Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 324, 2005 г.

К. Д. Чередниченко

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ШОЛЬТЕ—ГОГОЛАДЗЕ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ МЕЖДУ УПРУГИМ ТЕЛОМ И ЖИДКОСТЬЮ

1. Введение

Со времени опубликования основополагающей работы Рэлея (Rayleigh) [18], в которой он теоретически предсказал существование волновых мод, сосредоточенных в окрестности свободной границы однородного упругого полупространства, в вопросе о распространении поверхностных волн различной природы накоплено большое количество теоретического и экспериментального материала. Необходимость проникнуть в суть волновых явлений такого рода была продиктована их важностью как при описании естественных явлений (например, при землетрясениях), так и в практических приложениях (к примеру, при зондировании земной коры с целью последующей добычи полезных ископаемых, или при ультразвуковом тестировании промышленных материалов). Открытие Рэлея вдохновило на поиск аналогичных явлений в других механических системах. Важным наблюдением Стоунли (Stoneley) [20], а также Купрадзе и Соболева [14], было то, что похожие поверхностные волновые колебания могут иметь место и вдоль контакта между двумя упругими полупространствами. Последовавшие работы Гоголадзе [8] и Шольте [19] развили теорию поверхностных волн малой амплитуды в случае контакта между упругим и жидким полупространствами. В этой новой ситуации они показали существование аналогичных мод типа пограничного слоя, распространяющихся вдоль границы без затухания. В отечественной литературе эти моды традиционно называются волнами Стоунли, тогда как за рубежом они также зачастую ассоциируются с именем Шольте. Автор этой статьи склоняется к термину "волны Шольте–Гоголадзе", который, по его мнению, более точен.

Одновременно с накоплением экспериментальных данных и развитием приложений, вопрос о распространении поверхностных волн продолжал вызывать интерес в математической среде. В частности, развитие методов коротковолновой дифракции позволило подойти к таким задачам на новом техническом уровне. Бабич [1] (а затем Бабич и Русакова (Кирпичникова) [5]) предложил воспользоваться лучевым методом (см., например, [3]) для нахождения рэлеевского волнового поля вдоль поверхности однородного (соответственно, неднородного) упругого тела произвольной формы. Авторы этих работ предъявили метод для построения асимптотики "по гладкости" в случае разрыва, перемещающегося вдоль свободной поверхности. Важно отметить, что они продемонстрировали дисперсионный характер подобных волн (в отличие от случая плоской границы), получив явное выражение для так называемой фазы Берри. [Сам термин "фаза Берри" был введён позднее, в связи с публикацией [7].]

Приблизительно в это же время вышли статьи Келлера (Keller) и Карала (Karal) [11, 12], в которых они вводят метод комплексных лучей в применении к рассматриваемой задаче, в контексте коротких волн. Следует отметить, однако, что качество этих работ оставило желать лучшего: например, авторы упускают из рассмотрения граничные условия. В результате, формулы для фазы Берри, подобные полученным Бабичем и Русаковой, отсутствуют в окончательных результатах рассмотрений Келлера и Карала.

Более поздние работы Гримшоу (Grimshaw) [10] и Грегори (Gregory) [9] в известной степени корректируют упущения Келлера и Карала, посредством асимптотической процедуры, являющейся, фактически, частным случаем более общего подхода статьи Бабича и Русаковой [5]. Первая из упомянутых двух работ рассматривает скалярную задачу, тогда как вторая посвящена векторному случаю. Именно, Гримшоу [10], используя комплексный вариант ВКБ-разложения (см. например [2]), получил верные выражения для амплитуды и фазы поверхностной волны. Работая в криволинейных координатах на поверхности произвольной формы, он вывел соответствующее уравнение эйконала и показал, что волновая энергия распространяется вдоль геодезических. Грегори [9] применил аналогичный подход в векторном случае, получив формулы для асимптотик скалярного и векторного потенциалов. Важно отметить, что выражения для фазы в этих работах комплеснозначны, ввиду экспоненциального затухания волнового поля вдали от поверхности.

Дальнейшее развитие математических методов для описания волн Рэлея–Стоунли связано с работой Крауклиса [13], в которой автор, посредством лучевого метода, получил формулы для интенсивности поверхностных волн в случае неоднородной среды, а также статьями Номофилова [15, 16], где в предположении анизотропной линейной упругости волна представлена в виде суперпозиции трёх волн с комплексными фазами, и работой Бабича и Кирпичниковой [6], в которой авторы используют метод погранслойного разложения (см. [4]) для изучения аналогичной задачи.

Настоящая работа посвящена развитию геометро-оптического формализма в случае распространения поверхностных волн вдоль границы раздела произвольной формы между упругой и жидкой средами. Поверхность раздела предполагается гладкой, причем считается, что радиусы кривизн много больше длины возбуждённой волны. Используемая техника основана на погранслойном варианте классического ВКБ-разложения (см. [4]).

2. Постановка задачи

Рассмотрим общий случай неоднородной сжимаемой идеальной жидкости, пренебрегая, в частности, тепловым обменом между её различными частями. Уравнение движения, в случае малых колебаний точек жидкости, в первом приближении имеет вид:

$$\rho_f(\mathbf{q})\frac{\partial^2\mathbf{u}_f(\mathbf{q},t)}{\partial t^2}-\nabla_q\big(c_f^2(\mathbf{q})\rho_f(\mathbf{q})\mathrm{div}_q\mathbf{u}_f(\mathbf{q},t)\big)=0, \tag{1}$$

где $\rho_f(\mathbf{q})$ – плотность жидкости, $c_f(\mathbf{q})$ – скорость звука, $\mathbf{u}_f(\mathbf{q},t)$ – вектор смещения в жидкости.

Запишем также уравнение равновесия для части пространства, заполненной упругой средой:

$$\rho_s(\mathbf{q})\frac{\partial^2 u_s^i(\mathbf{q},t)}{\partial t^2}-\frac{\partial\sigma^{ij}(\mathbf{q},t)}{\partial q^j}=0, \tag{2}$$

где $\rho_s(\mathbf{q})$ – плотность упругой среды, а $\mathbf{u}_s(\mathbf{q},t)$ – вектор смещения, вместе с линеаризованным законом зависимости тензора напряжений от тензора деформаций

$$\sigma^{ij}(\mathbf{q},t)=C^{ijkl}(\mathbf{q})\varepsilon_{kl}\big(\mathbf{u}(\mathbf{q},t)\big).$$

В последнем равенстве

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^k}{\partial q^l} + \frac{\partial u^l}{\partial q^k}\right),$$

это линеаризованный тензор деформаций, а $C^{ijkl}(\mathbf{q})$ обозначает обычный тензор модулей упругости.

