Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 324, 2005 г.

Н. В. Мокеева

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ В СЛУЧАЕ УГЛОВЫХ ОБЛАСТЕЙ

Введение

Задача о рассеянии и преломлении волн прозрачным клином давно находится в поле зрения физиков (собственно говоря с 17 века, со времён первых опытов о преломлении света прозрачной призмой), однако, вопрос о точной постановке и корректности подобных задач встал только в последние десятилетия. Начиная с 90-ых годов 20-го века возник интерес к математическому исследованию задачи о прозрачном клине. В работе [1] рассматривается приближённое решение (так называемое приближение физической оптики) для задачи о падении плоской волны на прозрачный клин. Новый подход к решению задач рассеяния в угловых областях – с помощью т.н. метода спектральной функции - разработали французские математики Лебо и Круазиль [2]. Замечательная особенность этого метода состоит в том, что сингулярности спектральной функции соответствуют тем или иным волновым коллизиям.В книге [2] рассмотрен случай упругого клина, погружённого в жидкость, и доказано существование решения задачи о падении плоской волны в виде потенциала простого слоя.

Вопросам корректности задачи о дифракции плоской волны на диэлектрическом клине посвящена работа [3], где методами отличными от методов, использованных в нашей работе, доказан ряд теорем существования и единственности. Авторы работы [3] накладывают на данные задачи ряд сильных ограничений.

В настоящей работе рассматривается скалярная задача о падении плоской волны на угловую область "клин". Скорости распространения волн внутри клина и вне его разные. Наша цель доказать корректность этой задачи с помощью метода спектральной функции. Ключевой момент этого метода состоит в представлении решения в виде падающей волны плюс "уходящей". Уходящая волна имеет вид потенциала простого слоя, плотности которого принадлежат специальному классу. Мы докажем теорему об изоморфизме – центральную теорему для этого метода.

Одна из возможных интерпретаций задачи о падении плоской волны на клин – "электромагнитная". Рассмотрим задачу дифракции плоской волны на диэлектрическом цилиндре [4]. В случае E-поляризации компонента E_z полного поля $E^{i,e}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Граничные условия, в скалярном случае имеют вид

$$\begin{cases} E_z^i(x,y)|_S = E_z^e(x,y)|_S \\ \frac{1}{\mu_i}\frac{\partial E_z^i(x,y)}{\partial n}|_S = \frac{1}{\mu_e}\frac{\partial E_z^e(x,y)}{\partial n}|_S \end{cases}$$

Таким образом, если магнитная проницаемость $\mu_i \approx \mu_e$, магнитная составляющая полного электромагнитного поля $E^{i,e}$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} (\Delta + k_{i,e}^2)E_z^{i,e} = 0 \\ E_z^i(x,y)|_S = E_z^e(x,y)|_S \\ \frac{\partial E_z^i(x,y)}{\partial n}|_S = \frac{\partial E_z^e(x,y)}{\partial n}|_S, \end{cases}$$

и задача нахождения E_z идентична скалярной задаче, рассматриваемой в настоящей работе. В общем случае для электрической и магнитной составляющих полного электромагнитного поля $E^{i,e}, H^{i,e}$ получаем условия

$$\begin{cases} (\Delta + k_{i,e}^2)E_z^{i,e} = 0 \\ E_z^i(x,y)|_S = E_z^e(x,y)|_S \\ \frac{1}{\mu_i}\frac{\partial E_z^i(x,y)}{\partial n}|_S = \frac{1}{\mu_e}\frac{\partial E_z^e(x,y)}{\partial n}|_S \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\Delta + k_{i,e}^2)H_z^{i,e} = 0 \\ H_z^i(x,y)|_S = H_z^e(x,y)|_S \\ \frac{1}{\varepsilon_i}\frac{\partial H_z^i(x,y)}{\partial n}|_S = \frac{1}{\varepsilon_e}\frac{\partial H_z^e(x,y)}{\partial n}|_S \end{cases}$$

Здесь $\mu_{i,e}$, $\varepsilon_{i,e}$ диэлектрическая и магнитная проницаемость.

2. Постановка задачи

Пусть прозрачный клин имеет угол раствора ϕ, где $\phi \in (0, 2\pi)$. Обозначим клин через $\Omega = \{(x,y) = (r\cos\Theta, r\sin\Theta), 0 < \Theta < \phi\}$.

Пусть Ω_{ext} – внешняя область по отношению к Ω. Введём декартовы системы координат (x, y) и (x', y'), связанные со сторонами угла (см. рис. 1). Стороны угла обозначим через Γ_1, Γ_2.

$$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$$

Падающая волна такая, что вектор её скорости, если его кончик совпадает с вершиной клина, находится целиком в Ω_{ext}. Будем считать, что волновое поле в Ω удовлетворяет уравнению Гельмгольца с волновым числом k_1:

$$(\Delta + k_1^2)u = 0$$

а в Ω_{ext} уравнению Гельмгольца с волновым числом k_2:

$$(\Delta + k_2^2)\widetilde{u} = 0\,.$$

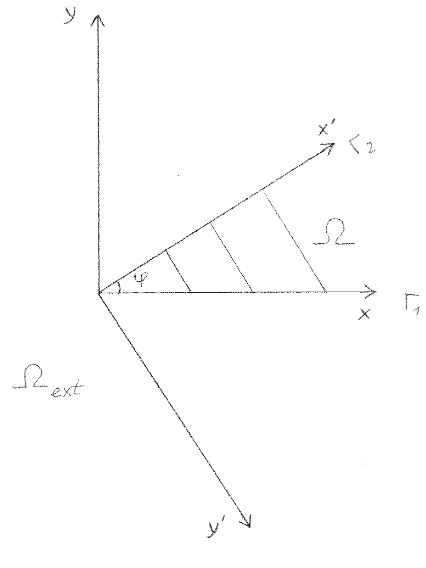

Рис. 1.

