Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 323, 2005 г.

М. Н. Яковлев

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С помощью методов, изложенных в работах [1] и [2], устанавливаются условия существования и единственности решения краевой задачи вида

$$-u'' + p_0(t)u + q(t)u^n = f(t), \tag{1}$$

$$u(a) = u(b) = 0, \tag{2}$$

где $n \geqslant 2$, а функции $p_0(t)$, $q(t)$ и $f(t)$ имеют при $t = a$ и $t = b$ неинтегрируемые особенности.

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. Как обычно, $H_0^1(a,b)$ – вещественное гильбертово пространство абсолютно непрерывных функций вещественной переменной $u(t)$ таких, что $u(a) = u(b) = 0$, а производная $u'(t)$, которая существует почти всюду на (a,b), суммируема с квадратом на (a,b). При этом

$$(u,v)_{H_0^1(a,b)} = \int_a^b u'(t)v'(t)dt, \tag{3}$$

$$\|u\|^2_{H_0^1(a,b)} = \int_a^b [u'(t)]^2 dt. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$p_0(t)(t-a)(b-t) \in L(a,b); \tag{5}$$

$$f(t)\sqrt{(t-a)(b-t)} \in L(a,b); \tag{6}$$

$$c \equiv 1 - \frac{1}{b-a}\int_a^b p_0^-(t)(t-a)(b-t)dt > 0. \tag{7}$$

Тогда

(1) *в пространстве функций* $H_0^1(a,b)$ *существует одна и только одна функция* $u_0(t) \in H_0^1(a,b)$, *на которой функционал*

$$J(u) \equiv \int_a^b [u'(t)]^2 dt + \int_a^b p_0(t)u^2(t)dt - 2\int_a^b f(t)u(t)dt \tag{8}$$

достигает минимума;

(2) *для всех* $v(t) \in H_0^1(a,b)$ *уравнение*

$$\int_a^b u'(t)v'(t)dt + \int_a^b p_0(t)u(t)v(t)dt - \int_a^b f(t)v(t)dt = 0 \tag{9}$$

относительно $u(t)$ *имеет одно и только одно решение в пространстве* $H_0^1(a,b)$, *и этим решением является функция* $u_0(t)$, *на которой квадратичный функционал* $J(u)$ *достигает минимума;*

(3) *верна оценка*

$$\|u_0\|_{H_0^1(a,b)} \leqslant \frac{1}{c\sqrt{b-a}} \int_a^b |f(t)|\sqrt{(t-a)(b-t)}dt; \tag{10}$$

(4) *если* $f(t) \geqslant 0$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$, *то* $u_0(t) \geqslant 0$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$;

(5) *если*

$$p_0(t) \in C(a,b), \quad f(t) \in C(a,b),$$

то $u_0(t) \in C^{(2)}(a,b)$ *и является решением краевой задачи*

$$-u_0''(t) + p_0(t)u_0(t) = f(t), \quad a < t < b,$$

$$u_0(a) = u_0(b) = 0.$$

Доказательство. Доказательство утверждений (1), (2), (5) приведены в [2]. Для доказательства утверждения (3) положим в соотношении (9) $v(t) = u_0(t)$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{b-a}}\|u_0\|_{H_0^1(a,b)} \int_a^b |f(t)|\sqrt{(t-a)(b-t)}dt \geqslant \int_a^b f(t)u_0(t)dt$$

$$\geqslant \|u_0\|^2_{H_0^1(a,b)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b p_0^-(t)(t-a)(b-t)dt\; \|u_0\|^2_{H_0^1(a,b)}.$$

Сокращая на $\|u_0\|_{H_0^1(a,b)}$, получим неравенство (10).

