Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 324, 2005 г.

В. В. Камоцкий

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ К ЗАДАЧЕ О РАССЕЯНИИ ДВУМЯ КЛИНЬЯМИ

1. Введение

Мы рассмотрим задачу рассеяния акустических волн двумя клиньями. Используя технику спектральных функций, с помощью которой в [1] были получены одни из первых результатов о существовании решения задачи рассеяния на упругом клине, погруженном в жидкость, мы тем не менее следуем несколько другой схеме: В исследовании дифракции на упругом клине в [2] сначала с помощью спектральных функций устанавливалось существование тензора Грина, далее из этого выводилась единственность. Мы же, в виду изучения более простого оператора, априори получим единственность в классе функций удовлетворяющих условиям излучения, из чего выведем существование решения интегральной системы для спектральной функции.

Пусть волновой процесс имеет место в дополнении к двум непересекающимся клиньям Ω_1 и Ω_2 с разными вершинами. Введем связанные с сторонами клиньев четыре декартовы системы координат (x_j, y_j), $j = 1...4$. Будем считать первую и третью системы правильно ориентированными, а вторую и четвертую– обратно ориентированными (см. Рис. 1). Введем следующие обозначения для углов между осями:

$$\widehat{x_1 x_2} = \varphi_1 > \pi \tag{1}$$

$$\widehat{x_3 x_4} = \varphi_2 > \pi \tag{2}$$

$$\widehat{x_2 x_3} = \varrho \tag{3}$$

Пусть вершина Ω_2 имеет координаты (x_1^0, y_1^0) в первой системе. Будем также использовать обозначение

$$\Gamma_j = \{x_j \geqslant 0, y_j = 0\} \tag{4}$$

Работа выполнена при поддержке гранта 04-01-00522а и гранта РФФИ 05-01-00936.

для сторон клиньев.

Отметим, что в выбранных системах координат y_j – *внутренняя* нормаль к стороне Γ_j, $j = 1...4$.

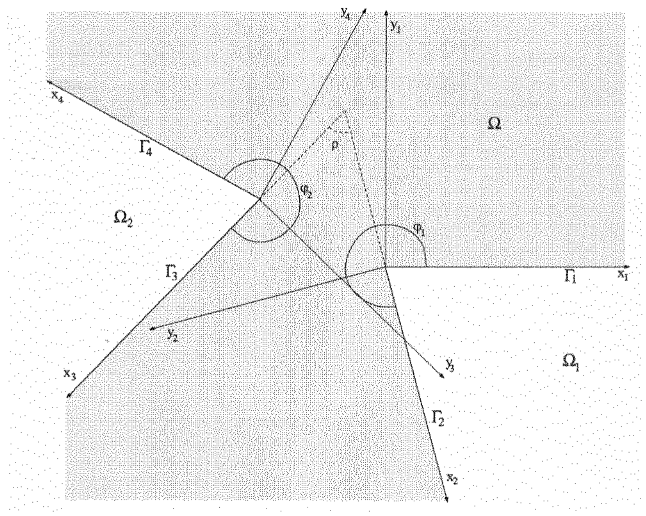

Рис. 1. Геометрия задачи.

2. Теорема единственности

Рассмотрим оператор Гельмгольца в $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ с идеальными граничными условиями. Не умаляя общности будем считать волновое число равным 1.

Для доказательства единственности, мы используем классический метод, применимый в угловых областях в ситуации, когда переменные разделяются в окрестности бесконечности. Главное геометрическое предположение, необходимое для наших рассуждений о единственности заключается в том, что хотя бы один из выходов на бесконечность должен быть угловым (не волноводным).

Введем следующие обозначения: пусть O_1 – пересечение (продолжений) осей x_1 и x_4, а O_2 – пересечение x_2 и x_3. Теперь введем полярные координаты связанные с этими точками: $r_j(X)$ – рас-

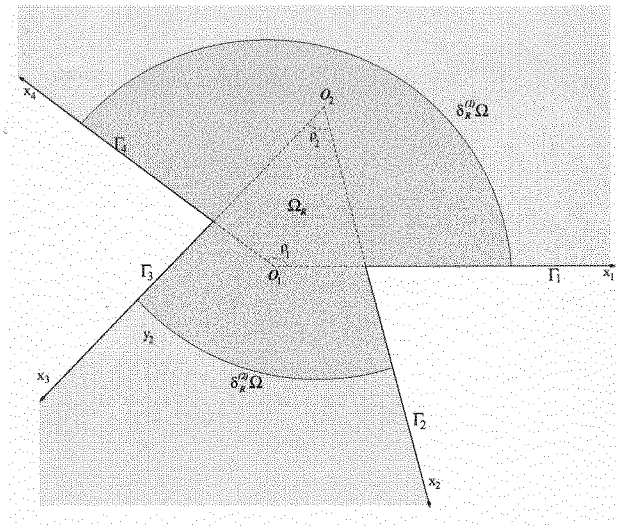

Рис. 2. Координаты в окрестности бесконечности.