В качестве граничных условий рассмотрим условия сопряжения, т.е. условия отсутствия скачка решения и его нормальной производной на границе. Будем искать решение задачи, предполагая, что полное поле внутри клина есть сумма падающей плоской волны и рассеянного поля.

$$u = u_{\rm inc} + v\,, \widetilde{u} = h\,.$$

Падающая волна имеет вид

$$u_{\rm inc} = e^{i\nu_0(x\cos\Theta_{\rm in} + y\sin\Theta_{\rm in})}$$

Тогда (v, h) удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\begin{cases} (\Delta + k_1^2)v = 0 \text{ в } \Omega, \\ (\Delta + k_2^2)h = 0 \text{ в } \Omega_{ext}, \\ v - h = -u_{\rm inc} \text{ на } \Gamma_1, \\ v - h = -u_{\rm inc} \text{ на } \Gamma_2, \\ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} = -\frac{\partial u_{\rm inc}}{\partial n} \text{ на } \Gamma_1, \\ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} = -\frac{\partial u_{\rm inc}}{\partial n} \text{ на } \Gamma_2, \end{cases} \tag{1}$$

В окрестности вершины клина решение должно удовлетворять условию Мейкснера. Отметим, что наши рассуждения можно применить и к системе со следующими граничными условиями

$$\begin{cases} \alpha_1 v - \beta_1 h = -\alpha_1 u_{\rm inc} \text{ на } \Gamma, \\ \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial n} - \beta_2 \frac{\partial h}{\partial n} = -\alpha_2 \frac{\partial u_{\rm inc}}{\partial n} \text{ на } \Gamma \end{cases}$$

Таким образом, можно рассмотреть задачу о падении волны на диэлектрический клин (см. введение). Опишем волновую картину, возникающую при падении плоской волны: Пусть угол раствора клина больше π. Плоская волна падает на одну из граней.

После падения возникает отражённая волна, которая уходит на бесконечность, и преломлённая волна, которая отражается и преломляется на второй грани. Отражённая волна возвращается к первой грани и снова происходит процесс отражения и преломления. После конечного числа отражений эта волна тоже уходит на бесконечность. Кроме этого присутствуют т.н. головные волны и волны с круговым фронтом – результат рассеяния волнового поля вершиной клина. Можно показать, что число головных волн конечно. Таким образом число возникающих волн будет очень большим.

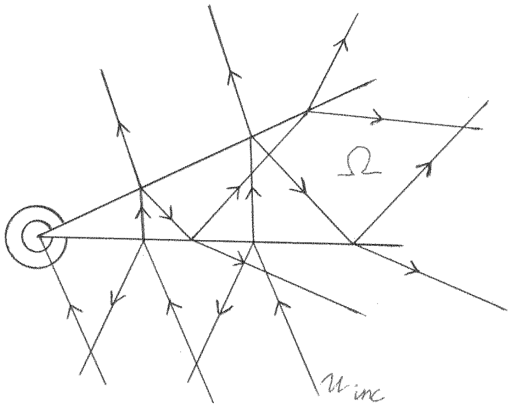

Рис. 2.

3. Уходящие решения. Интегральное представление

Следуя [1] будем искать решение (v, h) в виде суммы двух потенциалов "простого слоя"

$$\begin{cases} v = v_1 + v_2, \\ h = h_1 + h_2, \end{cases}$$

соответствующих сторонам угла. Искомые потенциалы должны удовлетворять следующей системе

$$\begin{cases} (\Delta + k_1^2)v_j = -\alpha_j \otimes \delta_j, \quad j = 1, 2 \\ (\Delta + k_2^2)h_j = -\beta_j \otimes \delta_j, \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

Здесь δ_j – мера на Γ_j, заданная на финитных бесконечно дифференцируемы функциях равенствами

$$< \delta_1, \phi >= \int_0^\infty \phi(x, 0)dx, < \delta_2, \phi >= \int_0^\infty \phi(x', 0)dx'. \tag{2}$$

Неизвестные плотности α_j, β_j принадлежат классу A.