Доказательство утверждения (4) будем вести от противного. Пусть $u_0(t) < 0$ при $a_1 < t < b_1$ и $u_0(a_1) = u_0(b_1) = 0$. Введем функцию $w_0(t)$, положив

$$w_0(t) = \begin{cases} -u_0(t) & \text{при} \quad a_1 \leqslant t \leqslant b_1, \\ \ u_0(t) & \text{при} \quad a \leqslant t \leqslant a_1 \quad \text{и} \quad b_1 \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

Очевидно, $w_0(t) \in H_0^1(a,b)$. Далее, $u_0^2(t) = w_0^2(t)$ и $\int\limits_a^b [u_0'(t)]^2 dt = \int\limits_a^b [w_0'(t)]^2 dt$. Поэтому

$$\int\limits_a^b [w_0'(t)]^2 dt + \int\limits_a^b p_0(t) w_0^2(t) dt = \int\limits_a^b [u_0(t)]^2 dt + \int\limits_a^b p_0(t) u_0^2(t) dt.$$

Поскольку при $f(t) \geqslant 0$

$$\int\limits_a^b f(t) w_0(t) dt \geqslant \int\limits_a^b f(t) u_0(t) dt,$$

верно неравенство

$$J(w_0) \leqslant J(u_0). \tag{11}$$

Неравенство (11) противоречит тому, что $u_0(t)$ – единственная функция, на которой квадратичный функционал $J(u)$ достигает минимума.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$|p_0(t)|(1-t^2)^2 \leqslant c_0, \quad p_0^-(t)(1-t^2)^2 \leqslant d, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1; \tag{12}$$

$$|f(t)|(1-t^2) \in L_2(-1,1); \tag{13}$$

$$Q \equiv 1 - d > 0. \tag{14}$$

Тогда

(1) *в пространстве функций $H_0^1(-1,1)$ существует одна и только одна функция $w_0(t)$, на которой квадратичный функционал*

$$H(u) \equiv \int\limits_{-1}^1 [u'(t)]^2 dt + \int\limits_{-1}^1 p_0(t) u^2(t) dt - 2 \int\limits_{-1}^1 f(t) u(t) dt \tag{15}$$

достигает минимума;

(2) *для всех* $v(t) \in H_0^1(-1,1)$ *уравнение*

$$\int_{-1}^{1} u'(t)v'(t)dt + \int_{-1}^{1} p_0(t)u(t)v(t)dt - \int_{-1}^{1} f(t)v(t)dt = 0 \qquad (16)$$

относительно функции $u(t)$ *имеет одно и только одно решение в пространстве* $H_0^1(-1,1)$, *и этим решением является функция* $w_0(t)$;

(3) *верна оценка*

$$\|w_0\|_{H_0^1(-1,1)} \leqslant \frac{1}{Q}\left(\int_{-1}^{1} |f(t)|^2(1-t^2)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad (17)$$

(4) *если* $f(t) \geqslant 0$ *при* $-1 \leqslant t \leqslant 1$, *то* $w_0(t) \geqslant 0$ *при* $-1 \leqslant t \leqslant 1$;

(5) *если* $p_0(t) \in C(-1,1)$, $f(t) \in C(-1,1)$, *то* $w_0(t) \in C^{(2)}(-1,1)$ *и является решением краевой задачи*

$$-w_0''(t) + p_0(t)w(t) = f(t), \quad -1 < t < 1, \qquad (18)$$

$$w_0(-1) = w_0(1) = 0. \qquad (19)$$

Рассмотрим следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$-u'' + p_0(t)u + q(t)u^n = f(t), \quad a < t < b, \qquad (20)$$

$$u(a) = u(b) = 0. \qquad (21)$$

Обобщенным решением краевой задачи (20), (21) называется функция $u_0(t) \in H_0^1(a,b)$, удовлетворяющая равенству

$$\int_a^b u_0'(t)v'(t)dt + \int_a^b p_0(t)u_0(t)v(t)dt + \int_a^b q(t)u_0^n(t)v(t)dt = \int_a^b f(t)v(t)dt \qquad (22)$$

