Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 325, 2005 г.

А. М. Вершик, Н. В. Цилевич

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ НА БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЕ

1. Введение

Двойственность между пространствами функций на группе и пространствами тех или иных объектов на множестве ее неприводимых представлений всегда являлась предметом особого внимания специалистов по теории представлений и анализу, и ей посвящены сотни работ. В случае коммутативных групп имеется детально разработанная каноническая теория, которая непосредственно обобщает теорию классических рядов и интегралов Фурье, – она использует теорию характеров коммутативных локально компактных групп.

Для некоммутативных групп, где неприводимые представления уже необязательно одномерны, бесспорного и общепринятого кандидата на роль теории Фурье нет, и имеется много различных вариантов обобщений. Некоторые аналогичные коммутативному случаю факты и понятия, такие, как мера и формула Планшереля, теорема Бохнера, центральные функции и др., давно изучены и широко используются, но они далеко не исчерпывают вопроса. Точка зрения, согласно которой операторнозначные функции на множестве неприводимых представлений (или сечения некоторых тавтологических расслоений над этим множеством) и есть преобразования Фурье функций на группе, слишком буквально обобщает коммутативную ситуацию и не приводит сама по себе к каким-либо содержательным результатам в конкретных случаях.

В настоящей работе изложен первый набросок обобщения теории Фурье для конечных и бесконечных симметрических групп. В основе нашего обобщения лежит тот факт, что в группе имеется индуктивное (возрастающее) семейство подгрупп и имен-

Работа выполнена при поддержке грантов НШ-2251.2003.1 Президента РФ для поддержки ведущих научных школ, CRDF RUM1-2622-ST-04, РФФИ 05-01-00899 и INTAS 03-51-5018.

но поэтому возникают дополнительные структуры – алгебра Гельфанда–Цетлина, таблицы и диаграммы Юнга и т.д. Несомненно, аналогичную теорию можно развить для других индуктивных семейств групп, но здесь мы ограничиваемся лишь симметрическими группами.

Мы не приводим здесь всех хорошо известных определений, их можно найти в учебниках и статьях, указанных в списке литературы. Однако, подробно излагаются относительно новые понятия, разработанные в последние годы. Поскольку эта работа будет продолжена в последующих статьях о преобразвании Фурье на симметрических группах и других классических сериях групп, мы не приводим здесь все ссылки и описание всех связей, ограничиваясь лишь первыми необходимыми определениями. Укажем лишь, что этот цикл естественно продолжает и использует ряд работ первого автора и С. В. Керова (см., например, [13]), начатых около 30 лет назад и посвященных асимптотической теории представлений и индуктивному подходу к этой теории, а также последующие работы Г. И. Ольшанского и других, примыкающие к той же теме (см., например, [8, 7]).

В качестве двойственного пространства к симметрической группе предлагается пространство (группоид) битаблиц Юнга, т.е. пространство пар таблиц с одинаковой диаграммой. Фактически это есть пространство матричных элементов в некотором специальном базисе – базисе Гельфанда–Цетлина – всех неприводимых представлений. Поэтому преобразование Фурье функции на группе по определению есть функция на битаблицах, и вместо матричнозначных функций на неприводимых представлениях мы рассматриваем сами матричные элементы в выбранном базисе как скалярные функции. Группоид битаблиц снабжен так называемой полной мерой Планшереля, и формула Планшереля задает изометрию двух гильбертовых пространств L^2 – на группе с мерой Хаара и на группоиде битаблиц с полной мерой Планшереля.

Замечательным образом, эти формулировки распространяются на бесконечную симметрическую группу. Заметим, что пространство классов неприводимых представлений этой группы необозримо, и поэтому обычную (операторнозначную) версию двойственности невозможно даже сформулировать. Предлагаемые же формулировки позволяют ставить вопрос о преобразовании Фурье классов тех или иных функций на группе и др. Решающую роль играет максимальная коммутативная алгебра Гельфанда–Цетлина, диагонализуемая во всех представлениях.

В более общем контексте индуктивных пределов групп и алгебр, равно как и в случае симметрических групп, мы обращаем внимание на проективные пределы групп и алгебр относительно тех или иных условных ожиданий (необязательно положительных). Впервые для симметрической группы нетривиальный пример таких ожиданий и пределов рассмотрен в [4, 5] (виртуальные подстановки). В теории преобразования Фурье проективные пределы приводят к теории мартингалов на некоммутативных группоидах, которая, видимо, не изучалась ранее.