стояние от X до O_j, и ψ_j – угол между XO_j и Γ_j. Определим также для достаточно больших $R > 0$ область Ω_R

$$\Omega_R = \bigcup_{j=1,2} \{r_j < R, \psi_j \in (0, \varrho_j)\} \tag{5}$$

и криволинейную часть границы этой области $\delta_R\Omega = \delta_R^{(1)}\Omega \cup \delta_R^{(2)}\Omega$, где

$$\delta_R^{(j)}\Omega = \Omega \cap \{r_j = R, \psi_j \in (0, \varrho_j)\}, \tag{6}$$

см. Рис. 2. Имеет место

Теорема 2.1 (Единственности). *Пусть* $u \in H^1_{loc}(\overline{\Omega}) \cap H^2_{loc}(\Omega)$ *удовлетворяет*

$$(\Delta + 1)u = 0 \text{ в } \Omega, \tag{7}$$

$$Bu = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{8}$$

(с граничным оператором B – Дирихле или Неймана) и интеграль-

ным условиям излучения при $R \to \infty$:

$$\int\limits_{\delta_R^{(j)}\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial r_j} + iu \right|^2 \to 0, \ j = 1, 2, \tag{9}$$

тогда $u = 0$.

Доказательство. Пусть u удовлетворяет условиям теоремы. Заметим, что (9) влечет

$$\int\limits_{\delta_R\Omega} |u|^2 = o(1), \ R \to \infty, \tag{10}$$

$$\int\limits_{\delta_R^{(j)}\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial r_j} \right|^2 = o(1), \ R \to \infty, \quad j = 1, 2. \tag{11}$$

В самом деле, условие излучения (9) может быть записано в следующем виде:

$$-i \int\limits_{\delta_R\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\overline{u} - u\frac{\partial \overline{u}}{\partial n} \right) + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\delta_R^{(j)}\Omega} \left(|u|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial r_j} \right|^2 \right) \to 0, \ R \to \infty. \tag{12}$$

Из тождества Грина

$$\int\limits_{B} (v\Delta w - w\Delta v) = \int\limits_{\partial B} \left(v\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial v}{\partial n} \right) \tag{13}$$

примененного к u и $\overline{u}$ в области Ω_R следует, что первый интеграл в (12) равен 0. Таким образом мы получаем оценки (10) и (11).

Будем предполагать, что $\{\psi_1 \in (0, \varrho_1)\}$ – угловой выход на бесконечность. В случае граничного условия Дирихле применим (13) к $v = u$ и $w = H_m^{(2)}(r_1)\sin(m\psi_1)$, с $m = \pi k/\varrho_1$, $k \in \mathbb{N}$ в области $B = \Omega_R \setminus \Omega_{R_0} \cap \{r_1 > 0\}$ с $R > R_0 > 0$. При достаточно больших R_0, R граница ∂B состоит из $\delta_R^{(1)}$, $\delta_{R_0}^{(1)}$ и двух прямолинейных участков на Γ_1 и Γ_4. В виду того, что обе функции удовлетворяют условию Дирихле на Γ_1 и Γ_4, получаем равенство:

$$\int\limits_{\delta_R^{(1)}} \left(v\frac{\partial w}{\partial r_1} - w\frac{\partial v}{\partial r_1} \right) = \int\limits_{\delta_{R_0}^{(1)}} \left(v\frac{\partial w}{\partial r_1} - w\frac{\partial v}{\partial r_1} \right), \tag{14}$$

т.е. интеграл в левой части не зависит от R. Однако, из оценок (10), (11) и асимптотики $H_m^{(2)}$ следует, что интеграл по $\delta_R^{(1)}\Omega$ стремится к 0 при $R \to \infty$. Таким образом этот интеграл тождественно равен 0, т.е. при $r_1 > R_0$ мы имеем

$$H_m^{(2)}(r_1) \int_0^{\varrho_1} \frac{\partial u}{\partial r_1}(r_1, \psi_1) \sin m\psi_1 \, d\psi_1 - \frac{dH_m^{(2)}(r_1)}{dr_1} \int_0^{\varrho_1} u(r_1, \psi_1) \sin m\psi_1 \, d\psi_1 = 0. \quad (15)$$

Заключаем, что

$$\int_0^{\varrho_1} u(r_1, \psi_1) \sin m\psi_1 \, d\psi_1 = c_m H_m^{(2)}(r_1). \quad (16)$$

Если $c_m \neq 0$ то мы приходим к противоречию с (10), т.к. $\{\sin m\psi_1 \ : \ m = \pi k/\varrho_1\}_{k \in \mathbb{N}}$ составляют ортогональный базис в $L^2(0, \varrho_1)$, а $\sqrt{r_1} H_m^{(2)}(r_1) \neq o(1)$. Таким образом, благодаря произвольности $k \in \mathbb{N}$ в последней формуле, мы заключаем, что $u = 0$ при $r_1 > R_0$ и, следовательно $u = 0$ и во всем Ω.