при любых $v(t) \in H_0^1(a,b)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

$$p_0(t)(t-a)(b-t) \in L(a,b); \qquad (23)$$

$$q(t) \geqslant 0, \qquad q(t)[(t-a)(b-t)]^{\frac{n+1}{2}} \in L(a,b), \quad n \geqslant 2; \qquad (24)$$

$$f(t) \geqslant 0, \quad f(t)\sqrt{(t-a)(b-t)} \in L(a,b); \tag{25}$$

$$c \equiv 1 - \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b p_0^-(t)(t-a)(b-t)dt > 0. \tag{26}$$

Тогда

(1) *существует неотрицательное обобщенное решение* $u_0(t)$ *краевой задачи* (20), (21);

(2) *верна оценка*

$$\|u_0\|_{H_0^1(a,b)} \leqslant \frac{1}{c\sqrt{b-a}}\int\limits_a^b f(t)\sqrt{(t-a)(b-t)}dt; \tag{27}$$

(3) *если*

$$p_0(t) \in C(a,b), \quad q(t) \in C(a,b), \quad f(t) \in C(a,b),$$

то $u_0(t) \in C^{(2)}(a,b)$ *и является решением краевой задачи*

$$-u_0''(t) + p_0(t)u_0(t) + q(t)u_0^n(t) = f(t), \quad a < t < b, \tag{28}$$

$$u_0(a) = u_0(b) = 0. \tag{29}$$

Доказательство. Введем банахово пространство E непрерывных отображений $u(t,\tau)$ замкнутого промежутка $[0,1]$ в пространство $H_0^1(a,b)$ с нормой

$$\|u\|_E^2 = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant 1}\int\limits_a^b \left[\frac{du(t,\tau)}{dt}\right]^2 dt. \tag{30}$$

Пусть K – конус неотрицательных элементов из E, т.е. $u(t,\tau) \in K$ означает, что $u(t,\tau) \in E$ и $u(t,\tau) \geqslant 0$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $a \leqslant t \leqslant b$. Пусть $u(t,\tau) \in K$ и пусть $w(u) \equiv w(u(t,\tau), f(t))$ — та единственная функция из E, существующая по теореме 1, которая удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_a^b w_t'(u)v'(t)dt + \int\limits_a^b p_0(t)w(u)v(t)dt + n\int\limits_a^b q(t)u^{n-1}(t,\tau)w(u)v(t)dt$$
$$= \int\limits_a^b f(t)v(t)dt \tag{31}$$

для всех $v(t) \in H_0^1(a,b)$.

По теореме 1 мы имеем $w(u(t,\tau), f(t)) \geqslant 0$ и

$$\|w(u)\|_{H_0^1(a,b)} \leqslant \frac{1}{c\sqrt{b-a}} \int\limits_a^b \sqrt{(t-a)(b-t)} f(t)dt \equiv M. \tag{32}$$

Далее, пусть $u(t,\tau), z(t,\tau) \in K \cap S_E(O,M)$ и $\Delta = w(u) - w(z)$. Тогда

$$\int\limits_a^b [\Delta']^2 dt + \int\limits_a^b p_0(t)\Delta^2 dt + n\int\limits_a^b q(t) z^{n-1}\Delta^2 dt$$

$$+n(n-1)\int\limits_a^b q(t)(u(t,\tau)-z(t,\tau))[u(t,\tau)+\theta(z(t,\tau)-u(t,\tau))]^{n-2} w(u)\Delta dt.$$

Здесь $0 < \theta < 1$. Откуда

$$\sup_{0\leqslant\tau\leqslant 1} \|w(u) - w(z)\|_{H_0^1(a,b)} \leqslant L \sup_{0\leqslant\tau\leqslant 1} \|u(t,\tau) - z(t,\tau)\|_{H_0^1(a,b)}. \tag{33}$$

Здесь $L < +\infty$.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра в пространстве E

$$u(t,\tau) = \int\limits_0^\tau w(u(t,s), f(t))ds. \tag{34}$$

Для уравнения (34), в силу неравенств (32) и (33), выполнены все условия леммы 1 из [1]. Поэтому существует решение $u(t,\tau)$ уравнения (34), которое удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_a^b u_t(t,\tau)v'(t)dt + \int\limits_a^b p_0(t)u(t,\tau)v(t)dt + \int\limits_a^b q(t)u^n(t,\tau)v(t)dt$$

$$= \int\limits_a^b \tau f(t)v(t)dt \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1$$

для любых $v(t) \in H_0^1(a,b)$. Таким образом $u(t,1)$ является обобщенным решением задачи (20), (21).