Определение 1. *Распределение $g \in A$ если $g \in S'(\mathbf{R}), supp\ g \subset \mathbf{R}^+$ и преобразование Фурье $\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} g(x)dx$ удовлетворяет* *следующим требованиям*

$$\exists C_0 > 0 \quad \text{т.ч.} \quad \sup_{-\pi<\Theta<0} \int_{C_0}^{\infty} \left|\hat{g}(\rho e^{i\Theta})\right|^2 d\rho < \infty$$

$$\hat{g} \ \text{голоморфна в окрестности точек} \ \ \nu_1, \nu_2$$

Преобразование Фурье функций из A образует класс $\hat{A}$. Лемма 2.2 ([1]) позволяет дать корректное определение уходящего решения:

Определение 2. *Уходящим решением называется решение, допускающее представление в виде суммы потенциалов простого слоя:*

$$\begin{cases} v = v_1 + v_2, \\ h = h_1 + h_2, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} v_j = -\lim_{\varepsilon\to 0} v_j^{\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0}(\Delta + k_1^2 e^{-2i\varepsilon})^{-1}\alpha_j \otimes \delta_j, \quad j=1,2 \\ h_j = -\lim_{\varepsilon\to 0} h_j^{\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0}(\Delta + k_2^2 e^{-2i\varepsilon})^{-1}\beta_j \otimes \delta_j, \quad j=1,2 \end{cases} \tag{3}$$

Здесь сходимость понимается в смысле обобщённых функций. α_j, β_j *это плотности из класса* A, *сосредоточенные на сторонах клина* Γ_j.

Обозначим новое волновое число $\nu_1^2 \equiv k_1^2 e^{-2i\varepsilon}$. Напишем интегральное представление для v_1^{ε}. Применяя прямое преобразование Фурье по двум переменным к v_1^{ε} получим

$$\hat{v}_1^{\varepsilon} = \frac{\hat{\alpha}_1(\xi)}{\nu_1^2 - \xi^2 - \eta^2},$$

где функция $(\nu_1^2 - \xi^2 - \eta^2)^{-1}$ мероморфна по $\eta \in \mathbf{C}$ и имеет полюса $\pm\zeta^{\varepsilon,v}$, которые являются корнями уравнения $\xi^2 + \zeta^{\varepsilon,v}(\xi)^2 = {\nu_1}^2$. Теперь применим обратное преобразование Фурье

$$v_1^{\varepsilon} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{\hat{\alpha}_1 e^{ix\xi+iy\eta}}{\nu_1^2-\xi^2-\eta^2}d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\alpha}_1(\xi)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iy\eta}d\eta}{\nu_1^2-\xi^2-\eta^2}e^{ix\xi}d\xi.$$

и воспользуемся тем, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iy\eta}d\eta}{\nu_1^2\xi^2-\eta^2}$ вычисляется явно. Таким образом получим интегральное представление для потенциала v_1^ε

$$v_1^\varepsilon(x,y) = \frac{i}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_0} \hat{\alpha}_1(\xi)\frac{e^{ix\xi+i|y|\zeta^{\varepsilon,v}(\xi)}}{\zeta^{\varepsilon,v}(\xi)}d\xi. \tag{4}$$

Интеграл берется от $-\infty$ до ∞ с учётом обхода полюсов.

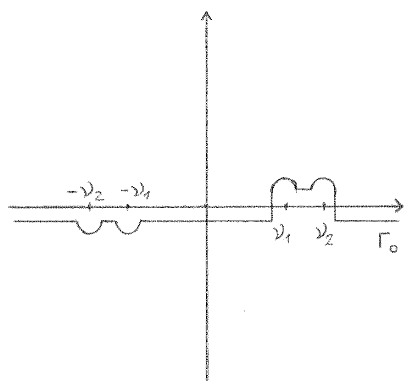

Рис. 3.

Интегральное представление для потенциала v_2^ε имеет вид

$$v_2^\varepsilon(x',y') = \frac{i}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_0} \hat{\alpha}_2(\xi)\frac{e^{ix'\xi+i|y'|\zeta^{\varepsilon,v}(\xi)}}{\zeta^{\varepsilon,v}(\xi)}d\xi. \tag{5}$$

Аналогично можно получить интегральное представление для $h_1^\varepsilon, h_2^\varepsilon$. Обозначим волновое число $\nu_2^2 \equiv k_2^2 e^{-2i\varepsilon}$ и применим к h_1^ε и h_2^ε прямое и обратное преобразование Фурье. Тогда

$$\begin{cases} h_1^\varepsilon(x,y) = \frac{i}{4\pi}\int_{\Gamma_0} \hat{\beta}_1(\xi)\frac{e^{ix\xi+i|y|\zeta^{\varepsilon,h}(\xi)}}{\zeta^{\varepsilon,h}(\xi)}d\xi, \\ h_2^\varepsilon(x',y') = \frac{i}{4\pi}\int_{\Gamma_0} \hat{\beta}_2(\xi)\frac{e^{ix'\xi+i|y'|\zeta^{\varepsilon,h}(\xi)}}{\zeta^{\varepsilon,h}(\xi)}d\xi, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\zeta^{\varepsilon,h} = \begin{cases} -\sqrt{\nu_2^2-\xi^2}, \text{ при } |\xi| < \nu, \\ i\sqrt{-\nu_2^2+\xi^2}, \text{ при } |\xi| > \nu, \end{cases}$$

4. Спектральная функция. Система интегральных уравнений

В предыдущем параграфе мы описали класс уходящих решений. Для распределений $v_j^\varepsilon, h_j^\varepsilon$ были получены интегральные представления (4)–(6). Обозначим $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$, где$\Sigma_j \equiv (\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j)^T, j = 1, 2$ неизвестные спектральные функции.

