Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 325, 2005 г.

А. А. Багаев

ПЕРЕНОРМИРОВКА КВАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ ЯНГА–МИЛЛСА В ФОРМАЛИЗМЕ ФОНОВОГО ПОЛЯ

1. Эффективное действие

В квантовой теории поля (см., например, [1]) известно, что в однопетлевом приближении эффективное действие имеет вид

$$S^{\mathrm{eff}} = \frac{1}{g^2}\, S_{\mathrm{cl}} + \ln\big(\det K_{\mathrm{G}}\big) - \frac{1}{2}\,\ln\big(\det K_{\mathrm{F}}\big), \tag{1.1}$$

где операторы

$$K^{ab}_{\mathrm{G}} = \left(\nabla^2\right)^{ab},$$
$$K^{ab}_{\mathrm{F}\mu\nu} = \left(\nabla^2\right)^{ab}\delta_{\mu\nu} + 2f^{akb}F^{k}_{\mu\nu}$$

соответственно определяют квадратичные формы в действии по полям ду́хов Фаддеева–Попова (см. [2]) и калибровочного поля Q – см. представление (3.7); все объекты зависят от классического фонового поля B,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu]$$

это янг–миллсовский тензор фонового поля (a и b – это индексы присоединенного представления алгебры $\mathfrak{su}(N)$, а μ и ν – лоренцевы индексы).

Вычислим детерминанты с помощью метода собственного времени Фока. Описание этого метода можно найти в оригинальной статье [3] и в последующих работах [4, 5]. В рамках указанного подхода имеет место представление

$$\ln\det K_{\substack{\mathrm{G}\\ \mathrm{F}}} = -\int\limits_0^{+\infty}\frac{ds}{s}\,\mathrm{tr}\int\limits_{\mathbb{R}^4}\theta_{\substack{\mathrm{G}\\ \mathrm{F}}}(x,x,s)d^4x, \tag{1.2}$$

Работа частично поддержана грантами РФФИ 05-01-00899, 05-01-00922 и CRDF RMU1-2622-ST-04.

где $\theta_{\rm G}$ и $\theta_{\rm F}$ – тепловые функции операторов K, которые являются решениями задач Коши для параболических уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} K_{\substack{\rm G\\ \rm F}}\,\theta_{\substack{\rm G\\ \rm F}}(x,y,s) = \frac{\partial\theta_{\substack{\rm G\\ \rm F}}(x,y,s)}{\partial s} \\ \theta_{\substack{\rm G\\ \rm F}}(x,y,s)\big|_{s=0} = \delta(x-y)I_{\substack{\rm G\\ \rm F}}. \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Решение (1.3), как показано в [5], можно искать в виде рядов

$$\theta_{\substack{\rm G\\ \rm F}}(x,y,s) = \frac{1}{(4\pi)^2 s^2}\, e^{-\dfrac{(x-y)^2}{4s}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,y)s^n, \tag{1.4}$$

ограничиваясь лишь членами, дающими УФ-расходящиеся вклады при подстановке в (1.2), т.е. членами с $n \le 2$.

Подстановка (1.4) в (1.3) приводит к двум сериям рекуррентных уравнений для $a_n(x,y)$, которые называются коэффициентами Сили–де Витта; коэффициент a_0, общий для обеих серий, удовлетворяет уравнению параллельного переноса

$$\left\{\begin{array}{l} (x-y)_\rho \nabla_\rho a_0^{ab}(x,y) = 0 \\ a_0^{ab}(x,x) = \delta^{ab}. \end{array}\right. \tag{1.5}$$

Рекуррентные уравнения дают для функции $\theta_{\rm G}$ на диагонали

$$a_1^{aa}(x,x) = \nabla^2 a_0^{aa}(x,y)\big|_{y=x}, \tag{1.6a}$$

$$a_2^{ab}(x,x) = \frac{1}{6}\,\nabla^4 a_0^{aa}(x,y)\big|_{y=x}, \tag{1.6b}$$

а для функции $\theta_{\rm F}$ –

$$a_{1\mu\mu}^{aa}(x,x) = 4\,\nabla^2 a_0^{aa}(x,y)\big|_{y=x}, \tag{1.7a}$$

$$a_{2\mu\mu}^{aa}(x,x) = \frac{2}{3}\,\nabla^4 a_0^{aa}(x,y)\big|_{y=x} + 2C(N)F^2(x). \tag{1.7b}$$

Здесь $C(N)$ – собственное значение оператора Казимира алгебры $\mathfrak{su}(N)$ в присоединенном представлении.