Схожие рассуждения применимы и в случае условий Неймана, за исключением выбора базиса по угловой переменной: следует рассматривать $\cos m\psi$, $m = \pi k/\varrho_1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. Спектральные функции и теоремы существования

В этом параграфе мы проведем изложение ключевых для метода спектральных функций моментов (см. [1] и [2]), – вывод интегральных уравнений и доказательство теоремы об изоморфизме.

Мы рассмотрим задачи Дирихле и Неймана для оператора Гельмгольца в области Ω и найдем решения в виде потенциалов двойного и простого слоя соответственно. Преобразования Фурье плотностей этих потенциалов будем называть спектральными функциями. Для последних мы сформулируем интегральную систему и докажем ее разрешимость.

3.1. Задача Неймана. Рассмотрим систему с “общими” граничными данными:

$$\begin{cases} (\Delta + 1)u = 0 \text{ в } \Omega \\ \partial_n u = f \text{ на } \Gamma \end{cases} \quad (17)$$

здесь $\Gamma = \cup_{j=1..4}\Gamma_j$, функция f определяется сужениями на стороны $f_j = f|_{\Gamma_j}$, а ∂_n обозначает дифференцирование по внутренней нормали. Мы покажем, что если f удовлетворяет некоторым ограничениям аналитического характера, а также геометрия задачи обладает определенным свойством "узости", то (17) имеет единственное физически осмысленное решение, т.е. решение с конечной энергией в окрестности вершин клиньев, а также удовлетворяющее условиям излучения на бесконечности.

3.1.1. Уходящие решения. Ограничим поиск решения классом функций, представимых в виде потенциала простого слоя и удовлетворяющих принципу предельного поглощения. Пусть $\varepsilon \in [0, \pi)$, рассмотрим *во всем пространстве* $\mathbb{R}^2$ уравнение

$$(\Delta + e^{-2i\varepsilon})u^\varepsilon = d \tag{18}$$

где распределение $d = \sum\limits_1^4 \alpha_k(x_k) \otimes \delta_k$, а δ_k определяется на пробных функциях $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ следующим образом:

$$\langle \delta_k, \phi \rangle = \int\limits_0^\infty \phi(x_k, 0)\, dx_k. \tag{19}$$

Функции α_k – неизвестные плотности, а их Фурье-образы составляют главную неизвестную величину подхода – *спектральную функцию.* При $\varepsilon \in (0, \pi)$ и очень слабых ограничениях на плотности α_k уравнение (18) имеет однозначно определенное решение, оно задается суммой $u^\varepsilon = \sum u_j^\varepsilon$, где потенциалы простого слоя u_j^ε определяются с помощью

$$u_j^\varepsilon = (\Delta + e^{-2i\varepsilon})^{-1}(\alpha_j \otimes \delta_j). \tag{20}$$

Переходя к представлению через Фурье образы, находим

$$u_j^\varepsilon(x_j, y_j) = \frac{-i}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_0} e^{i(x_j\xi + |y_j|\zeta^\varepsilon(\xi))} \frac{\widehat{\alpha_j}(\xi)}{\zeta^\varepsilon(\xi)} d\xi, \tag{21}$$

здесь Γ_0 – контур, изображенный на Рис. 3, $\zeta^\varepsilon(\xi)$ – ветвь $\sqrt{e^{-2i\varepsilon} - \xi^2}$, непрерывная на Γ_0 и обладающая неотрицательной мнимой частью на вещественной оси, а $\widehat{\alpha_j}$ – преобразования Фурье α_j:

$$\widehat{\alpha_j}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\alpha_j(x)\, dx \tag{22}$$

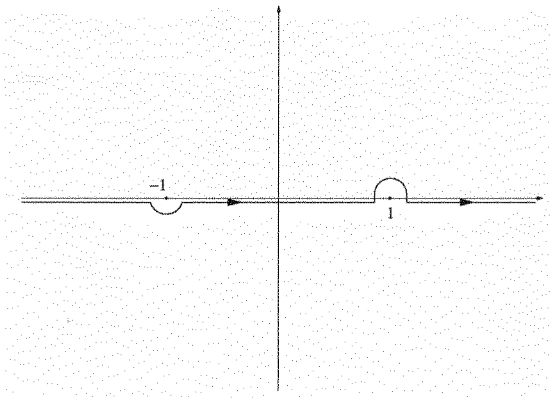

Рис. 3. Контур Γ_0 в плоскости ξ.