Определим граничный оператор $A^\varepsilon, \varepsilon \in [0, \pi)$

$$A^\varepsilon(\Sigma_1, \Sigma_2) = \begin{cases} v - h \text{ на } \Gamma_1, \\ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} \text{ на } \Gamma_1, \\ v - h \text{ на } \Gamma_2, \\ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} \text{ на } \Gamma_2, \end{cases} \tag{7}$$

Лемма 1. *Пусть $\xi \in \mathbf{C}, \mathrm{Im}\xi < 0$. Тогда преобразование Фурье граничного оператора $A^\varepsilon(\Sigma_1, \Sigma_2)$ даётся следующей формулой*

$$F\Big[A^\varepsilon(\Sigma_1, \Sigma_2)\Big] = \int_0^\infty e^{-ix\xi} A^\varepsilon(\Sigma_1, \Sigma_2) dx = \frac{1}{2}\Big[DM^\varepsilon(\Sigma_1) + TM^\varepsilon(\Sigma_2)\Big](\xi),$$

где интегральные операторы

$$DM^\varepsilon(g)(\xi) = \int_{\Gamma_0} DM^\varepsilon(\xi, \zeta) g(\zeta) d\zeta, \quad TM^\varepsilon(g)(\xi) = \int_{\Gamma_0} TM^\varepsilon(\xi, \zeta) g(\zeta) d\zeta,$$

определённые на функциях из $\hat{A}$, имеют ядра вида

$$DM^\varepsilon(\xi, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\xi - \zeta} dm(\zeta e^{i\varepsilon}),$$

где матрица

$$dm(\zeta e^{i\varepsilon}) = \begin{pmatrix} \frac{i}{\zeta^{\varepsilon, v}(\zeta)} & -\frac{i}{\zeta^{\varepsilon, h}(\zeta)} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и

$$TM^\varepsilon(\xi, \zeta) = \frac{1}{2\pi i}\Big[D^v(\xi, \zeta) \cdot tm_v + D^h(\xi, \zeta) \cdot tm_h\Big],$$

где матрицы

$$tm_v(\zeta e^{i\varepsilon}) = \begin{pmatrix} \frac{i}{\zeta^{\varepsilon, v}(\zeta)} & 0 \\ \cos(\phi) - \sin(\phi)\frac{\zeta}{\zeta^{\varepsilon, v}(\zeta)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$tm_h(\zeta e^{i\varepsilon}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\zeta^{\varepsilon,h}(\zeta)} \\ 0 & \cos(\phi) - \sin(\phi)\frac{\zeta}{\zeta^{\varepsilon,h}(\zeta)} \end{pmatrix}$$

Здесь

$$D_v = \frac{1}{(\xi - (\zeta\cos(\phi) + \zeta^{\varepsilon,v}(\zeta)|\sin(\phi)|))}d\zeta,$$
$$D_h = \frac{1}{(\xi - (\zeta\cos(\phi) + \zeta^{\varepsilon,h}(\zeta)|\sin(\phi)|))}d\zeta$$

Доказательство 1. Напишем систему интегральных уравнений для спектральной функции. Для этого подставим интегральные представления уходящих решений в граничные условия.

$$(v_1+v_2)(x,0^+) - (h_1+h_2)(x,0^-) = \frac{i}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\hat{\alpha}_1(\xi)\frac{e^{ix\xi}}{\zeta^{\varepsilon,v}(\xi)}d\xi +$$
$$\frac{i}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\hat{\alpha}_2(\xi)\frac{e^{ix\xi\cos(\phi)+ix\zeta^{\varepsilon,v}(\xi)|\sin(\phi)|}}{\zeta^{\varepsilon,v}(\xi)}d\xi - \frac{i}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\hat{\beta}_1(\xi)\frac{e^{ix\xi}}{\zeta^{\varepsilon,h}(\xi)}d\xi -$$
$$\frac{i}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\hat{\beta}_2(\xi)\frac{e^{ix\xi\cos(\phi)+ix\zeta^{\varepsilon,h}(\xi)|\sin(\phi)|}}{\zeta^{\varepsilon,h}(\xi)}d\xi$$

Сделаем преобразование Фурье по двум переменным. Тогда

$$F[(v_1+v_2)(x,0^+) - (h_1+h_2)(x,0^-)] =$$
$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_0}\hat{\alpha}_1(\zeta)\frac{1}{\zeta^{\varepsilon,v}(\zeta)(\xi-\zeta)}d\zeta +$$
$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_0}\hat{\alpha}_2(\zeta)\frac{1}{\zeta^{\varepsilon,v}(\zeta)(\xi - (\zeta\cos(\phi) + \zeta^{\varepsilon,v}(\zeta)|\sin(\phi)|))}d\zeta -$$
$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_0}\hat{\beta}_1(\zeta)\frac{1}{\zeta^{\varepsilon,h}(\zeta)(\xi-\zeta)}d\zeta -$$
$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma_0}\hat{\beta}_2(\zeta)\frac{1}{\zeta^{\varepsilon,h}(\zeta)(\xi - (\zeta\cos(\phi) + \zeta^{\varepsilon,h}(\zeta)|\sin(\phi)|))}d\zeta$$