Мы накладываем стандартные условия на границе раздела Σ (сее [17]), именно, условие непрерывности нормальной комоненты смещения:

$$u_s^3(\mathbf{q},t)\big|_\Sigma = u_f^3(\mathbf{q},t)\big|_\Sigma \tag{3}$$

и условия непрерывности напряжений на площадку, касательную к поверхности:

$$\sigma^{13}(\mathbf{q},t)\big|_\Sigma = 0, \tag{4}$$

$$\sigma^{23}(\mathbf{q},t)\big|_\Sigma = 0, \tag{5}$$

$$\sigma^{33}(\mathbf{q},t)\big|_\Sigma = c_f^2(\mathbf{q})\rho_f^0(\mathbf{q})\mathrm{div}_q\mathbf{u}_f(\mathbf{q},t)\big|_\Sigma. \tag{6}$$

Важно отметить, что выписанные уравнения движения и условия на границе раздела могут рассматриваться как следствия классического принципа Гамильтона. Действительно, уравнения (1), (2), вместе с условиями (3)–(5), на границе раздела, могут быть получены из требования, чтобы вектор $\mathbf{u}(\mathbf{q},t)$ являлся стационарной точкой функционала

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} L\big(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{,t}(\mathbf{q},t), \nabla_q \mathbf{u}(\mathbf{q},\mathbf{t})\big)\,\mathrm{d}\,\mathbf{q}dt,$$

[Здесь и впредь мы используем обозначение $\mathbf{u}(\mathbf{q},t)$, имея ввиду $u_s(\mathbf{q},t)$, когда $q^3 < 0$, и $u_f(\mathbf{q},t)$, когда $q^3 > 0$.], где соответствующий лагранжиан задаётся формулой

$$L(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{,t}, \nabla_q\mathbf{u}) := \begin{cases} \frac{1}{2}\rho_s(\mathbf{q})\big|\mathbf{u}_{,t}\big|^2 - \frac{1}{2}C^{ijkl}(\mathbf{q})\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{kj}(\mathbf{u}), \text{ если } q_3 < 0, \\ \frac{1}{2}\rho_f(\mathbf{q})\big|\mathbf{u}_{,t}\big|^2 - \frac{1}{2}c_f^2(\mathbf{q})\rho_f(\mathbf{q})(\mathrm{div}_q\,\mathbf{u})^2, \text{ если } q_3 > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Рассмотрим теперь более общую геометрическую конфигурацию, когда граница раздела Σ является произвольной гладкой поверхностью. Обозначим через Ω_s и Ω_f области, заполненные, соответственно, упругой средой и жидкостью, т.е. $\Omega_s \cup \Omega_f \cup \Sigma = \mathbb{R}^3$

и $\Sigma = \partial\Omega_s = \partial\Omega_f$. Следуя работе Бабича и Кирпичниковой [6], введём регулярную систему координат q^1, q^2 на Σ и рассмотрим расстояние до Σ в качестве третьей координаты q^3, которая предполагается отрицательной в упругой среде и положительной в жидкости. Пусть Ω^Σ это слой, содержащий Σ и допускающий взаимно-однозначное описание тройками (q^1, q^2, q^3). Далее мы будем отождествлять точки области Ω^Σ с их криволинейными координатами и будем писать $\mathbf{q} \in \Omega^\Sigma$. Как и в случае любой регулярной коорлинатной системы, квадрат элемента расстояния между точками с координатами (q^1, q^2, q^3) и $(q^1 + dq^1, q^2 + dq^2, q^3 + dq^3)$ даётся выражением $G_{ij}(\mathbf{q})dq^i dq^j$, где гладкие коэффициенты $G_{ij}(\mathbf{q})$, $i, j = 1, 2, 3$, являются элементами соответствующего риманового тензора, порождающего метрику в касательном пространстве. Поскольку деформации упругого тела могут рассматриваться как касательные векторы, знание матрицы $G_{ij}(\mathbf{q})$ в каждой точке $\mathbf{q} \in \Omega^\Sigma$ позволяет выписать и решить уравнения линейной упругости в координатной системе (q^1, q^2, q^3). Хорошо известно, что тензор $G_{ij}(\mathbf{q})$ связан с первой $g_{ij}(\tilde{\mathbf{q}})$ и второй $b_{ij}(\tilde{\mathbf{q}})$ квадратичными формами координатной системы (q^1, q^2) на поверхности Σ формулами [Всюду далее мы используем обозначение $\tilde{\mathbf{q}} := (q^1, q^2)$.]

$$G_{ij}(\mathbf{q}) = g_{ij}(\tilde{\mathbf{q}}) - 2q^3 b_{ij}(\tilde{\mathbf{q}}) + O\big((q^3)^2\big), \text{при} \quad q^3 \to 0, \quad i, j = 1, 2,$$
$$G_{i3} = \delta_{i3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Имея в виду вывод уравнений равновесия и граничных условий, соответствующих описанной конфигурации, применим принцип Гамильтона к функционалу

$$\int_0^\infty \int_{\Omega^\Sigma} L\big(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{,t}(\mathbf{q}, t), \nabla_q \mathbf{u}(\mathbf{q}, t)\big) \sqrt{G(\mathbf{q})}\, \mathrm{d}\, \mathbf{q} dt. \tag{8}$$

Здесь $G(\mathbf{q}) := \det\big(G_{ij}(\mathbf{q})\big)$, а лагранжиан $L\big(\mathbf{q}, \mathbf{u}_{,t}(\mathbf{q}, t), \nabla_q \mathbf{u}(\mathbf{q}, t)\big)$ определён формулой (7), где используются стандартные выражения для соответствующих нормы, тензора деформаций и дивергенции в терминах ковариантных компонент $u_i, i = 1, 2, 3$, вектора $\mathbf{u}$, именно:

$$\big|\mathbf{u}_{,t}\big|^2 = G^{ij} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_j}{\partial t},$$
$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = -\Gamma^r_{kl} u_r + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial q^l} + \frac{\partial u_l}{\partial q^k}\right), \tag{9}$$

$$\operatorname{div}_q \mathbf{u} = G^{kl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = G^{kl}\left(-\Gamma^r_{kl}u_r + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial q^l} + \frac{\partial u_l}{\partial q^k}\right)\right)$$

$$= G^{kl}\left(-\Gamma^r_{kl}u_r + \frac{\partial u_k}{\partial q^l}\right). \qquad (10)$$

В формулах (9) и (10), Γ^r_{kl} это классические символы Кристофеля,

$$\Gamma^r_{kl}(\mathbf{q}) := \frac{1}{2}G^{ra}(\mathbf{q})\left(\frac{\partial G_{ka}(\mathbf{q})}{\partial q^l} + \frac{\partial G_{al}(\mathbf{q})}{\partial q^k} - \frac{\partial G_{kl}(\mathbf{q})}{\partial q^a}\right),$$

где $G^{ra}(\mathbf{q})$ обозначает матрицу, обратную матрице $G_{ra}(\mathbf{q})$.