Коэффициенты (1.6a) и (1.7a) в силу (1.5) обращаются в ноль; подставляя (1.6b) и (1.7b) в виде (1.4) в формулу (1.2), получаем для (1.1) выражение

$$S^{\text{eff}} =$$

$$= \frac{1}{g^2}\, S_{\text{cl}} + \frac{1}{(4\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \left(\frac{1}{6}\, \nabla^4 a_0^{aa}(x,y)\big|_{y=x} + C(N) F^2(x) \right) d^4x \int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{s} + \dots.$$

Вычисляя с помощью (1.5) и свойства

$$\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu = F_{\mu\nu} \tag{1.8}$$

производную $\nabla^4 a_0^{aa}(x,y)\big|_{y=x}$, получаем, что

$$\nabla^4 a_0^{aa}(x,y)\big|_{y=x} = -\frac{1}{2}\, C(N) F^2(x).$$

Производя регуляризацию $\int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{s} = 2 \ln \frac{\Lambda}{M}$, где $\Lambda \to +\infty$ – импульс обрезания, а M – масштабный параметр теории с размерностью импульса, получаем

$$S^{\text{eff}} = \frac{1}{g^2}\, S_{\text{cl}} + \frac{1}{(4\pi)^2} \cdot \frac{11}{6}\, C(N) \int\limits_{\mathbb{R}^4} F^2(x) d^4x \cdot \ln \frac{\Lambda}{M}.$$

Наконец, вспоминая, что в теории Янга–Миллса

$$S_{\text{cl}} = -\frac{1}{4} \int\limits_{\mathbb{R}^4} F^2(x) d^4x,$$

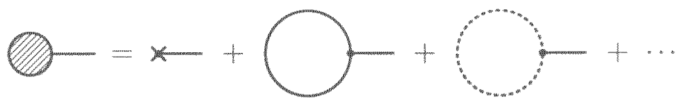
окончательное выражение запишем в виде

$$S^{\text{eff}} = \frac{1}{g^2} \Big(1 - \frac{22}{3}\, g^2\, L \Big) S_{\text{cl}}, \tag{1.9}$$

где введено обозначение $L = \frac{C(N)}{(4\pi)^2} \ln \frac{\Lambda}{M}$.

2. Квантовые уравнения движения

Определим полную одночастичную вершинную функцию $\mathfrak{J}_\mu^a(x)$ ("головастик") как сумму вкладов соответствующих одночастично неприводимых диаграмм:



первое слагаемое равно $1/g \cdot \nabla_\nu F^a_{\nu\mu}(x)$, оно не обращается в ноль, поскольку теперь фоновое поле B не предполагается классическим; второе и третье слагаемые содержат тройные векторную и вектор-ду́ховую вершины, которые соответствуют выражению

$$-gf^{abc} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \Big[\big(\nabla_\mu Q^a_\nu(x)\big) Q^b_\mu(x) Q^c_\nu(x) + \big(\nabla_\mu \overline{c}^a(x)\big) Q^b_\mu(x) c^c(x) \Big] d^4x \quad (2.1)$$

в действии Фаддеева–Попова.

Квантовые уравнения движения представляют собой условия равенства нулю введенной вершинной функции

$$\mathfrak{J}^a_\mu(x) = 0. \quad (2.2)$$

Данный подход в квантовой теории поля был сравнительно недавно предложен Л. Д. Фаддеевым. В настоящее время готовится к печати его работа, посвященная квантовым уравнениям движения в теории Янга–Миллса.

Необходимо вычислить однопетлевые поправки. Сначала выпишем выражение для $\mathfrak{J}^a_\mu(x)$, которое получается из (2.1) согласно теореме Вика:

$$\mathfrak{J}^a_\mu(x) = \frac{1}{g} \nabla_\nu F^a_{\nu\mu}(x) + gf^{abc} \Big[\nabla_\nu H^{bc}_{\nu\mu}(x,x) + \\ + \nabla_\mu H^{bc}_{\nu\nu}(x,y)\big|_{y=x} - \nabla_\nu H^{bc}_{\mu\nu}(x,y)\big|_{y=x} + \nabla_\mu G^{bc}(x,y)\big|_{y=x} \Big] \quad (2.3)$$

(здесь H и G – калибровочная и ду́ховая функции Грина соответственно).