Сделаем преобразование Фурье второго граничного условия

$$
\begin{aligned}
&F\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial n}+\frac{\partial v_2}{\partial n}\right)(x,0^+)-\left(\frac{\partial h_1}{\partial n}+\frac{\partial h_2}{\partial n}\right)(x,0^-)\right]=\\
&\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\hat\alpha_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\xi-\zeta}-\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\hat\beta_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\xi-\zeta}-\\
&\frac{\sin(\phi)}{4\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\hat\alpha_2(\zeta)\frac{\zeta}{\zeta^{\varepsilon,v}(\zeta)}\frac{d\zeta}{(\xi-(\zeta\cos(\phi)+\zeta^{\varepsilon,v}(\zeta)|\sin(\phi)|))}+\\
&\frac{\cos(\phi)}{4\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\hat\alpha_2(\zeta)\frac{d\zeta}{(\xi-(\zeta\cos(\phi)+\zeta^{\varepsilon,v}(\zeta)|\sin(\phi)|))}+\\
&\frac{\sin(\phi)}{4\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\hat\beta_2(\zeta)\frac{\zeta}{\zeta^{\varepsilon,h}(\zeta)}\frac{d\zeta}{(\xi-(\zeta\cos(\phi)+\zeta^{\varepsilon,h}(\zeta)|\sin(\phi)|))}-\\
&\frac{\cos(\phi)}{4\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\hat\beta_2(\zeta)\frac{d\zeta}{(\xi-(\zeta\cos(\phi)+\zeta^{\varepsilon,h}(\zeta)|\sin(\phi)|))}
\end{aligned}
$$

При вычислении интегралов мы использовали равенства

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty e^{-ix(\xi-\zeta)}dx=\frac{1}{i(\xi-\zeta)},\\
&\int\limits_0^\infty e^{-ix(\xi-(\zeta\cos(\phi)+\zeta^{\varepsilon,j}(\zeta)|\sin(\phi)|))}dx\\
&=\frac{1}{i(\xi-(\zeta\cos(\phi)+\zeta^{\varepsilon,j}(\zeta)|\sin(\phi)|))},\quad j=v,h
\end{aligned}
$$

Сделав замену переменных

$$
\begin{cases}
x=x'\cos\phi+y'\sin\phi,\\
y=x'\sin\phi-y'\cos\phi,
\end{cases}
$$

можно получить преобразование Фурье от граничных условий на второй грани. Переход ко второй грани осуществляется при помощи замены $\hat\alpha_1(\hat\beta_1)$ на $\hat\alpha_2(\hat\beta_2)$. Зададим следующие матрицы:

$$
DM^\varepsilon(\xi,\zeta)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\zeta^{\varepsilon,v}(\zeta)(\xi-\zeta)} & -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\zeta^{\varepsilon,h}(\zeta)(\xi-\zeta)}\\ \frac{1}{4\pi i}\frac{1}{(\xi-\zeta)} & -\frac{1}{4\pi i}\frac{1}{(\xi-\zeta)}\end{pmatrix}
$$

$TM^{\varepsilon}(\xi,\zeta) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\zeta^{\varepsilon,v}(\zeta)}D^v & -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\zeta^{\varepsilon,h}(\zeta)}D^h \\ -\frac{1}{4\pi i}\sin\phi\frac{\zeta}{\zeta^{\varepsilon,v}(\zeta)}D^v + \frac{1}{4\pi i}\cos\phi D^v & \frac{1}{4\pi i}\sin\phi\frac{\zeta}{\zeta^{\varepsilon,h}(\zeta)}D^h - \frac{1}{4\pi i}\cos\phi D^h \end{pmatrix}$$

Тогда операторы граничных условий можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} DM^{\varepsilon}\Sigma_1 + TM^{\varepsilon}\Sigma_2, \\ TM^{\varepsilon}\Sigma_1 + DM^{\varepsilon}\Sigma_2, \end{cases}$$

где $\Sigma_1 = (\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1)^T, \Sigma_2 = (\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2)^T$. Здесь D_v, D_h

$$D_v = \frac{1}{(\xi - (\zeta\cos(\phi) + \zeta^{\varepsilon,v}(\zeta)|\sin(\phi)|))}d\zeta,$$

$$D_h = \frac{1}{(\xi - (\zeta\cos(\phi) + \zeta^{\varepsilon,h}(\zeta)|\sin(\phi)|))}d\zeta.$$

Напишем правую часть граничных условий.

$$\begin{cases} -u_{\text{inc}}|_{\Gamma_1}, \\ -\frac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial n}{}_{\Gamma_1}, \\ -u_{\text{inc}}|_{\Gamma_2}, \\ -\frac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial n}|_{\Gamma_2}, \end{cases}$$

Падающая волна u_{inc} задаётся формулой

$$u_{\text{inc}} = \frac{1}{2}e^{i\nu_0(x\cos\Theta_{\text{in}} + y\sin\Theta_{\text{in}})},$$