Требуя, чтобы вариация функционала (8) обращалась в ноль, получаем уравнения Эйлера в упругой среде и в жидкости, а также “естественные” условия на напряжения на границе раздела:

$$\big(-\rho_s(\mathbf{q})G^{ik}(\mathbf{q})(u_k)_{,tt}(\mathbf{q},t) + \Gamma^i_{kl}(\mathbf{q})\sigma^{kl}(\mathbf{q},t)\big)\sqrt{G(\mathbf{q})}$$

$$+\frac{\partial}{\partial q^k}\big(\sigma^{ik}(\mathbf{q},t)\sqrt{G(\mathbf{q})}\big) = 0, \quad \text{если} \quad q^3 < 0, \qquad (11)$$

$$\big(-\rho_f(\mathbf{q})G^{ik}(\mathbf{q})(u_k)_{,tt}(\mathbf{q},t) + c_f^2(\mathbf{q})\rho_f(\mathbf{q})G^{kl}(\mathbf{q})\Gamma^i_{kl}(\mathbf{q})\operatorname{div}_q\mathbf{u}(\mathbf{q},t)\big)\sqrt{G(\mathbf{q})}$$

$$+\frac{\partial}{\partial q^k}\big(c_f^2(\mathbf{q})\rho_f(\mathbf{q})G^{ik}(\mathbf{q})\operatorname{div}_q\mathbf{u}(\mathbf{q},t)\sqrt{G(\mathbf{q})}\big) = 0, \quad \text{если} \quad q^3 > 0, \qquad (12)$$

$$C^{i3kl}(\mathbf{q})\left(-\Gamma^r_{kl}(\mathbf{q})u_r(\mathbf{q},t) + \frac{\partial u_k(\mathbf{q})}{\partial q^l}\right)\Bigg|_{q^3=-0}$$

$$= c_f^2(\mathbf{q})\rho_f(\mathbf{q})G^{i3}(\mathbf{q})\operatorname{div}_q\mathbf{u}(\mathbf{q},t)\big|_{q^3=+0}. \qquad (13)$$

3. Формальная асимптотическая процедура

3.1. Анзац. С математической точки зрения, различия между волнами Рэлея–Стоунли и волнами Шольте–Гоголадзе возникают в силу разницы в используемых граничных условиях. На свободной границе упругого тела или на границе раздела между двумя упругими телами накладывается условие непрерывности деформации, тогда как на границе раздела между упругим телом и жидкостью только нормальная компонента вектора смещения должна быть непрерывной (см. равенство (3). В этой работе мы рассматриваем второй случай. Для достижения поставленной цели мы используем погранслойную версию классического ВКБ-разложения, предложенную в контексте поверхностных волн Бабичем и Кирпичниковой в работе [6]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{q},t) \sim \exp\left(i\delta^{-1}\theta(q^1,q^2,t)\right)\sum_{n=0}^{\infty}(i\delta)^n\mathbf{U}^{(n)}(t,q^1,q^2,\delta^{-1}q^3), \qquad (14)$$

где δ это малая безразмерная величина, соответствующая отношению между определёнными характеристическими длинами, представленными в задаче. В нашем случае в качестве таких длин могут выступать длина волны и типичный размер неоднородности несущей границы раздела, $\theta(q^1,q^2,t)$ представляет волновую фазу, а $\mathbf{U}^{(n)}$, $n=0,1,...$, амплитуду волны и её приближения более высокого порядка при $\delta\to 0$. От амплитуд требуется, чтобы они экспоненциально убывали при $|\nu|\to\infty$, что соответствует ожиданию, что искомая волна сосредоточена в окрестности границы раздела.

Имея в виду получение точных формул для членов разложения (14), в этой работе мы рассматриваем случай однородных сред и, следовательно, мы используем "размерный" вариант разложения (14), зависящий от времени гармоническим образом, где роль большого параметра исполняет частота ω :

$$\mathbf{u}(\mathbf{q},t) \sim \exp\left(-i\omega(t-\tau(q^1,q^2))\right)\sum_{n=0}^{\infty}(i\omega)^{-n}\mathbf{U}^{(n)}(q^1,q^2,\omega q^3). \qquad (15)$$

Функции $\mathbf{U}^{(n)}$, входящие в анзац (15), могут быть найдены путем стандартной процедуры подстановки формального ряда (15) в уравнения (11) и (12), и последующей группировки членов полученного ряда в группы, соответствующие одинаковым степеням параметра ω. Следуя этому рецепту, мы приходим к рекуррентной последовательности уравнений (см. также [6]) для функций $\mathbf{U}^{(0)}(q^1,q^2,\nu)$. Из последующих рассмотрений будет видно, что рекуррентная последовательность, соответствующая волновому полю в жидкости, может быть получена путём, аналогичным тому, которым мы следуем при нахождении поля в упругой части пространства. Следовательно, имеет смысл сначала рассмотреть деформацию $\mathbf{u}(\mathbf{q},t)$ в области $\Omega^{\Sigma}\cap\Omega_s$ (где $q^3<0$), заполненной упругой средой.

3.2. Уравнение эйконала. Первое уравнение упомянутой последовательности получается группировкой членов порядка $O(\omega^2)$ и имеет следующий вид:

$$\big(\mathcal{N}_0\mathbf{U}^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\big)^i := -\rho_s G^{ik}(\tilde{\mathbf{q}},0)U_k^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$$
$$+C^{ikjl}(\tilde{\mathbf{q}},0)Q_jQ_kU_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)=0, \tag{16}$$

где операторы $Q_j, j=1,2,3$, определяются следующим образом (см. также [6]:

$$Q_j := \tau_{,j}, \quad j=1,2, \quad Q_3 := -i\frac{\partial}{\partial\nu}.$$

Заметим, что поскольку упругая среда однородна и изотропна, для тензора $C^{ijkl}(\mathbf{q})$, $i,j,k,l=1,2,3$, в координатной системе $\mathbf{q}$ с метрическим тензором $G^{ij}(\mathbf{q})$, $i,j=1,2,3$, справедливо следующее выражение (ср. [6])

$$C^{ijkl}(\mathbf{q})=\lambda G^{ij}(\mathbf{q})G^{kl}(\mathbf{q})+\mu\big(G^{jk}(\mathbf{q})G^{il}(\mathbf{q})+G^{jl}(\mathbf{q})G^{ik}(\mathbf{q})\big), \tag{17}$$

где λ и μ коэффициенты Ляме упругой среды.