Потенциалы (21) должны обладать "подходящими" плотностями, для того, чтобы удовлетворить естественным ограничениям типа условия Мейкснера. Итак, опишем класс функций, в котором будем искать эти плотности:

Определение 3.1. *Класс $\mathcal{A}$ состоит из всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^+$ таких, что*

$$\exists C_0 > 0 \ : \ \sup_{-\pi<\theta<0} \int\limits_{C_0}^{\infty} |\hat{f}(\rho e^{i\theta})|^2 \, d\rho < \infty, \tag{23}$$

$$\hat{f} \quad \text{голоморфна в окрестности} \quad 1. \tag{24}$$

Справедлив следующий результат о регулярности потенциалов v_j^ε с плотностями из класса $\mathcal{A}$ (см. [1, Лемма 2.2]).

Лемма 3.2. *Пусть $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $j = 1...4$. Тогда распределения умеренного роста v_j^ε, определенные с помощью (20) стремятся при $\varepsilon \to 0$ к распределениям $v_j^0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, являющимся решениями*

$$(\Delta + 1)v_j^0 = \alpha_j \otimes \delta_j, \quad j = 1, 2. \tag{25}$$

Более того, при $\varepsilon \in [0, \pi)$, $j = 1, 2$

(i) *v_j^ε непрерывны в $\mathbb{R}^2$,*

(ii) *следы* $v_j^\varepsilon|_\Gamma$ *и* $\partial_n^\pm v_j^\varepsilon|_\Gamma$ *корректно определены и обладают следующей регулярностью:* $v_j^\varepsilon|_\Gamma \in H^1_{loc}(\Gamma)$, $\partial_n^\pm v_j^\varepsilon|_\Gamma \in L^2_{loc}(\Gamma)$ *и являются распределениями ограниченного роста в окрестности бесконечности.*

Эта лемма позволяет нам дать корректное определение:

Определение 3.3. *Будем называть* v **уходящим решением** (17) *любое решение вида*

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \tag{26}$$

где

$$v_j = \lim_{\varepsilon\to 0+} (\Delta + e^{-2i\varepsilon})^{-1} \alpha_j \otimes \delta_j, \tag{27}$$

а $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $j = 1...4$

3.1.2. Интегральная система. Следующим шагом, из граничных условий в (17) мы выводим интегральную систему, которой будут удовлетворять плотности потенциалов.

Сначала введем обозначения для замены переменных: координаты в k-ой системе выражаются через коодинаты j-ой следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = A_k^j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} + G_k^j, \tag{28}$$

где

$$A_k^j = \begin{pmatrix} a_k^j & b_k^j \\ c_k^j & d_k^j \end{pmatrix}, \quad G_k^j = \begin{pmatrix} g_k^j \\ h_k^j \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Все наши общие предположения о геометрии задачи могут быть переформулированы в терминах замен:

$$A_j^j = \mathbb{I}, \quad G_2^1 = G_4^3 = 0, \quad G_1^3 = G_1^4 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ y_1^0 \end{pmatrix}, \quad G_3^1 = \begin{pmatrix} x_3^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = -A_3^1 G_1^3, \tag{30}$$

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \end{pmatrix}, \quad A_1^3 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 - \varrho) & -\sin(\varphi_1 - \varrho) \\ \sin(\varphi_1 - \varrho) & \cos(\varphi_1 - \varrho) \end{pmatrix}, \tag{31}$$

$$A_1^4 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varrho) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \varrho) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \varrho) & -\cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varrho) \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Эти соотношения достаточны, чтобы определить оставшиеся A_k^j и G_k^j.

Итак, вычислим нормальную производную k-ого потенциала на j-ой грани:

$$\frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial y_j}(x_j,0+)$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_0} e^{i(a_k^j x_j+g_k^j)\xi+i|c_k^j x_j+h_k^j|\zeta^\varepsilon(\xi))}\frac{b_k^j\xi+d_k^j\theta_k^j(x_j)\zeta_\varepsilon(\xi)}{\zeta^\varepsilon(\xi)}\widehat{\alpha_k}(\xi)d\xi, \qquad (33)$$

здесь $\theta_k^j(x_j) = \operatorname{sign}(c_k^j x_j + h_k^j)$. Таким образом, преобразование Фурье этого следа имеет следующий вид:

$$\int\limits_0^\infty e^{-ix_j\zeta}\frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial y_j}(x_j,0+)dx_j = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_0} I_k^j(\zeta,\xi)\widehat{\alpha_k}(\xi)d\xi, \qquad (34)$$

где ядро

$$I_k^j(\zeta,\xi) = \int\limits_0^\infty e^{-ix_j\zeta}e^{i(a_k^j x_j+g_k^j)\xi+i|c_k^j x_j+h_k^j|\zeta^\varepsilon(\xi))}\frac{b_k^j\xi+d_k^j\theta_k^j(x_j)\zeta_\varepsilon(\xi)}{\zeta^\varepsilon(\xi)}dx_j \qquad (35)$$