где $0 < \Theta_{\text{in}} < \phi$. После преобразования Фурье получим следующую систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{2(\xi - \nu_0\cos\Theta_{\text{in}})}, \\ -\frac{i}{2}\nu_0\sin\Theta_{\text{in}}\frac{1}{(\xi - \nu_0\cos\Theta_{\text{in}})}, \\ -\frac{1}{2(\xi - \nu_0\cos(\phi + \Theta_{\text{in}}))}, \\ -\frac{i}{2}\nu_0\sin(\phi + \Theta_{\text{in}})\frac{1}{(\xi - \nu_0\cos(\phi + \Theta_{\text{in}}))}, \end{cases}$$

Далее будем использовать обозначения

$$W_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2}\nu_0\sin\Theta_{\text{in}} \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2}\nu_0\sin(\phi + \Theta_{\text{in}}) \end{pmatrix}$$

Можно показать, что исходная система

$$\begin{cases} v - h = -u_{\mathrm{inc}} \text{ на } \Gamma_1, \\ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} = -\frac{\partial u_{\mathrm{inc}}}{\partial n} \text{ на } \Gamma_1, \\ v - h = -u_{\mathrm{inc}} \text{ на } \Gamma_2, \\ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} = -\frac{\partial u_{\mathrm{inc}}}{\partial n} \text{ на } \Gamma_2, \end{cases}$$

эквивалентна следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{cases} DM^0\Sigma_1 + TM^0\Sigma_2 = \frac{W_1}{\xi - \nu_0 \sin\Theta_{\mathrm{in}}}, \\ TM^0\Sigma_1 + DM^0\Sigma_2 = \frac{W_2}{\xi - \nu_0 \sin(\phi + \Theta_{\mathrm{in}})} \end{cases}$$

Таким образом мы можем сформулировать Лемму 2.

Лемма 2. *Пусть $\varepsilon \in (0, \pi)$. Функция (v, h) есть уходящее решение системы*

$$\begin{cases} (\Delta + k_1^2 e^{-2i\varepsilon})v = 0 \text{ в } \Omega, \\ (\Delta + k_2^2 e^{-2i\varepsilon})h = 0 \text{ в } \Omega_{\mathrm{ext}}, \\ v - h = -u_{\mathrm{inc}} \text{ на } \Gamma_1, \\ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} = -\frac{\partial u_{\mathrm{inc}}}{\partial n} \text{ на } \Gamma_1, \\ v - h = -u_{\mathrm{inc}} \text{ на } \Gamma_2, \\ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} = -\frac{\partial u_{\mathrm{inc}}}{\partial n} \text{ на } \Gamma_2, \end{cases}$$

тогда и только тогда когда спектральная функция $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$ для всех ξ, таких что $\operatorname{Im}\xi < 0$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} DM^0\Sigma_1 + TM^0\Sigma_2 = \widetilde{W_1}, \\ TM^0\Sigma_1 + DM^0\Sigma_2 = \widetilde{W_2}, \end{cases}$$

где $\widetilde{W_1} = \frac{W_1}{\xi - \nu_0 \sin\Theta_{\mathrm{in}}}$, $\widetilde{W_2} = \frac{W_2}{\xi - \nu_0 \sin(\phi + \Theta_{\mathrm{in}})}$

5. Теорема об изоморфизме. Аналитическое продолжение спектральной функции

В этом параграфе будет сформулирована Теорема об изоморфизме – одна из центральных теорем для метода, разработанного Лебо и Круазилем. В том варианте теоремы об изоморфизме, который требуется в наших рассмотрениях, основные рассуждения во многом аналогичны рассуждениям в [2], [6] (хотя и не во всём: например, нам приходится вводить пространство H^{++}, отсутствующее в указанных работах). Определим следующий класс функций

Определение 3. *H^+ – пространство голоморфных в $\mathbf{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ функций h, т.ч.*

$$\sup_{c>0} \int_{\mathbf{R}} |h(x - ic)|^2 dx < \infty$$

Пространство H^+ это классический класс Харди.

Определение 4. *H^{++} – пространство голоморфных в $\mathbf{C}_- = \{z : Imz < 0\}$ функций f, представимых в следующем виде*

$$f = g + \frac{\text{const}}{i\zeta - \alpha}, \text{ где } \operatorname{Re} \alpha > 0$$

и выполняется оценка

$$\int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi|^2)|g|^2 d\xi < \infty$$

Функции $f \in H^{++}$ - это образы по Фурье функций из $H^1(\mathbf{R}^+)$, продолженных нулём на отрицательную часть оси х-ов.

Определение 5. *Определим $(H^{++})^2$, как два экземпляра H^{++} с одинаковыми α, входящими в определение H^{++} (функции $g(z)$ могут как совпадать, так и отличаться).*

Определим оператор

$$L^\varepsilon = \begin{pmatrix} DM^\varepsilon & TM^\varepsilon \\ TM^\varepsilon & DM^\varepsilon \end{pmatrix} \tag{8}$$

Теорема 1 (Об изоморфизме). *Для любого $\varepsilon \in (0, \pi)$ оператор L^ε есть изоморфизм пространства $(H^+)^2 \bigoplus (H^{++})^2$ на себя.*

Для её доказательства потребуется Лемма 3, доказанная в работе [7], и Лемма 4.