Далее, удобно предположить, что фазовая функция $\tau(\tilde{\mathbf{q}})$ известна и переписать уравнения (16) в терминах координат $U^0_\sigma(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$, $U^0_\alpha(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$, $U^0_3(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$ комплекснозначного вектора $\mathbf{U}^0(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$ по отношению к "движущемуся" координатному реперу $\big(\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{q}}),\boldsymbol{\alpha}(\tilde{\mathbf{q}}),$ $\partial/\partial q^3\big)$ в касательном пространстве, где единичные векторы $\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{q}})$ и $\boldsymbol{\alpha}(\tilde{\mathbf{q}})$ определяются по формулам

$$\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{q}}) := \big|\nabla_{\tilde{q}}\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big|^{-1}\nabla_{\tilde{q}}\tau(\tilde{\mathbf{q}}), \qquad \nabla_{\tilde{q}}\tau(\tilde{\mathbf{q}})=g^{\tilde{i}\tilde{j}}(\tilde{\mathbf{q}})\frac{\partial\tau(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial q^{\tilde{i}}}\frac{\partial}{\partial q^{\tilde{j}}},$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\tilde{\mathbf{q}}) := \big|\bar{\boldsymbol{\alpha}}(\tilde{\mathbf{q}})\big|^{-1}\bar{\boldsymbol{\alpha}}(\tilde{\mathbf{q}}), \qquad \bar{\boldsymbol{\alpha}}(\tilde{\mathbf{q}}) := -\frac{\partial\tau(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial q^2}\frac{\partial}{\partial q^1}+\frac{\partial\tau(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial q^1}\frac{\partial}{\partial q^2}.$$

В результате мы получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной $\nu<0$ для компонент $U_\sigma^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$, $U_\alpha^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$ и $U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$ (ср. [6]):

$$\mu\frac{\partial^2 U_\sigma^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}{\partial\nu^2}+\Big(\rho_s-(\lambda+2\mu)\big(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big)^2\Big)U_\sigma^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$$
$$+i(\lambda+\mu)\big|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big|\frac{\partial U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}{\partial\nu}=0, \tag{18}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}{\partial\nu^2}+\Big(\rho_s-\mu\big(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big)^2\Big)U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$$

$$+i(\lambda+\mu)\big|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big|\frac{\partial U_\sigma^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}{\partial\nu}=0, \qquad (19)$$

$$\mu\frac{\partial^2 U_\alpha^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}{\partial\nu^2}+\Big(\rho_s-\mu\big(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big)^2\Big)U_\alpha^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)=0. \qquad (20)$$

Используя условие экспоненциального затухания поля деформаций в упругой среде, решение системы (18)–(19) находится по формулам:

$$U_\sigma^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)=A_1(\tilde{\mathbf{q}})\exp(\kappa_1(\tilde{\mathbf{q}})\nu)+A_2(\tilde{\mathbf{q}})\frac{i\kappa_2(\tilde{\mathbf{q}})}{|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})|}\exp(\kappa_2(\tilde{\mathbf{q}})\nu), \qquad (21)$$

$$U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)=-A_1(\tilde{\mathbf{q}})\frac{i\kappa_1(\tilde{\mathbf{q}})}{|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})|}\exp(\kappa_1(\tilde{\mathbf{q}})\nu)+A_2(\tilde{\mathbf{q}})\exp(\kappa_2(\tilde{\mathbf{q}})\nu), \qquad (22)$$

где $\nu<0$,

$$\kappa_1(\tilde{\mathbf{q}}):=\sqrt{\big(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big)^2-\frac{\rho_s}{\lambda+2\mu}}, \quad \kappa_2(\tilde{\mathbf{q}}):=\sqrt{\big(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big)^2-\frac{\rho_s}{\mu}}, \qquad (23)$$

и значения квадратных корней выбраны в соответствии с требованием $\mathrm{Re}(\kappa_{1,2})>0$.

Нетрудно заметить, что похожая формальная асимптотическая процедура для волнового поля $\mathbf{u}(\mathbf{q},t)$ при $q^3>0$, приведёт, через подстановку ряда (15) в уравнение равновесия (12), к аналогичным уравнениям с $\mu=0$ и $\lambda=c_f^2\rho_f$. Следовательно, система уравнений для компонент $U_\sigma^0(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$, $U_\alpha^0(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$ и $U_3^0(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$ при $\nu>0$ также частично расщепляется, именно (ср. [6]):

$$\Big(1-c_f^2\big(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big)^2\Big)U_\sigma^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)+ic_f^2\big|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big|\frac{\partial U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}{\partial\nu}=0, \qquad (24)$$

$$c_f^2\frac{\partial^2 U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}{\partial\nu^2}+U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)+ic_f^2\big|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big|\frac{\partial U_\sigma^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}{\partial\nu}=0, \qquad (25)$$

$$U_\alpha^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)=0. \qquad (26)$$

Принимая во внимание условие убывания поля деформаций вдали от границы раздела, мы находим решение системы (24)–(25)

при $\nu > 0$ и при условии, что $\big(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big)^2 - c_f^{-2} > 0$, которое дается формулами

$$U_\sigma^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu) = -\frac{i\big|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big|}{\sqrt{\big(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big)^2 - c_f^{-2}}}B_1(\tilde{\mathbf{q}})\exp\Big(-\nu\sqrt{\big(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big)^2 - c_f^{-2}}\Big), \tag{27}$$

$$U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu) = B_1(\tilde{\mathbf{q}})\exp\Big(-\nu\sqrt{\big(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big)^2 - c_f^{-2}}\Big). \tag{28}$$

Коэффициенты $A_1(\tilde{\mathbf{q}})$, $A_2(\tilde{\mathbf{q}})$ и $B_1(\tilde{\mathbf{q}})$, а также уравнение для фазы $\tau(\tilde{\mathbf{q}})$ находятся из условий на границе раздела (13), которые, после группировки членов порядка $O(\omega)$, влекут

$$C^{i3kl}(\tilde{\mathbf{q}},0)Q_lU_k^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\big|_{\nu=-0} = c_f^2\rho_f G^{i3}(\tilde{\mathbf{q}},0)G^{kl}(\tilde{\mathbf{q}},0)Q_lU_k^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\big|_{\nu=+0}. \tag{29}$$

Переписывая соотношение (29) в терминах компонент $U_\sigma^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$, $U_\alpha^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$ и $U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$, мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\big|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big|U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},-0) - i\frac{\partial}{\partial\nu}U_\sigma^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\bigg|_{\nu=-0} = 0, \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}U_\alpha^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\bigg|_{\nu=-0} = 0, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\lambda\big|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big|U_\sigma^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},-0) - i(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial\nu}U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\bigg|_{\nu=-0}\\ = c_f^2\rho_f\big|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big|U_\sigma^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},+0) - ic_f^2\rho_f\frac{\partial}{\partial\nu}U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\bigg|_{\nu=+0}.\end{aligned} \tag{32}$$

В силу формул (21)–(22) и (27)–(28), уравнения (30) и (32), вместе с равенством

$$U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},-0) = U_3^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},+0), \tag{33}$$

эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $A_1(\tilde{\mathbf{q}})$, $A_2(\tilde{\mathbf{q}})$, и $B_1(\tilde{\mathbf{q}})$, с матрицей

$$\begin{pmatrix} -2i\kappa_1(\tilde{\mathbf{q}}) & \big|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big|+\kappa_2^2(\tilde{\mathbf{q}})\big|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big|^{-1} & 0\\ -2\mu\big|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big|+\rho_s\big|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big|^{-1} & -2i\mu\kappa_2(\tilde{\mathbf{q}}) & i\rho_f\Big(\big(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big)^2-c_f^{-2}\Big)^{-\frac{1}{2}}\\ -i\kappa_1(\tilde{\mathbf{q}})\big|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\big|^{-1} & 1 & -1\end{pmatrix}. \tag{34}$$

Требуя, чтобы определитель этой матрицы обращался в нуль, мы приходим к следующему уравнению на градиент фазы:

$$\left(\left(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\right)^2 - \frac{1}{c_f^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(4\left(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\right)^2 \kappa_1(\tilde{\mathbf{q}})\kappa_2(\tilde{\mathbf{q}}) - \left(2\left(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\right)^2 - \frac{\rho_s}{\mu}\right)^2\right)$$
$$= \rho_f \rho_s \mu^{-2} \kappa_1(\tilde{\mathbf{q}}). \qquad (35)$$

Можно показать (см. работу Гоголадзе [8]), что это уравнение имеет единственное положительное решение

$$\left(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\right)^2 = c^{-2}, \qquad (36)$$

такое, что $c < c_f$, $c < \sqrt{\mu/\rho_s}$. Уравнение (36) является вариантом классического уравнения эйконала для волны Шольте–Гоголадзе. Решения этого уравнения могут быть получены стандартным построением подходящей системы лучей на поверхности Σ. Например, если известны значения фазы $\tau(\tilde{\mathbf{q}})$ на кривой S, трансверсальной полю геодезических, то решение уравнения (36) даётся формулой

$$\tau(\tilde{\mathbf{q}}) = \tau|_S(\tilde{\mathbf{q}}) + c^{-1}s, \qquad (37)$$

где s – расстояние от точки $\tilde{\mathbf{q}}$ до кривой S вдоль геодезической.

3.3. Нахождение коэффициентов $A_1(\tilde{\mathbf{q}})$, $A_2(\tilde{\mathbf{q}})$ и $B_1(\tilde{\mathbf{q}})$.

Выражение (34) для матрицы системы уравнений, связывающих коэффициенты $A_1(\tilde{\mathbf{q}})$, $A_2(\tilde{\mathbf{q}})$, и $B_1(\tilde{\mathbf{q}})$, позволяет нам выразить какие-нибудь два из них через третий. Например, справедливы следующие соотношения:

$$A_1(\tilde{\mathbf{q}}) = -i\frac{\mu}{\rho_s \kappa_1(\tilde{\mathbf{q}})}\left|\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\right|\left(2\left(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}})\right)^2 - \frac{\rho_s}{\mu}\right)B_1(\tilde{\mathbf{q}}), \qquad (38)$$

и

$$A_2(\tilde{\mathbf{q}}) = \frac{2\mu}{\rho_s}\left(\nabla\tau(\tilde{\mathbf{q}}, 0)\right)^2 B_1(\tilde{\mathbf{q}}). \qquad (39)$$

Заметим также, что в силу (26), (20), (31) и условия убывания при $\nu \to -\infty$, мы получаем

$$U_\alpha^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}}, \nu) = 0. \qquad (40)$$

Следующим шагом мы получим точное аналитическое выражение для функции $B_1(\tilde{\mathbf{q}})$. С этой целью, собирая вместе члены порядка ω в результате подстановки ряда (15) в уравнение (11) для поля в упругой части пространства, мы приходим к уравнению (ср. [6])

$$\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}\mathcal{N}_0\mathbf{U}^{(1)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)+\mathcal{N}_1\mathbf{U}^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)=0, \tag{41}$$

где оператор $\mathcal{N}_1$ определён формулой

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{N}_1\mathbf{U}^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\big)^i := -i\nu\rho_s\frac{\partial}{\partial q^3}\big(\sqrt{G(\mathbf{q})}G^{ik}(\mathbf{q})\big)\Big|_{q^3=0}U_k^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\\
+C^{kljm}(\tilde{\mathbf{q}},0)\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}\Gamma^i_{kl}(\tilde{\mathbf{q}},0)Q_jU_m^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\\
-C^{ikjl}(\tilde{\mathbf{q}},0)\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}\Gamma^r_{jl}(\tilde{\mathbf{q}},0)Q_kU_r^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\\
+\frac{\partial}{\partial q^k}\big(C^{ikjl}(\mathbf{q})\sqrt{G(\mathbf{q})}\big)\Big|_{q^3=0}Q_jU_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\\
+i\nu\frac{\partial}{\partial q^3}\big(C^{ijkl}(\mathbf{q})\sqrt{G(\mathbf{q})}\big)\Big|_{q^3=0}Q_kQ_jU_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\\
+C^{ik\tilde{j}l}(\tilde{\mathbf{q}},0)\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}Q_k\frac{\partial U_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}{\partial q^{\tilde{j}}}\\
+C^{i\tilde{k}jl}(\tilde{\mathbf{q}},0)\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}Q_j\frac{\partial U_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}{\partial q^{\tilde{k}}}\\
+\frac{\partial^2\tau(\tilde{\mathbf{q}},0)}{\partial q^{\tilde{j}}\partial q^{\tilde{k}}}\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}C^{i\tilde{j}\tilde{k}l}(\tilde{\mathbf{q}},0)U_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu),
\end{aligned}$$

где суммирование по отношению к индексам с тильдой производится от 1 до 2. [Это соглашение используется и в ряде последующих формул.]

Приравнивая члены порядка $O(1)$ при $\omega\to\infty$ в условии (13) на значения нормального напряжения на границе раздела, мы получаем

$$\begin{aligned}
-C^{i3kl}(\tilde{\mathbf{q}},0)\Gamma^r_{kl}(\tilde{\mathbf{q}},0)U_r^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},-0)+C^{i3kl}(\tilde{\mathbf{q}},0)Q_lU_k^{(1)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\big|_{\nu=-0}\\
+C^{i3k\tilde{l}}(\tilde{\mathbf{q}},0)\frac{\partial U_k^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},-0)}{\partial q^{\tilde{l}}}=-c_f^2\rho_fG^{i3}(\mathbf{q})G^{kl}(\mathbf{q})\Gamma^r_{kl}(\mathbf{q})U_r^{(0)}(\mathbf{q})\\
+c_f^2\rho_fG^{i3}(\mathbf{q})G^{kl}(\mathbf{q})Q_lU_k^{(1)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\big|_{\nu=-0}+c_f^2\rho_fG^{i3}(\mathbf{q})G^{kl}(\mathbf{q})\frac{\partial U_k^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},+0)}{\partial q^{\tilde{l}}}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Введем вектор $\mathbf{V}^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$, определяемый формулами (21)–(23), (38)–(39), (27)–(28), (40), но с коэффициентом $B_1(\tilde{\mathbf{q}})$, заменённым произвольной функцией $\phi(\tilde{\mathbf{q}})$.