в значительной мере зависит от геометрии задачи. Рассмотрим три качественно различные модельные ситуации: $j = k$, – т.е. след на нормальной производной потенциала на той же грани, которой он соответствует; $j = 1$, $k = 2$, – т.е. след на примыкающей грани того-же клина; $j = 1$, $k = 3$, – т.е. след на грани другого клина. В первых двух случаях мы находим:

$$I_j^j = \frac{1}{i(\zeta-\xi)}, \qquad (36)$$

$$I_2^1 = I_1^2 = \frac{1}{i(\zeta-(\xi\cos\varphi_1-\zeta_\varepsilon(\xi)\sin\varphi_1))}\frac{\xi\sin\varphi_1+\cos\varphi_1\zeta_\varepsilon(\xi)}{\zeta_\varepsilon(\xi)}, \qquad (37)$$

$$I_4^3 = I_3^4 = \frac{1}{i(\zeta-(\xi\cos\varphi_2-\zeta_\varepsilon(\xi)\sin\varphi_2))}\frac{\xi\sin\varphi_2+\zeta_\varepsilon(\xi)\cos\varphi_2}{\zeta_\varepsilon(\xi)}. \qquad (38)$$

В третьем случае введем обозначение $\varphi_3 = \varphi_1 - \varrho_1$ и рассмотрим две геометрически различные ситуации, возникающие в зависимости от соотношений между знаками $\sin\varphi_3$ и y_3^0:

(a.1) $\sin\varphi_3 < 0$, $y_3^0 > 0$, в этом случае $\theta_3^1 \equiv 1$ при $x_1 \geqslant 0$ и, следовательно

$$I_3^1(\zeta,\xi) = \frac{\xi\sin\varphi_3+\zeta_\varepsilon(\xi)\cos\varphi_3}{i(\zeta-(\xi\cos\varphi_3-\zeta_\varepsilon(\xi)\sin\varphi_3))\zeta_\varepsilon(\xi)}e^{i(x_3^0\xi+y_3^0\zeta_\varepsilon(\xi))} \qquad (39)$$

(а.2) $\sin\varphi_3 > 0$, $y_3^0 < 0$, тогда $\theta_3^1 \equiv -1$, и

$$I_3^1(\zeta,\xi) = \frac{\xi\sin\varphi_3 - \zeta_\varepsilon(\xi)\cos\varphi_3}{i(\zeta - (\xi\cos\varphi_3 + \zeta_\varepsilon(\xi)\sin\varphi_3))\zeta_\varepsilon(\xi)} e^{i(x_3^0\xi - y_3^0\zeta_\varepsilon(\xi))} \tag{40}$$

(б.1) $\sin\varphi_3 < 0$, $y_3^0 < 0$, в отличие от предыдущих случаев, фукнция θ_3^1 теперь не тождественная константа на $\mathbb{R}^+$ и меняет знак в $\tilde{x}_1 = y_3^0/\sin\varphi_3 > 0$:

$$\theta_3^1 = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad x_1 < \tilde{x}_1 \\ 1, & \text{если} \quad x_1 > \tilde{x}_1 \end{cases} \tag{41}$$

таким образом, мы заключаем:

$$\begin{aligned} &I_3^1(\zeta,\xi) \\ &= D_+(\xi,\zeta)e^{i(x_3^0\xi - y_3^0\zeta_\varepsilon(\xi))} - (D_+(\xi,\zeta) - D_-(\xi,\zeta))e^{-i(y_3^0/\sin\varphi_3)\zeta - i(g_3^0 - x_3^0)\xi} \end{aligned} \tag{42}$$

где

$$D_\pm(\xi,\zeta) = \frac{\xi\sin\varphi_3 \mp \zeta_\varepsilon(\xi)\cos\varphi_3}{i(\zeta - (\xi\cos\varphi_3 \pm \zeta_\varepsilon(\xi)\sin\varphi_3))\zeta_\varepsilon(\xi)}, \tag{43}$$

а g_3^0 – расстояние между проекцией первой вершины на ось x_3 и точкой пересечения осей x_1 и x_3; в виду естественных геометрических предположений (того, что *положительные* полуоси x_1 и x_3 не пересекаются) мы всегда имеем $g_3^0 - x_3^0 > 0$.