Сосчитаем бесконечную часть (2.3), для чего используем разложение функции Грина в окрестности диагонали

$$H^{bc}_{\mu\nu}(x,y) = p_0(x,y) a^{bc}_0(x,y) \delta_{\mu\nu} + p_1(x,y) a^{bc}_{1\mu\nu}(x,y) + \dots,$$
$$G^{bc}(x,y) = p_0(x,y) a^{bc}_0(x,y) + p_1(x,y) a^{bc}_1(x,y) + \dots.$$

Функции p_0, p_1 непосредственно определяются из представления для функций Грина в методе собственного времени

$$\begin{matrix} G \\ H \end{matrix}(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} \theta_{\substack{\mathrm{G} \\ \mathrm{F}}}(x,y,s)\, ds$$

и структуры коэффициентов анзаца (1.4); получается

$$p_0(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{(x-y)^2}, \quad p_1(x,y) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \cdot \ln \frac{(x-y)^2}{M^2}.$$

Вводя регуляризацию $x - y\big|_{y=x} \sim 1/\Lambda$ и выбрасывая из рассмотрения константы, определяем

$$\mathfrak{J}^a_\mu(x) =$$
$$= \frac{1}{g}\,\nabla_\nu F^a_{\nu\mu} + \frac{2gf^{abc}}{(4\pi)^2}\left[3f^{bkc}\nabla_\nu F^k_{\mu\nu}(x) + 2\nabla_\mu \nabla^2 a^{bc}_0(x,y)\big|_{y=x}\right] \ln\frac{\Lambda}{M}.$$

Из (1.5) и (1.8) получаем, что

$$\nabla_\mu \nabla^2 a^{bc}_0(x,y)\big|_{y=x} = -\frac{1}{3} f^{bkc}\nabla_\nu F^k_{\mu\nu}(x)$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{J}^a_\mu(x) = \frac{1}{g}\Big(1 - \frac{14}{3}\,g^2\,L\Big)\nabla_\nu F^a_{\nu\mu}(x). \tag{2.4}$$

3. Сравнение перенормировок квантовых уравнений движения и эффективного действия

Формулы (1.9) и (2.4) показывают, что перенормировки бесконечных частей эффективного действия и квантовых уравнений движения не совпадают. Однако, структура (2.2) квантовых уравнений движения допускает произвол в умножении функции $\mathfrak{J}^a_\mu(x)$ на произвольную перенормировочную константу. Выясним, какой должна быть константа Z, обеспечивающая совпадение перенормировок в однопетлевом приближении:

$$Z \cdot \mathfrak{J}^a_\mu(x) = Z \cdot \frac{1}{g}\Big(1 - \frac{14}{3}\,g^2\,L\Big)\nabla_\nu F^a_{\nu\mu}(x) =$$

$$= \frac{1}{g}\Big(1 - \frac{22}{3}\,g^2\,L\Big)\nabla_\nu F^a_{\nu\mu}(x)\big(=0\big).$$

Очевидно, что если ограничиваться рассмотрением лишь однопетлевого приближения, то дополнительная перенормировочная константа должна иметь вид[1]

$$Z = 1 - \frac{8}{3} g^2 L. \tag{3.1}$$

Посмотрим, не возникает ли естественным путем эта константа при более детальном анализе перенормировок теории Янга–Миллса. При этом мы примем, что между эффективным действием и квантовыми уравнениями движения существует вариационная связь.

В стандартной теории перенормировок (см. [6]) калибровочное поле и константа связи преобразуются следующим образом:

$$A \mapsto z_1 z_2^{-1} A; \tag{3.2a}$$

$$g \mapsto z_1 z_2^{-3/2} g, \tag{3.2b}$$

где

$$z_1 = 1 + \frac{4}{3} g^2 L; \tag{3.3a}$$

$$z_2 = 1 + \frac{10}{3} g^2 L, \tag{3.3b}$$

причем z_2 отвечает за перенормировку действия как целого. Такая перенормировка является корректной, если считать, что поле A в действии заменено на

$$\widetilde{A} = z_1 z_2^{-1} \tag{3.4}$$

($\widetilde{A}$ также перенормируется по закону (3.2a)).