2. Симметрические группы $\mathfrak{S}_n$

Классическая теория представлений конечных симметрических групп изложена, например, в монографиях [2, 1]; в них также можно найти ссылки на другие источники по этой теме. В работе [15] (см. также [16]) изложен новый подход к этой теории, систематически использующий алгебры Гельфанда–Цетлина и элементы Юнга–Юциса–Мерфи, в котором диаграммы и таблицы Юнга и правило ветвления представлений возникают естественным образом. Классическая ("операторнозначная") теория преобразования Фурье на конечных группах изложена, например, в [3]. Заметим, что имеется также удивительная биекция ("комбинаторное преобразование Фурье") между элементами симметрической группы и битаблицами, называемое соответствием Робинсона–Шенстеда–Кнута (RSK-соответствием); см. [11].

2.1. Основные определения и обозначения.

Пусть $\mathfrak{S}_n$ – симметрическая группа степени n, $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ – групповая алгебра группы $\mathfrak{S}_n$ и m_n – считающая мера на этой группе: $m_n(w) = 1$, $w \in \mathfrak{S}_n$.

Обозначим через $\mathbb{Y}_n$ множество диаграмм Юнга с n клетками (по определению будем считать, что $\mathbb{Y}_0$ состоит из единственной пустой диаграммы $\emptyset$). Это множество параметризует неприводимые представления группы $\mathfrak{S}_n$. Обозначим через π_λ неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{S}_n$, соответствующее диаграмме $\lambda \in \mathbb{Y}_n$, через χ_λ – характер представления π_λ и через $\dim\lambda$ – размерность представления π_λ.

Граф Юнга $\mathbb{Y}$, являющийся графом ветвления неприводимых представлений симметрических групп, определяется следующим образом: множество вершин графа $\mathbb{Y}$ есть $\cup_n \mathbb{Y}_n$, и две вершины $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ и $\mu \in \mathbb{Y}_{n-1}$ соединены ребром, если $\mu \subset \lambda$.

Обозначим через $T(\lambda)$ множество таблиц Юнга формы $\lambda \in \mathbb{Y}_n$, т.е. множество путей в графе Юнга от $\emptyset$ до λ. Это множество состоит из $\dim \lambda$ элементов. Для таблицы $t \in T(\lambda)$ положим $\dim t = \dim \lambda$. Пусть $T_n = \cup_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} T(\lambda)$ – множество таблиц Юнга с n клетками, т.е. множество путей длины n в графе Юнга.

Согласно правилу ветвления неприводимых представлений симметрических групп, каждой таблице Юнга $t \in T(\lambda)$ соответствует одномерное подпространство в пространстве V_λ представления π_λ. Выберем единичный вектор h_t в этом подпространстве. Полученный базис $\{h_t;\ t \in T(\lambda)\}$ в пространстве V_λ называется *базисом Гельфанда–Цетлина*.

Пусть $B_n = \{(s,t):\ s,t \in T_n \text{ одинаковой формы}\}$ – пространство битаблиц (петель) размера n, т.е. множество пар путей длины n в графе Юнга, заканчивающихся в одной и той же вершине. Ясно, что если $(s,t) \in B_n$, то $\dim s = \dim t$.

2.2. Мера Планшереля.

Существуют три тесно связанные между собою меры – на пространстве диаграмм Юнга, на пространстве таблиц и на пространстве битаблиц – которые мы будем называть мерами Планшереля.

Наиболее классической является *мера Планшереля на пространстве* $\mathbb{Y}_n$ *диаграмм Юнга* с n клетками, т.е. пространстве неприводимых представлений группы $\mathfrak{S}_n$, которая задается формулой

$$\mathrm{Pl}_n(\{\lambda\}) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!}, \qquad \lambda \in \mathbb{Y}_n.$$

Это вероятностная мера, как следует из классической формулы Бернсайда:

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \frac{\dim^2 \lambda}{n!} = 1.$$