Лемма 3. *Задача Неймана*

$$\begin{cases} (\Delta + k_j^2 e^{-2i\varepsilon})v = w \text{ в } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = l \text{ на } \Gamma \end{cases}$$

при $w \in L^2, l \in L^2$ и задача Дирихле

$$\begin{cases} (\Delta + k_j^2 e^{-2i\varepsilon})\widetilde{v} = g \text{ в } \Omega, \\ \widetilde{v} = m \text{ на } \Gamma \end{cases}$$

при $g \in L^2, m \in H^1$ *и* $j = 1,2$ *имеют единственные решения* $v, \widetilde{v} \in H^1(\Omega) \cap E$, *где* E – *класс распределений* f, *заданных в* Ω *и удовлетворяющих в полярных координатах условиям*

$$f \in C([0,\varphi], H^1(\mathbf{R}^+)),$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi} \in C([0,\phi], L^2(\mathbf{R}^+)).$$

Лемма 4. *Пусть* $w \in L^2$, $g \in L^2$, $l \in L^2$, $m \in H^1$. *Тогда система*

$$\begin{cases} (\Delta + k_1^2 e^{-2i\varepsilon})v = w \text{ в } \Omega, \\ (\Delta + k_2^2 e^{-2i\varepsilon})h = g \text{ в } \Omega_{\text{ext}}, \\ v - h = m \text{ на } \Gamma, \\ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} = l \text{ на } \Gamma, \end{cases}$$

имеет единственное решение (v, h) *в пространстве* $v \in (H^1(\Omega) \cap E), h \in (H^1(\Omega_{\text{ext}}) \cap E)$.

Лемма 4 вполне аналогична Лемме 4.3 (см. [2]) и доказывается с помощью теоремы Лакса–Мильграма.

Доказательство 1 (Теоремы об изоморфизме). Проверим инъективность оператора L^ε. Пусть $X_1(\xi) = (\hat{\alpha}_1(\xi), \hat{\beta}_1(\xi))^t, X_2(\xi) = (\hat{\alpha}_2(\xi), \hat{\beta}_2(\xi))^t$ есть решение системы

$$L^\varepsilon \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{9}$$

Определим

$$\alpha = \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2$$
$$\beta = \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2,$$

где α_j, β_j – обратные преобразования Фурье от $\hat{\alpha}_j$, $\hat{\beta}_j$, а δ_j – распределения, заданные формулой (2). Рассмотрим распределения $\widetilde{v} \in S'(\mathbf{R}^2)$, $\widetilde{h} \in S'(\mathbf{R}^2)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} (\Delta + k_j^2 e^{-2i\varepsilon})\widetilde{v} = \alpha \text{ в } \mathbf{R}^2, \\ (\Delta + k_j^2 e^{-2i\varepsilon})\widetilde{h} = \beta \text{ в } \mathbf{R}^2. \end{cases} \tag{10}$$

Согласно Лемме 2 из равенства (9) следует, что $v = \widetilde{v}|_\Omega$, $h = \widetilde{h}|_{\Omega_{\text{ext}}}$ – есть решение однородной задачи(т.е. $w = 0, g = 0$).

$$\begin{cases} (\Delta + k_1^2 e^{-2i\varepsilon})v = 0 \text{ в } \Omega, \\ (\Delta + k_2^2 e^{-2i\varepsilon})h = 0 \text{ в } \Omega_{\text{ext}}, \\ v - h = 0 \text{ на } \Gamma_1, \\ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_1, \\ v - h = 0 \text{ на } \Gamma_2, \\ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_2, \end{cases}$$

Плотности $\alpha_j, \beta_j \in L^2(\mathbf{R}^1)$. Выразим образы по Фурье от $\widetilde{v}, \widetilde{h}$ через образы по Фурье α, β, пользуясь равенством (10). Простые оценки этих выражений дадут оценку норм v, h. Эти оценки показывают, что $v, h \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\mathbf{R}^2)$. Поскольку результаты о регулярности, полученные Лебо ([7], Sec. 2.3, Prop. 3) переносятся на случай прозрачного клина, то выполняется следующее: $\widetilde{v}|_\Omega, \widetilde{h}|_{\Omega_{\text{ext}}} \in E$. Таким образом, применение Леммы 2 оправдано. Следовательно, $\widetilde{v}|_\Omega = 0, \widetilde{h}|_{\Omega_{\text{ext}}} = 0$. В силу непрерывности $\widetilde{v}, \widetilde{h}$ и единственности задачи Дирихле находим, что $\widetilde{v}|_{\Omega_{\text{ext}}} = 0, \widetilde{h}|_\Omega = 0$. Значит $X_1 = X_2 = 0$.