Квантовые уравнения движения получаются из действия применением оператора

$$g \cdot \frac{\delta}{\delta A}. \tag{3.5}$$

[1] На самом деле следует иметь в виду, что подобное умножение изменяет бесконечные части в старших порядках разложения по петлям, поэтому для корректного учета этих изменений константу необходимо доопределить:

$$Z = 1 + b_1 g^2 + b_2 g^4 + \dots .$$

Выясним, как перенормируется оператор $\frac{\delta}{\delta A}$; учитывая (3.4) и (3.2a), имеем

$$\frac{\delta}{\delta A} = z_1 z_2^{-1} \frac{\delta}{\delta \widetilde{A}} = z_1^2 z_2^{-2} \frac{\delta}{\delta \widetilde{A}'} \tag{3.6}$$

(штрихом обозначена правая часть (3.2)).

Далее, переход к формализму фонового поля осуществляется путем представления

$$\widetilde{A} = B + gQ. \tag{3.7}$$

Из (3.7) и (3.2a) следует, что “квантовое” поле Q перенормируется по закону

$$Q \mapsto z_2^{1/2} Q, \tag{3.8}$$

следовательно, необходимо внести в (3.6) дополнительный фактор $z_2^{1/2}$:

$$\frac{\delta}{\delta A} \mapsto z_1^2 z_2^{-3/2} \frac{\delta}{\delta \widetilde{A}'}.$$

Получается, что выражение для полной одночастичной вершины (2.4) в однопетлевом приближении снабжается фактором $z_1^2 z_2^{-3/2}$. После этого произведем еще одно преобразование – домножим получившееся на множитель, отвечающий за перенормировку “волновых функций” $\widetilde{A}$ – (3.2a) и Q – (3.8), т.е. на $z_1 z_2^{-1/2}$; получается

$$\mathfrak{J}_\mu^a(x) \mapsto z_1^3 z_2^{-2} \mathfrak{J}_\mu^a(x)$$

(фактор g в (3.5) сокращает одну степень g в (1.9), так и получается (2.4)). Вспоминая структуру (3.3) и (3.1), находим, что

$$z_1^3 z_2^{-2} = Z,$$

следовательно,

$$\mathfrak{J}'^a_\mu(x) = \frac{1}{g}\Big(1 - \frac{22}{3} g^2 L\Big) \nabla_\nu F^a_{\nu\mu}(x).$$

Перенормировка константы связи в полученной формуле совпадает с (1.9).

В заключение автор выражает благодарность академику РАН Л. Д. Фаддееву за осуществление научного руководства и за идею написания данной статьи.

Литература

1. П. Рамон, *Теория поля. Современный вводный курс*. Мир, М., 1984.
2. L. D. Faddeev, V. N. Popov. — Phys. Lett. **B 25** (1967), 30.
3. V. A. Fock. — Sow. Phys. **12** (1937), 404 (пер. на русск. [7, с. 141]).
4. J. Schwinger. — Phys. Rev. **82** (1951), 664.
5. B. S. De Witt. — In: Relativity, Groups, and Topology, B. S. De Witt and C. De Witt (eds.), Gordon and Breach, New York (1965), p. 19.
6. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*. Наука, М., 1978.
7. В. А. Фок, *Работы по квантовой теории поля*. Изд. ЛГУ, Л., 1957.

Bagaev A. A. Renormalization of the quantum equation of motion for Yang–Mills fields in background formalism.

The aim of this work is to compare renormalizations of the infinite parts of the Effective Action and Quantum Equation of Motion in gauge fields theory with $SU(N)$ as a structural group in the One-Loop Approach and to make sure that they do not coincide. To this end, we use the Background Formalism, in which a gauge field is decomposed into the sum of a classical (background) and a quantum field: $A = B + gQ$. The appearance of an additional factor, which provides the recovery of the equality of renormalizations of Equations and Action, is explained with the help of comparison with results of the standard renormalization theory of Yang–Mills fields.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 27 июня 2005 г.