Искомое уравнение на функцию $B_1(\tilde{\mathbf{q}})$ может быть получено путём взятия скалярного произведения обеих частей уравнения (41) с вектором $\overline{\mathbf{V}^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}$, интегрирования полученного результата по частям по переменной ν от $-\infty$ до ∞, и использования соотношений (16), (29), (33) и (42), что приводит к варианту условия разрешимости для уравнения (41) в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Bigg(& -i\nu \frac{\partial}{\partial q^3}\left(C^{ijkl}(\mathbf{q})\sqrt{G(\mathbf{q})}\right)\Big|_{q^3=0} Q_k U_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\overline{Q_j V_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)} \\
& -\frac{\partial}{\partial q^{\tilde{k}}}\left(C^{i\tilde{k}jl}(\tilde{\mathbf{q}},0)\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}\right) Q_j U_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\overline{V_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)} \\
& +C^{ikjl}(\tilde{\mathbf{q}},0)\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}\,\Gamma^r_{jl}(\tilde{\mathbf{q}},0) U_r^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\overline{Q_k V_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)} \\
& -C^{ik\tilde{j}l}(\tilde{\mathbf{q}},0)\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}\frac{\partial U_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}{\partial q^{\tilde{j}}}\overline{Q_k V_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)} \\
& +i\nu\rho_s \frac{\partial}{\partial q^3}\left(G^{ik}(\mathbf{q})\sqrt{G(\mathbf{q})}\right)\Big|_{q^3=0} U_k^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\overline{V_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)} \\
& -C^{kljm}(\tilde{\mathbf{q}},0)\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}\,\Gamma^i_{kl}(\tilde{\mathbf{q}},0) Q_j U_m^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\overline{V_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)} \\
& -C^{i\tilde{k}jl}(\tilde{\mathbf{q}},0)\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}\, Q_j \frac{\partial U_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}{\partial q^{\tilde{k}}}\overline{V_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)} \\
& -\frac{\partial^2 \tau(\tilde{\mathbf{q}},0)}{\partial q^{\tilde{j}}\partial q^{\tilde{k}}}\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}\, C^{i\tilde{j}\tilde{k}l}(\tilde{\mathbf{q}},0) U_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\overline{V_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}\Bigg) d\nu = 0
\end{aligned} \tag{43}
$$

Подходящая перестановка членов выражения (43) приводит к уравнению

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{0} \Bigg(& -\frac{\partial}{\partial q^{\tilde{k}}}\left(C^{i\tilde{k}jl}(\tilde{\mathbf{q}},0)\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)} Q_j U_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\overline{V_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}\right) \\
& +C^{i\tilde{k}jl}(\tilde{\mathbf{q}},0)\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}\, Q_j U_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\overline{\frac{\partial V_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}{\partial q^{\tilde{k}}}}
\end{aligned}
$$

$$-i\nu\frac{\partial}{\partial q^3}\left(C^{ijkl}(\mathbf{q})\sqrt{G(\mathbf{q})}\right)\Big|_{q^3=0}Q_kU_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\overline{Q_jV_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}$$

$$+C^{ikjl}(\tilde{\mathbf{q}},0)\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}\Gamma^r_{jl}(\tilde{\mathbf{q}},0)U_r^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\overline{Q_kV_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}$$

$$+i\nu\rho_s\frac{\partial}{\partial q^3}\left(G^{ik}(\mathbf{q})\sqrt{G(\mathbf{q})}\right)\Big|_{q^3=0}U_k^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\overline{V_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}$$

$$-C^{kljm}(\tilde{\mathbf{q}},0)\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}\Gamma^i_{kl}(\tilde{\mathbf{q}},0)Q_jU_m^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)\overline{V_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}$$

$$-C^{ik\tilde{j}l}(\tilde{\mathbf{q}},0)\sqrt{G(\tilde{\mathbf{q}},0)}\frac{\partial U_l^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}{\partial q^{\tilde{j}}}\overline{Q_kV_i^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)}\Bigg)d\nu=0. \qquad (44)$$

Равенство (44) справедливо для любого выбора функции $\phi(\tilde{\mathbf{q}})$ в приведённом выше определении вектора $\mathbf{V}^{(0)}(\tilde{\mathbf{q}},\nu)$, приводя к эквивалентным уравнениям для различных $\phi(\tilde{\mathbf{q}})$. Далее мы полагаем $\phi(\tilde{\mathbf{q}})=1$, после чего уравнение (44) принимает вид

$$-\left(\mathcal{A}_{\tilde{k}}(\tilde{\mathbf{q}})B_1(\tilde{\mathbf{q}})\right)_{,\tilde{k}}+\mathcal{B}(\tilde{\mathbf{q}})B_1(\tilde{\mathbf{q}})+i\mathcal{C}(\tilde{\mathbf{q}})B_1(\tilde{\mathbf{q}})=0, \qquad (45)$$

с некоторыми комплекснозначными коэффициентами $\mathcal{A}_k(\tilde{\mathbf{q}})$, $\mathcal{B}(\tilde{\mathbf{q}})$ и $\mathcal{C}(\tilde{\mathbf{q}})$.

Подставляя в (44) выражения для компонент вектора $\mathbf{U}^{(0)}(\tilde{q},\nu)$ из равенств (21)–(22), (38)–(39), (27)–(28), (40), и для компонент вектора $\mathbf{V}^{(0)}(\tilde{q},\nu)$ из аналогичных формул с подстановкой $B_1(\tilde{\mathbf{q}})=1$, мы получаем явные формулы для этих коэффициентов, именно

$$\mathcal{A}_{\tilde{k}}=2g^{\tilde{k}\tilde{i}}(\tilde{\mathbf{q}})\frac{\partial\tau(\tilde{\mathbf{q}},0)}{\partial q^{\tilde{i}}}\sqrt{g(\tilde{\mathbf{q}})}\mathfrak{A},$$

$$\mathcal{B}=\frac{\partial}{\partial q^{\tilde{k}}}\left(g^{\tilde{k}\tilde{i}}(\tilde{\mathbf{q}})\frac{\partial\tau(\tilde{\mathbf{q}},0)}{\partial q^{\tilde{i}}}\sqrt{g(\tilde{\mathbf{q}})}\right)\mathfrak{A},$$

$$\mathcal{C}=g^{\tilde{i}\tilde{j}}(\tilde{\mathbf{q}})b_{\tilde{i}\tilde{j}}(\tilde{\mathbf{q}})\sqrt{g(\tilde{\mathbf{q}})}\mathfrak{C}_1+g^{\tilde{i}\tilde{l}}(\tilde{\mathbf{q}})g^{\tilde{j}\tilde{m}}(\tilde{\mathbf{q}})\frac{\partial\tau(\tilde{\mathbf{q}},0)}{\partial q^{\tilde{i}}}\frac{\partial\tau(\tilde{\mathbf{q}},0)}{\partial q^{\tilde{j}}}b_{\tilde{l}\tilde{m}}(\tilde{\mathbf{q}})\sqrt{g(\tilde{\mathbf{q}})}\mathfrak{C}_2,$$