Проверим сюръективность оператора L^ε. Пусть $Y = (Y_1, Y_2) \in (H^+)^2 \bigoplus (H^{++})^2$. Положим

$$Y_j = \begin{pmatrix} \hat{a_j}(\xi) \\ \hat{b_j}(\xi) \end{pmatrix}$$

где $a_j \in H^1, b_j \in L^2, j = 1, 2$. Построим потенциал простого слоя, удовлетворяющий однородной системе из Леммы 4. Рассмотрим задачу о сопряжении

$$\begin{cases} (\Delta + k_1^2 e^{-2i\varepsilon})v = w \text{ в } \Omega, \\ (\Delta + k_2^2 e^{-2i\varepsilon})h = g \text{ в } \Omega_{\text{ext}}, \\ v - h = k \text{ на } \Gamma, \\ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} = l \text{ на } \Gamma, \end{cases} \tag{11}$$

Задача (11) имеет единственное решение (v, h) в пространстве $v \in (H^1(\Omega) \cap E), h \in (H^1(\Omega_{\text{ext}}) \cap E)$ по Лемме 4. Определим $k|_{\Gamma_j} = a_j, l|_{\Gamma_j} = b_j$. Покажем, что функция h представима в виде потенциала простого слоя. Для функции v построения будут аналогичными. Продолжим h “внутрь” клина (т.е. в Ω) так, чтобы на границе была непрерывность и решим задачу Дирихле для $\widetilde{h}$

$$\begin{cases} (\Delta + k_2^2 e^{-2i\varepsilon})\widetilde{h} = 0 \text{ в } \Omega \\ \widetilde{h} = h \text{ на } \Gamma, \end{cases}$$

Пусть скачок нормальных производных равен

$$\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} = \Phi \text{ на } \Gamma. \tag{12}$$

В качестве плотности потенциала простого слоя возьмем скачок нормальных производных (формула (12)). Поскольку h решает ту же задачу о сопряжении, что $\widetilde{h}$, значит они равны. Таким образом, функция h представима в виде потенциала простого слоя:

$$(\Delta + k_2^2 e^{-2i\varepsilon})^{-1}(\Phi\delta_\Gamma) = h.$$

Здесь δ_Γ – мера на Γ, заданная равенствами из формулы (2).

Теорема 2 (Об аналитическом продолжении). *Пусть правая часть уравнения $L^0 X = W, W \in \hat{A}^4$ обладает аналитическим продолжением в область $\mathbf{C}^\delta_- = \{z : \arg(z) \in (-\pi, \delta)\}$ для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ и для любого $\varepsilon \in (0, \delta)$ $W^\varepsilon \in (H^+)^2 \bigoplus (H^{++})^2$, где $W^\varepsilon(z) = W(e^{i\varepsilon} z)$. Тогда существует $X \in \hat{A}^4$.*

Доказательство 2. Для доказательства используем рассуждения, приведённые в [6]. Определим X^ε как решение уравнения $L^\varepsilon X^\varepsilon = W^\varepsilon$. По теореме об изоморфизме решение существует и $X^\varepsilon \in (H^+)^2 \bigoplus (H^{++})^2$. Сделаем замену переменных $z = e^{i\varepsilon} z$ в интегральных операторах

$$DM^\varepsilon(g)(z) = \int\limits_{\Gamma_0} DM^\varepsilon(z,\zeta) g(\zeta) d\zeta, \quad TM^\varepsilon(g)(z) = \int\limits_{\Gamma_0} TM^\varepsilon(z,\zeta) g(\zeta) d\zeta,$$

Решение $X(z)$ существует и $X \in \hat{A}^4$ по теореме об изоморфизме.

Рассмотрим уравнение $L^\varepsilon \Sigma = W^\varepsilon$. Следующий шаг заключается в выделении из спектральной функции сингулярной части, которая соответствует отраженным плоским волнам. Остаток будет удовлетворять уравнению к которому можно будет применять теорему об изоморфизме.

Литература

1. Se-Yun Kim, Jung-Woong Ra, and Sang-Yung Shin, *Diffraction by an Arbitrary-Angled Dielectric Wedge: Part I - Physical Optics Approximation.* IEEE Transactions on Antennas and Propagation **39**, No. 9 (1999), 1272–1292.
2. J.-P. Croisille and G.Lebeau, *Diffraction by an immersed elastic wedge, volume 1723 of Lecture notes in mathematics.* Springer (1999).
3. Ch. Bergljung, S. Berntsen, *Diffraction by a dielectric wedge at skew incidence.* — Q. J. Mech. Appl. Math. **54**, No. 4 (2001), 549–583.
4. Т. Н. Галишникова, А. С. Ильинский, *Численные методы в задачах дифракции.* Изд-во Московск. ун.-та (1987).
5. В. М. Бабич, М. А. Лялинов, В. Э. Грикуров, *Метод Зоммерфельда-Малюжинца в теории дифракции.* С.-Петербург (2003).
6. V. Kamotski and G. Lebeau, *Diffraction by an elastic wedge with stress-free boundary: existence and uniqueness.* Proc. R. Soc. Lond. A (2005), (to appear).
7. Gilles Lebeau, *Propogation des ondes dans les diedres.* Memoires Soc. Math. Fr. Nouv. Ser., 60 (1995).

Mokeeva N. V. About correctnes of the diffraction problems in case of angle domains.

The subject of the paper is the proof of correctnes of the problem of diffraction a plane wave by a wedge.(The problem is scalar, the wave numbers inside the wedge and outside it are different). The method of the proof is analogous of one in the book [2]. The most essential difference in the consideration of this paper and the book [2] connected with the "isomorfism theorem".

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: p_tasha@mail.ru

Поступило 20 мая 2005 г.