(б.2) $\sin\varphi_3 > 0$, $y_3^0 > 0$, аналогично предшествующему случаю θ_3^1 меняет знак в $\tilde{x}_1 = y_3^0/\sin\varphi_3 > 0$:

$$\theta_3^1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_1 < \tilde{x}_1 \\ -1, & \text{если} \quad x_1 > \tilde{x}_1 \end{cases} \tag{44}$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} I_3^1(\zeta,\xi) = D^+(\xi,\zeta)e^{i(x_3^0\xi + y_3^0\zeta_\varepsilon(\xi))} - (D^+(\xi,\zeta) \\ - D^-(\xi,\zeta))e^{-i(y_3^0/\sin\varphi_3)\zeta - i(h_3^0 - x_3^0)\xi} \end{aligned} \tag{45}$$

где

$$D^\pm(\xi,\zeta) = \frac{\xi\sin\varphi_3 \pm \zeta_\varepsilon(\xi)\cos\varphi_3}{i(\zeta - (\xi\cos\varphi_3 \pm \zeta_\varepsilon(\xi)\sin\varphi_3))\zeta_\varepsilon(\xi)}. \tag{46}$$

Также $h_3^0 - x_3^0 > 0$.

Теперь мы можем сформулировать интегральную систему для спектральной функции $\Sigma = (\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\alpha}_3, \widehat{\alpha}_4)^t$.

Лемма 3.4. *v является уходящим решением (17) тогда и только тогда, когда соответствующая спектральная функция удовлетворяет при всех $\zeta \in \mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ интегральной системе:*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\varphi_1} & \mathcal{K}_{12} \\ \mathcal{K}_{21} & \mathcal{L}_{\varphi_2} \end{pmatrix} \Sigma(\zeta) = W(\zeta), \tag{47}$$

где каждый элемент матрицы слева также является матричным 2×2 оператором: $\mathcal{L}_{\varphi_j}$, $j = 1, 2$ – операторы описывающие "действие" клиньев Ω_j на самих себя:

$$\mathcal{L}_{\varphi_j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & TM_{\varphi_j} \\ TM_{\varphi_j} & \mathbb{I} \end{pmatrix},$$

здесь

$$TM_{\varphi_j} V(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{\xi \sin\varphi_j + \zeta_0(\xi)\cos\varphi_j}{\zeta - (\xi\cos\varphi_j - \zeta_0(\xi)\sin\varphi_j)} \frac{V(\xi)}{\zeta_0(\xi)} d\xi. \tag{49}$$

Операторы $\mathcal{K}_{12}$ и $\mathcal{K}_{21}$ соответствуют взаимодействию клиньев:

$$\mathcal{K}_{12} = \begin{pmatrix} k_3^1 & k_4^1 \\ k_3^2 & k_4^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{K}_{21} = \begin{pmatrix} k_1^3 & k_2^3 \\ k_1^4 & k_2^4 \end{pmatrix}, \tag{50}$$

здесь k_j^i – вклад j-ого потенциала на Γ_i. Ядра операторов k_j^i задаются формулами (a.1)–(b.1) *в зависимости от геометрии задачи. Правая часть системы есть преобразование Фурье f:*

$$W(\zeta) = (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3, \widehat{f}_4)^t(\zeta). \tag{51}$$

3.1.3. Теорема существования. Мы докажем существование решения в следующем предположении "узости":

$$\forall j = 1, 2, \quad k = 3, 4 \quad \operatorname{sign} c_j^k = \operatorname{sign} h_j^k, \quad \operatorname{sign} c_k^j = \operatorname{sign} h_k^j, \tag{52}$$

которое означает, что из приведенной выше классификации взаимного расположения клиньев реализуется только случаи (a.1) и (a.2), т.е. оба клина лежат по одну сторону от прямой проходящей через их вершины.

Теорема 3.5. *Пусть $W(\xi) \in \hat{\mathcal{A}}^2 \oplus \hat{\mathcal{A}}^2$ голоморфна в $\mathbb{C}_-^\delta = \{z : \arg z \in (-\pi, \delta)\}$ с некоторым $\delta > 0$. Пусть также при $\varepsilon \in (0, \delta)$ $W^\varepsilon =$*

$W(e^{i\varepsilon}\cdot) \in H^+$, тогда, при выполнении условия (52), *в классе* $\hat{\mathcal{A}}^2 \oplus \hat{\mathcal{A}}^2$ *существует решение системы* (47).

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, \delta)$. Сформулируем эквивалентную (47) систему, по сути являющуюся поворотом на угол ε исходной. Сделаем в (47) замену: $\zeta = e^{i\varepsilon}\zeta_1$, $\xi = e^{i\varepsilon}\xi_1$. Обозначая $\Sigma^\varepsilon(\xi) = \Sigma(e^{i\varepsilon}\xi), W^\varepsilon(\zeta) = W(e^{i\varepsilon}\zeta)$ получаем систему

$$\mathcal{M}^\varepsilon \Sigma^\varepsilon = W^\varepsilon, \tag{53}$$

где оператор $\mathcal{M}^\varepsilon$ имеет ту же структуру, что и исходный оператор $\mathcal{M}^0$:

$$\mathcal{M}^\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^\varepsilon_{\varphi_1} & \mathcal{K}^\varepsilon_{12} \\ \mathcal{K}^\varepsilon_{21} & \mathcal{L}^\varepsilon_{\varphi_2} \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Центральные свойства техники спектральных функций, обеспечивающие прозрачность решения задач дифракции в угловых областях, заключаются в следующих наблюдениях:

- операторы $\mathcal{L}^\varepsilon$ инвариантны по отношению к приведенной выше замене переменных в следующем смысле: выражение для $\mathcal{L}^\varepsilon$ получается простой заменой ζ_0 на ζ_ε в определении (49);
- оператор $\mathcal{L}^\varepsilon$ соответствует задаче дифракции на одном клине в среде с поглощением (комплексным волновым числом), для которой существование и единственность получаются относительно легко; соответственно устанавливается и обратимость $\mathcal{L}^\varepsilon$ в $(H^+)^2$.

Эти свойства позволяют доказать "теорему об изоморфизме" для задачи об одном угле (см. примеры рассуждений в [1] и [2]), утверждающую, что $\mathcal{L}^\varepsilon$ есть изоморфизм пространства $(H^+)^2$ на само себя при $\varepsilon \in (0, \pi)$. Далее, пользуясь детальным описанием аналитических свойств операторов DM^ε и TM^ε устанавливается существование решения исходной задачи дифракции.

В нашем случае оператор $\mathcal{M}^\varepsilon$ не соответствует задаче с поглощением, что видно из неинвариантности $\mathcal{K}^\varepsilon$ по отношению к описанной выше замене переменных. Тем не менее оператор $\mathcal{M}^\varepsilon$ является изоморфизмом $(H^+)^4$ на само себя. Этот факт следует из того, что в приведенным геометрических предположениях взаимодействие двух клиньев оказывается "слабым" в том смысле, что операторы $\mathcal{K}^\varepsilon_{ij}$ – компактны, и, таким образом, $\mathcal{M}^\varepsilon$ – Фредгольмов с нулевым индексом. Таким образом для разрешимости системы достаточно воспользоваться единственностью (см. §2).

Для завершения доказательства достаточно проверить следующее:

•*Компактность* $\mathcal{K}^{\varepsilon}_{ij}$. Операторы $(k^i_j)^{\varepsilon}$ имеют вид

$$k^{\varepsilon}U(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} k^{\varepsilon}(\zeta,\xi)U(\xi)\,d\xi, \tag{55}$$

где $k^{\varepsilon}(\zeta,\xi)$ вычисляется по формулам (39) или (40). В случае (a.1) мы имеем

$$k^{\varepsilon}(\zeta,\xi) = \frac{\xi\sin\varphi_3 + \zeta_{\varepsilon}(\xi)\cos\varphi_3}{(\zeta - (\xi\cos\varphi_3 - \zeta_{\varepsilon}(\xi)\sin\varphi_3))\zeta_{\varepsilon}(\xi)} e^{ie^{i\varepsilon}(x^0_3\xi + y^0_3\zeta_{\varepsilon}(\xi))}. \tag{56}$$

Для анализа свойств операторов с ядрами такого типа нам понадобится очевидная

Лемма 3.6. *Для всех* $U \in H^+$ *имеет место тождество:*

$$\|U; H^+\| = \|U(\cdot - i0); L^2(\mathbb{R})\|. \tag{57}$$

Из этой леммы следует, что для проверки непрерывности k^{ε} в H^+ достаточно показать аналитичность $k^{\varepsilon}U$ в нижней полуплоскости и оценить норму на вещественной оси. Такое же рассуждение применимо и для проверки компактности – достаточно показать компактность k^{ε} как оператора в $L^2(\mathbb{R})$. Как легко видеть из (56) ядро допускает следующую оценку:

$$|k^{\varepsilon}(z_1,z_2)| \leqslant C\frac{e^{-\delta|z_2|}}{1 + |z_1| + |z_2|} \tag{58}$$

где $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, а $\delta = \sin(\varphi^3_0 + \varepsilon)r^3_0$, здесь r^3_0, φ^3_0 – полярные координаты первой вершины в третьей системе. Таким образом мы видим, что k^{ε} оператор Гильберта–Шмидта.

• *Существование аналитического продолжения решения (53) следует из аналогичных построений для задачи об одном клине* (см. [1, Лемма 3.7]).

3.2. Задача Дирихле. При рассмотрении задачи

$$\begin{cases} (\Delta + 1)u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \\ u = f \quad \text{на} \quad \Gamma \end{cases} \tag{59}$$

мы следуем изложенной выше схеме рассуждений. Мы ищем решение в виде суммы потенциалов двойного слоя. Итак при $\varepsilon \in [0, \pi)$ мы определяем

$$u^\varepsilon = u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon + u_3^\varepsilon + u_4^\varepsilon, \tag{60}$$

где

$$u_j^\varepsilon(x_j, y_j) = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{sign} y_j \int\limits_{\Gamma_0} e^{ix_j\xi + i|y_j|\zeta_\varepsilon(\xi)} \widehat{\alpha}_j(\xi) d\xi, \quad j = 1...4, \tag{61}$$

а плотности $\alpha_j \in \mathcal{A}$.