где $\sqrt{g(\tilde{\mathbf{q}})}:=\det\left(g_{ij}(\tilde{\mathbf{q}})\right)$, а а постоянные $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ вычисляются по формулам

$$\mathfrak{A}:=\frac{\mu^2}{\rho_s}\left(\frac{1}{2\kappa_1^3}\left(\frac{2}{c^2}-\frac{\rho_s}{\mu}\right)^2+2\left(\frac{1}{\kappa_1}-\frac{2}{\kappa_2}\right)\left(\frac{2}{c^2}-\frac{\rho_s}{\mu}\right)+2\kappa_2\right)-\frac{\rho_f}{2\kappa_3^3},$$

$$\mathfrak{C}_1 := \frac{\mu^2}{\rho_s}\left(-\frac{1}{2\kappa_1^2}\left(\frac{2}{c^2}-\frac{\rho_s}{\mu}\right)^2 + 2\kappa_2^2\right) + \frac{\rho_f}{2\kappa_3^2}.$$

и

$$\mathfrak{C}_2 := \frac{\mu^2}{\rho_s}\left(\frac{\lambda+2\mu}{2\mu\kappa_1^2\kappa_2^2}\left(\frac{2}{c^2}-\frac{\rho_s}{\mu}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\kappa_1(\lambda+2\mu)}\left(\frac{\lambda}{\kappa_1}+\frac{4\mu}{\kappa_1+\kappa_2}\right)\left(\frac{2}{c^2}-\frac{\rho_s}{\mu}\right)+\frac{2}{c^2\kappa_2^2}\right) - \frac{\rho_f}{2\kappa_3^4}.$$

Здесь, κ_1, κ_2 и κ_3 постоянные, которые вычисляются по формулам (ср. (23)) $\kappa_1 = \sqrt{c^{-2}-(\lambda+2\mu)^{-1}\rho_s}$, $\kappa_2 = \sqrt{c^{-2}-\mu^{-1}\rho_s}$ и $\kappa_3 := \sqrt{c^{-2}-c_f^{-2}}$.

Таким образом, равенство (45) имеет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{g(\tilde{\mathbf{q}})}}\frac{\partial}{\partial q^{\tilde{k}}}\left(g^{\tilde{k}\tilde{i}}(\tilde{\mathbf{q}})\frac{\partial\tau(\tilde{\mathbf{q}},0)}{\partial q^{\tilde{i}}}\sqrt{g(\tilde{\mathbf{q}})}B_1(\tilde{\mathbf{q}},0)\right)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{g(\tilde{\mathbf{q}})}}\frac{\partial}{\partial q^{\tilde{k}}}\left(g^{\tilde{k}\tilde{i}}(\tilde{\mathbf{q}})\frac{\partial\tau(\tilde{\mathbf{q}},0)}{\partial q^{\tilde{i}}}\sqrt{g(\tilde{\mathbf{q}})}\right)B_1(\tilde{\mathbf{q}}) + i\frac{\mathfrak{C}_1}{2\mathfrak{A}}g^{\tilde{i}\tilde{j}}(\tilde{\mathbf{q}})b_{\tilde{i}\tilde{j}}(\tilde{\mathbf{q}})B_1(\tilde{\mathbf{q}})+$$

$$+i\frac{\mathfrak{C}_2}{2\mathfrak{A}}g^{\tilde{i}\tilde{l}}(\tilde{\mathbf{q}})g^{\tilde{j}\tilde{m}}(\tilde{\mathbf{q}})\frac{\partial\tau(\tilde{\mathbf{q}},0)}{\partial q^{\tilde{i}}}\frac{\partial\tau(\tilde{\mathbf{q}},0)}{\partial q^{\tilde{j}}}b_{\tilde{l}\tilde{m}}(\tilde{\mathbf{q}})B_1(\tilde{\mathbf{q}}) = 0. \qquad (46)$$

Подставляя выражение (37) для фазы $\tau(\tilde{\mathbf{q}},0)$ в уравнение (46), где мы предполагаем для простоты, что начальные значения $\tau|_S(\tilde{\mathbf{q}})$ равны нулю, получаем уравнение

$$-\frac{1}{\sqrt{g(\tilde{\mathbf{q}})}}\frac{\partial}{\partial q^{\tilde{k}}}\left(g^{\tilde{k}\tilde{i}}(\tilde{\mathbf{q}})\frac{\partial s(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial q^{\tilde{i}}}\sqrt{g(\tilde{\mathbf{q}})}B_1(\tilde{\mathbf{q}})\right)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{g(\tilde{\mathbf{q}})}}\frac{\partial}{\partial q^{\tilde{k}}}\left(g^{\tilde{k}\tilde{i}}(\tilde{\mathbf{q}})\frac{\partial s(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial q^{\tilde{i}}}\sqrt{g(\tilde{\mathbf{q}})}\right)B_1(\tilde{\mathbf{q}}) + i\frac{c\mathfrak{C}_1}{2\mathfrak{A}}g^{\tilde{i}\tilde{j}}(\tilde{\mathbf{q}})b_{\tilde{i}\tilde{j}}(\tilde{\mathbf{q}})B_1(\tilde{\mathbf{q}},0)$$

$$+i\frac{\mathfrak{C}_2}{2c\mathfrak{A}}g^{\tilde{i}\tilde{l}}(\tilde{\mathbf{q}})g^{\tilde{j}\tilde{m}}(\tilde{\mathbf{q}})\frac{\partial s(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial q^{\tilde{i}}}\frac{\partial s(\tilde{\mathbf{q}})}{\partial q^{\tilde{j}}}b_{\tilde{l}\tilde{m}}(\tilde{\mathbf{q}})B_1(\tilde{\mathbf{q}}) = 0.$$

В лучевых координатах (s,α) последнее уравнение принимает особенно простую форму [Для краткости мы опускаем обозначения для независимых переменных в некоторых из последующих формул.]:

$$-\frac{1}{J\psi_0}\frac{\partial(J\psi_0)}{\partial s} + \frac{1}{2J}\frac{\partial J}{\partial s} + i\frac{c\mathfrak{C}_1}{2\mathfrak{A}}(\hat{b}_{11}+J^{-2}\hat{b}_{22}) + i\frac{\mathfrak{C}_2}{2c\mathfrak{A}}\hat{b}_{11} = 0, \qquad (47)$$