Если теперь рассмотреть меру на пространстве таблиц T_n, проекция которой на $\mathbb{Y}_n$ есть мера Планшереля Pl_n, а распределение на множестве $T(\lambda)$ таблиц формы λ при фиксированной диаграмме λ равномерно, то мы получим *меру Планшереля на* *пространстве таблиц* T_n, которую будем обозначать тем же символом; очевидно, что это тоже вероятностная мера, задаваемая формулой

$$\mathrm{Pl}_n(\{t\}) = \frac{\dim t}{n!}, \qquad t \in T_n.$$

Наконец, *мерой Планшереля на пространстве битаблиц* B_n называется мера, задаваемая формулой

$$\mu_n\{(s,t)\} = \frac{\dim s}{n!}.$$

Это определение мотивировано группоидной структурой на пространстве битаблиц. А именно, если ввести на B_n структуру главного группоида с диагональю T_n так, как это сделано для бесконечного случая в разделе 5.2, то μ_n есть в точности мера, индуцированная мерой Планшереля Pl_n на диагонали T_n. Иными словами, проекция меры μ_n на первую компоненту s есть мера Планшереля Pl_n на таблицах, а условная мера на второй компоненте t при фиксированной первой компоненте s есть считающая мера. Ясно, что мера Планшереля на битаблицах *не является нормированной*:

$$\sum_{(s,t)\in B_n} \mu_n\{(s,t)\} = \sum_{(s,t)\in B_n} \frac{\dim t}{n!} = \sum_{\lambda\in B_n} \frac{\dim^3\lambda}{n!} \to \infty \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Как мы увидим в разделе 5.1, именно эта мера является аналогом “правильной” меры Планшереля для бесконечной симметрической группы.

2.3. Преобразование Фурье на конечной симметрической группе.

Определение 1. *Преобразованием Фурье на симметрической группе* $\mathfrak{S}_n$ *называется оператор, сопоставляющий функции* $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ *функцию* $\widehat{f} \in \mathbb{C}(B_n)$, *где*

$$\widehat{f}(s,t) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_n} f(w)\overline{(\pi_\lambda(w)h_t, h_s)}; \quad (s,t)\in B_n. \tag{1}$$

Эту формулу можно понимать следующим образом. Обозначим через $\operatorname{End} V_\lambda$ алгебру матриц в пространстве V_λ представления π_λ с выделенным базисом, состоящим из матричных элементов относительно базиса Гельфанда–Цетлина. Заметим, что эта алгебра, рассматриваемая как подалгебра всей групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ симметрической группы, есть минимальный двусторонний идеал. Представление π_λ продолжается по линейности на групповую алгебру $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$. Поэтому каждой функции $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ соответствует матрица $\pi_\lambda(f) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_n} f(w)\pi_\lambda(w)$ из $\operatorname{End} V_\lambda$. Мы можем определить *матричную форму преобразования Фурье* функции f как матрицу $\hat{f}(\lambda) \in \operatorname{End} V_\lambda$, сопряженную (в смысле матричного сопряжения) к $\pi_\lambda(f)$:

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_n} f(w)\pi^*_\lambda(w), \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n. \tag{2}$$

Таким образом, матричная форма преобразования Фурье сопоставляет функции $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ функцию $\hat{f}$ на множестве диаграмм $\mathbb{Y}_n$, где $\hat{f}(\lambda)$ принимает значения в $\operatorname{End} V_\lambda$. Определенные выше значения $\hat{f}(s,t)$ суть матричные элементы матрицы $\hat{f}(\lambda)$ в базисе Гельфанда–Цетлина. Такую форму преобразования Фурье будем называть *табличной*.

Формула обращения для преобразования Фурье имеет вид

$$f(w) = \sum_{(s,t)\in B_n} \hat{f}(s,t)(\pi^\lambda(w)h_t, h_s)\mu_n(s,t), \qquad w \in \mathfrak{S}_n, \tag{3}$$

или, в матричной форме,

$$f(w) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} \frac{\dim\lambda}{n!}\operatorname{tr}(\hat{f}(\lambda)\pi_\lambda(w)), \qquad w \in \mathfrak{S}_n.$$

Преобразование Фурье устанавливает изометрию между пространствами $L^2(\mathfrak{S}_n, m_n)$ и $L^2(B_n, \mu_n)$, а именно, имеет место следующая *формула Планшереля*:

$$\sum_{w\in\mathfrak{S}_n} f(w)\overline{g(w)} = \sum_{(s,t)\in B_n} \widehat{f}(s,t)\overline{\widehat{g}(s,t)}\mu_n(s,t).$$

Свертку функций на $\mathfrak{S}_n$ преобразование Фурье переводит в матричное умножение:

$$\widehat{(f*g)}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda);$$

в координатной форме:

$$\widehat{(f*g)}(s,t) = \sum_{r\sim s} \hat{f}(s,r)\hat{g}(r,t).$$

2.4. Преобразование Фурье центральных функций.