Используя те же обозначения для замены переменных, мы находим, что преобразование Фурье k-ого потенциала на j-ой грани есть

$$\int\limits_0^\infty e^{-ix_j\zeta} u_k|_{y_j=0}(x_j) dx_j = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_0} J_k^j(\zeta, \xi) \widehat{\alpha}_k(\xi) d\xi, \tag{62}$$

где

$$J_k^j(\zeta, \xi) = \int\limits_0^\infty e^{-ix_j\zeta + i(a_k^j x_j + g_k^j)\xi + i|c_k^j x_j + h_k^j|\zeta_\varepsilon(\xi)} \operatorname{sign}(c_k^j x_j + h_k^j) dx_j. \tag{63}$$

Итак, ограничиваясь рассмотрением геометрии удовлетворяющей условию (52), мы видим, что $c_k^j x_j + h_k^j$ не меняет знак при $x_j \in [0, \infty)$, и, таким образом:

$$J_k^j = \frac{\sigma}{i(\zeta - (a_k^j \xi + |c_k^j| \zeta_\varepsilon(\xi)))} e^{ig_k^j \xi + i|h_k^j|\zeta_\varepsilon(\xi)}, \tag{64}$$

где $\sigma = \operatorname{sign}(c_k^j + h_k^j)$. Далее, мы выводим интегральную систему, которой должна удовлетворять спектральная функция:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\varphi_1} & \mathcal{K}_{12} \\ \mathcal{K}_{21} & \mathcal{L}_{\varphi_2} \end{pmatrix} \Sigma(\zeta) = W(\zeta), \tag{65}$$

здесь

$$\mathcal{L}_{\varphi_j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & TM_{\varphi_j} \\ TM_{\varphi_j} & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \tag{66}$$

где

$$TM_{\varphi_j} V(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{1}{\zeta - (\xi \cos \varphi_j - \zeta_0(\xi) \sin \varphi_j)} V(\xi) d\xi. \tag{67}$$

Операторы $\mathcal{K}_{12}$ и $\mathcal{K}_{21}$ имеют ядра вида (64), а правая часть $W^T = -(\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3, \widehat{f}_4)$.

Мы видим, что ядра операторов $\mathcal{K}_{12}$ и $\mathcal{K}_{21}$ также допускают оценку (58), что влечет, как и в случае задачи Неймана, применимость того же рассуждения о фредгольмовости. Таким образом, имеет место

Теорема 3.7. *Пусть* $W(\xi) \in \hat{\mathcal{A}}^2 \oplus \hat{\mathcal{A}}^2$ *аналитична в* $\mathbb{C}_-^\delta = \{z : \arg z \in (-\pi, \delta)$ *с некоторым* $\delta > 0$. *Пусть также при всех* $\varepsilon \in (0, \delta)$ *выполнено* $W^\varepsilon = W(e^{i\varepsilon}\cdot) \in H^+$, *тогда в классе* $\hat{\mathcal{A}}^2 \oplus \hat{\mathcal{A}}^2$ *существует решение системы* (65) *и, следовательно, существует уходящее решение*(59).

3.3. Рассеяние цилиндрической и плоской волны.

Для того, чтобы установить разрешимость задачи рассеяния цилиндрической волны, достаточно удостовериться в том,что след падающей волны удовлетворяет аналитическим предположениям, необходимым для применимости теорем 3.5 и 3.7. Эти вычисления, т.е. проверка регулярности соответствующих преобразований Фурье, проводятся в полной аналогии с [2, §3].

Существование решения задачи рассеяния плоской волны получается, используя подход [3], основанный на априорном учете отраженных плоских волн с их физическими областями существования.

Литература

1. J.-P. Croisille and G. Lebeau, *Diffraction by an immersed elastic wedge*, volume 1723 of Lecture notes in mathematics. Springer (1999).
2. V. Kamotski, G. Lebeau, *Diffraction by an elastic wedge with stress-free boundary: existence and uniqueness.* Препринт ПОМИ 08/2003, Проц. Р. Соц. Лонд. А (2005), то аппеар.
3. В. В. Камоцкий *О падении плоской волны на упругий клин под критическим углом.* — Алгебра и Анализ **15(3)** (2003), 145–169.

Kamotski V. V. Spectral function approach to the double wedges diffraction problem.

In this work the problem of diffraction by two wedges with ideal boundary conditions (Dirichlet or Neumann) is considered. Uniqueness is obtained in a general setting. Spectral functions approach turns out to be

applicable under certain "narrowness" geometrical assumptions and leads to the existence of a solution.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vladimir@pdmi.ras.ru

Поступило 10 мая 2005 г.