = \frac{\varphi \delta_j}{\gamma_j}$;
  - получить собственный полином χ_j (если $\chi_j \neq \mathrm{const}$) и отвечающий ему порождающий собственный вектор $\widetilde{\mathbf{t}}_j$.

Действительно, каждый столбец матрицы N удовлетворяет соотношению вида (6.1) для матрицы $[F \quad \varphi I_m]$. Далее, поскольку матрица F и векторы $\widetilde{\mathbf{t}}_j$ и $\widetilde{\mathbf{s}}_j$ являются полиномиальными, то $\chi_j = \frac{\varphi \delta_j}{\gamma_j}$ является полиномом (в частности, может быть константой).

Если матрица F порядка n является регулярной, то ее характеристический полином $\varphi = \det F$ может быть вычислен с помощью метода следов Леверье–Фаддеева, который дает также присоединенную матрицу $B : FB = \varphi I_n$, так что имеют место соотношения

$$F\mathbf{b}_j = \chi\, \mathbf{e}_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, порождающие собственные векторы и соответствующие им собственные полиномы определяются в результате выполнения следующих операций:

- для $j = 1$ до n выполнять
  - вычислить НОД γ_j компонент вектора $\mathbf{b}_j$ и представить $\mathbf{b}_j := \gamma_j \widetilde{\mathbf{b}}_j$;
  - вычислить полином $\chi_j := \frac{\varphi}{\gamma_j}$;
  - получить собственный полином χ_j (если $\chi_j \neq \mathrm{const}$) и отвечающий ему порождающий собственный вектор $\widetilde{\mathbf{b}}_j$.

Замечания. 1. Хотя бы один из получаемых полиномов χ_j отличен от константы, т.к. их произведение должно быть равно φ.

Это следует из того, что $\det T = \det B = \varphi^{n-1}$, а НОД γ_j столбца j матрицы T или B должен быть делителем φ.

2. Аналогичная ситуация будет иметь место в случае, когда заданный собственный полином χ является приводимым. При этом возможны случаи, когда его делителям χ отвечают различные порождающие собственные векторы, либо когда полиному χ отвечает один порождающий собственный вектор.

Литература

1. Б. Л. Ван дер Варден, *Алгебра.* — Наука, М. (1976).
2. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **229** (1995), 191–246.
3. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **238** (1997), 3–330.
4. В. Н. Кублановская, *Применение метода ранговой факторизации к анализу спектральных характеристик многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **268** (2000), 115–144.
5. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Несократимые факторизации q-параметрических рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **248** (1998), 147–164.
6. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *К решению частичной проблемы собственных значений для полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **284** (2002), 163–176.
7. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Модификация метода ΔW-q разложения многопараметрических полиномиальных матриц и их свойства.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **309** (2004), 154–166.
8. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач алгебры. Часть 1. Однопараметрические задачи.* — Наука, М. (2004).
9. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **229** (1995), 284–321.
10. В. Б. Хазанов, *О собственных порождающих векторах многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **248** (1998), 165–186.
11. В. Б. Хазанов, *О некоторых свойствах полиномиальных базисов над полем рациональных функций многих переменных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **284** (2002), 177–191.
12. В. Б. Хазанов, *Результантный подход к вычислению векторных характеристик многопараметричских полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **323** (2005), 182–214.
13. R. R. Bitmead, S.-Y. Kung, B. D. O. Anderson, *Generalized greatest common matrices divisors via generalized Sylvester and Bezout matrices.* — IEEE Trans. Automat. Control, **AC-23**, No. 1 (1978), 1043–1047.

14. I. M. Gelfgand, M. M. Kapranov, I. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*. — Boston, Birkhauser (1994).
15. D. Kapyr, T. Saxena, *Extraneous factors in the Dixon resultant*. — In: Proc. Int. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation (1997), pp. 141–148.
16. A. Wallack, I. Z. Emiris, D. Manocha, *MARS: a Maple/Matlab/C resultant-based solver*. — In: Proc. Int. Symp. on Symbolic and Algebraic Computations (1998), pp. 244–251.

Khazanov V. B. Methods for solving some parameter problems of algebra.

Methods for solving the following parameter problems are considered: division of scalar and matrix polynomials and computation of their GCD and LCM; finding bases of the sum, difference, and intersection of the linear span of polynomial vectors; constructing a minimal MFD (matrix fraction description) of a rational matrix; computing a range basis and a minimal basis of the null-space of a rational matrix; solving matrix equations and computing inverse and pseudoinverse matrices (both for polynomial and rational objects); computing generating eigenvectors of a polynomial matrix.

С.-Петербургский государственный морской технический университет
E-mail: khazanovvb@mail.ru

Поступило 20 апреля 2005 г.