Утверждение (2) доказывается, как при доказательстве теоремы 1. Доказательство утверждения (3) аналогично доказательству теоремы 3 работы [2].

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть*

$$|p_0(t)|(1-t^2)^2 \leqslant c_0 < +\infty,\ p_0^-(t)(1-t^2)^2 \leqslant d < +\infty \quad \text{при} \quad -1 \leqslant t \leqslant 1; \tag{35}$$

$$f(t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \quad f(t)(1-t^2) \in L_2(-1,1); \tag{36}$$

$$Q \equiv 1 - d > 0; \tag{37}$$

$$q(t) \geqslant 0, \quad q(t)(1-t^2)^{\frac{n+1}{2}} \in L(-1,1). \tag{38}$$

Тогда

(1) *существует неотрицательное обобщенное решение $u_0(t)$ краевой задачи*

$$-u'' + p_0(t)u + q(t)u^n = f(t), \quad -1 < t < 1, \tag{39}$$

$$u(-1) = u(1) = 0; \tag{40}$$

(2) *верна оценка*

$$\|u_0\|_{H_0^1(-1,1)} \leqslant \frac{1}{Q}\left(\int\limits_{-1}^{1} f^2(t)(1-t^2)^2 dt\right)^{1/2};$$

(3) *если $p_0(t) \in C(a,b)$, $q(t) \in C(a,b)$, $f(t) \in C(a,b)$, то $u_0(t) \in C^{(2)}(a,b)$ и является решением краевой задачи*

$$-u''(t) + p_0(t)u + q(t)u^n = f(t), \quad -1 < t < 1,$$

$$u(-1) = u(1) = 0.$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (23)–(26). Тогда неотрицательное обобщенное решение краевой задачи (20), (21) единственно.*

Доказательство. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два неотрицательных обобщенных решения задачи (20), (21). Тогда, если $\Delta = u_1 - u_2$, то

$$\int\limits_a^b [\Delta']^2 dt + \int\limits_a^b p_0(t)\Delta^2 dt + n\int\limits_a^b q(t)\Delta^2[u_1 + \theta(u_2 - u_1)]^{n-1} dt = 0,$$

и потому

$$0 \geqslant \left(1 - \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b p_0^-(t)(t-a)(b-t)dt\right)\|u_1 - u_2\|^2_{H_0^1(a,b)},$$

т.е. $u_1 = u_2$.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (35)–(38)*. Тогда неотрицательное обобщенное решение краевой задачи* (39), (40) *единственно.*

Литература

1. М. Н. Яковлев, *Разрешимость нелинейных уравнений в конусе пространства Банаха.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **248** (1998), 225–230.
2. М. Н. Яковлев, *Разрешимость сингулярных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка* $2m$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **309** (2004), 174–188.

Yakovlev M. N. Existence of nonnegative solutions of singular boundary-value problems for second-order ordinary differential equations.

It is proved that the boundary-values problem

$$-u'' + p(t)u + q(t)u^n = f(t), \quad u(a) = u(b) = 0, \quad n \geqslant 2$$

has a unique nonnegative solution if the following conditions are fulfilled:

$$0 \leqslant q(t)[(b-t)(t-a)]^{\frac{n+1}{2}} \in L(a,b), \quad 0 \leqslant f(t)\sqrt{(b-t)(t-a)} \in L(a,b)$$

$$1 - \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b p^-(t)(t-a)(b-t)dt > 0.$$

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 23 мая 2005 г.