где

$$J(s,\alpha):=\sqrt{g_{\tilde{i}\tilde{j}}(\tilde{\mathbf{q}}(s,\alpha))q^{\tilde{i}}_{,\alpha}(s,\alpha)q^{\tilde{j}}_{,\alpha}(s,\alpha)}$$

это классическая лучевая расходимость, а коэффициенты $\hat{b}_{11}$, $\hat{b}_{22}$ второй квадратичной формы координатной системы (s,α) на поверхности Σ вычисляются по формулам

$$\hat{b}_{11}=g^{\tilde{i}\tilde{l}}g^{\tilde{j}\tilde{m}}\frac{\partial s}{\partial q^{\tilde{i}}}\frac{\partial s}{\partial q^{\tilde{j}}}b_{\tilde{l}\tilde{m}}$$

и

$$\hat{b}_{22}=-\left(g_{11}\left(\frac{\partial s}{\partial q^1}\right)^2-2g_{12}\frac{\partial s}{\partial q^1}\frac{\partial s}{\partial q^2}+g_{22}\left(\frac{\partial s}{\partial q^2}\right)^2\right)^{-1}$$
$$\times\left(b_{11}\left(\frac{\partial s}{\partial q^1}\right)^2-2b_{12}\frac{\partial s}{\partial q^1}\frac{\partial s}{\partial q^2}+b_{22}\left(\frac{\partial s}{\partial q^2}\right)^2\right)J^2.$$

Интегрирование уравнения (47) ведёт к следующей формуле для функции B_1 представленной в терминах переменных s и α

$$B_1(s,\alpha)=B_1(0,\alpha)\frac{1}{\sqrt{J(s,\alpha)}}\exp\left(i\frac{c\mathfrak{C}_1}{2\mathfrak{A}}\int\limits_0^s\Big(\hat{b}_{11}(v,\alpha)\right.$$
$$\left.+\big(J(v,\alpha)\big)^{-2}\hat{b}_{22}(v,\alpha)\Big)dv+i\frac{\mathfrak{C}_2}{2c\mathfrak{A}}\int\limits_0^s\hat{b}_{11}(v,\alpha)dv\right). \tag{48}$$

Формула (48) отражает ожидаемый характер зависимости амплитуды от расходимости, соответствующий переносу энергии вдоль геодезических на поверхности Σ, а также содержит явное аналитическое выражение для аналога фазы Берри в случае волны Шольте–Гоголадзе. Подставляя выражение (48) в равенства (38)–(39), (21)–(22), (27)–(28), получаем искомые формулы для главного члена волновой асимптотики при $\nu\to\infty$.

Литература

1. В. М. Бабич, *Распространение волн Рэлея вдоль поверхности упругого тела произвольной формы.* — ДАН СССР **137** (1961), 1263–1266.
2. В. М. Бабич и В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* Наука, М. (1972).

3. В. М. Бабич, В. С. Булдырев и И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод. (Линейные и нелинейные волны).* Изд. ЛГУ, Ленинград (1985).
4. В. М. Бабич и Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* Изд. ЛГУ, Ленинград (1974).
5. В. М. Бабич и Н. Я. Русакова (Кирпичникова), *О распространении волн Рэлея по поверхности неоднородного упругого тела произвольной формы.* — Ж. Выч. Матем. и Матем. Физ. **2**, Но. 4 (1962), 652–665.
6. V. M. Babich and N. Ya. Kirpichnikova, *A new approach to the problem of Rayleigh wave propagation along the boundary of a non-homogeneous elastic body.* — Wave Motion **40** (2004), 209–223.
7. M. V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes.* — Proc. Roy. Soc. London Ser. A **392** (1984), 45–57.
8. В. Г. Гоголадзе, *Волны Рэлея на границе сжимаемой жидкой среды и твердого упругого полупространства.* — Труды Сейсмологич. Инст. Акад. Наук СССР No. 127 (1948), 27–32.
9. R. D. Gregory, *The propagation of Rayleigh waves over curved surfaces at high frequency.* — Proc. Camb. Phil. Soc. **70** (1971), 103–121.
10. R. Grimshaw, *Propagation of surface waves at high frequences.* — J. Inst. Maths Applics **4** (1968), 174–193.
11. J. B. Keller and F. C. Karal, *Surface wave excitation and propagation.* — J. Appl. Phys. **31**, No. 6 (1960), 1039–1046.
12. J. B. Keller and F. C. Karal, *Geometrical theory of elastic surface wave excitation and propagation.* — J. Acoustic Soc. Am. **36**, No. 1 (1964), 32–40.
13. П. В. Крауклис, *К оценке интенсивности поверхностных волн Рэлея и Стоунли на неоднородной трассе.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **15**, 2 (1969), 115–121.
14. В. Д. Купрадзе и С. Л. Соболев, *К вопросу о распределении упругих волн на границе раздела двух упругих сред с различными упругими свойствами.* — Труды Сейсмологич. Инст. Акад. Наук СССР, No. 10 (1930), 1–23.
15. В. Е. Номофилов, *О распространении квазистационарных волн Рэлея в неоднородной анизотропной упругой среде.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 234–245.
16. В. Е. Номофилов, *Квазистационарные волны Стоунли.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **104** (1981), 180–194.
17. H. Ockendon and A. B. Tayler, *Inviscid fluid flows.* Springer-Verlag (1983).
18. Lord Rayleigh (John William Strutt), *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid.* — Proc. London Math. Soc. **17** (1887), 4–11.
19. J. G. Scholte, *On true and pseudo Rayleigh waves.* — Nederl. Akad. Wetensch., Proc. **52** (1949), 652–653.
20. R. Stoneley, *Elastic waves at the surface of separation of two solids.* — Proc. R. Soc. Lond. A **106**, No. 738 (1924), 416–128.

Cherednichenko K. D. On propagation of Scholte-Gogoladze surface waves along a fluid-solid interface of arbitrary shape.

A high-frequency ray theory is presented for a type of small-amplitude waves (Scholte-Gogoladze waves) localised in a thin layer around an interface between elastic and fluid domains. The interface is assumed to be smooth, with the typical radius of curvature much larger than the excitation wavelength. The technique employed in the work is based on a boundary-layer version of the classical WKB expansion (see V. M. Babich and N. Ya. Kirpichnikova, *The boundary-layer method in diffraction problems,* Berlin; New York: Springer-Verlag, 1979).

St. John's College,
Oxford, OX2 6JL, United Kingdom,
С.-Петербургский
государственный университ

Поступило 8 февраля 2005 г.