Обозначим через $Z[\mathfrak{S}_n]$ центр групповой алгебры $\mathfrak{S}_n$, т.е. множество центральных функций на симметрической группе $\mathfrak{S}_n$. Для центральных функций $f \in Z[\mathfrak{S}_n]$ оператор $\pi_\lambda(f) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w)\pi_\lambda(w)$ есть скалярный оператор на V_λ, так что в матричной форме преобразование Фурье центральной функции f имеет вид

$$\hat{f}(\lambda) = \left(\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w) \frac{\chi^\lambda(w)}{\dim \lambda} \right) E_\lambda, \qquad t \in T(\lambda),$$

где E_λ – единичный оператор в V_λ. В табличной форме: функция $\hat{f}$ сосредоточена на диагонали $\{(t,t),\ t \in T_n\}$, причем ее значение на битаблице $(t,t) \in \lambda$ зависит только от λ. Такие функции на пространстве битаблиц будем называть центральными.

Итак, *преобразования Фурье центральных функций на* $\mathfrak{S}_n$ *можно отождествить с функциями на множестве* $\mathbb{Y}_n$ *диаграмм Юнга с* n *клетками*. Формула обращения для центральных функций принимает вид

$$f(w) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \chi^\lambda(w) \hat{f}(\lambda) \frac{\dim \lambda}{n!};$$

в частности,

$$f(e) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \hat{f}(\lambda) \frac{\dim^2 \lambda}{n!}; \tag{4}$$

а формула Планшереля соответственно имеет вид

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w)\overline{g(w)} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \hat{f}(\lambda)\overline{\hat{g}(\lambda)} \frac{\dim^2 \lambda}{n!}.$$

В частности, преобразованием Фурье неприводимого характера χ^λ является функция

$$\widehat{\chi^\lambda}(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu \neq \lambda, \\ \frac{n!}{\dim \lambda}, & \mu = \lambda. \end{cases}$$

Заметим (см. [6]), что имеется каноническое соответствие (характеристическое отображение) между центральными функциями на симметрических группах и симметрическими функциями.

2.5. Алгебры Гельфанда–Цетлина и элементы Юнга–Юциса–Мерфи.

Ключевую роль в индуктивном построении теории представлений симметрических групп [15] (см. также [16]) играют алгебры Гельфанда–Цетлина и элементы Юнга–Юциса–Мерфи.

Алгеброй Гельфанда–Цетлина группы $\mathfrak{S}_n$ называется подалгебра $\mathrm{GZ}(n) \subset \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, порожденная центрами $Z[\mathfrak{S}_1], Z[\mathfrak{S}_2], \dots, Z[\mathfrak{S}_n]$. Это максимальная коммутативная подалгебра групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$. А именно, это алгебра всех операторов, диагональных в базисе Гельфанда–Цетлина.

Таким образом, преобразованием Фурье элемента алгебры Гельфанда–Цетлина является функция, сосредоточенная на диагонали T_n.

Элементами Юнга–Юциса–Мерфи (*YJM-элементами*) называются следующие элементы $X_k \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, $k = 1, \dots, n$:

$$X_k = (1\,k) + (2\,k) + \ldots + (k-1\,k)$$

(как обычно, через (i,j) обозначается транспозиция, переставляющая элементы i и j). YJM-элементы образуют мультипликативный базис алгебры Гельфанда–Цетлина $\mathrm{GZ}(n)$.

Преобразование Фурье YJM-элемента X_k в матричной форме сопоставляет диаграмме λ диагональную матрицу из $\operatorname{End} V_\lambda$, у которой диагональный элемент, соответствующий таблице $t \in \lambda$, равен содержанию[1] $c_k(t)$ той клетки таблицы t, в которой стоит элемент k. Таким образом, множество таких диагональных матриц с диагональными элементами, равными содержаниям таблиц, образует мультипликативный базис в алгебре всех диагональных матриц, являющейся преобразованием Фурье алгебры Гельфанда–Цетлина. В табличной форме преобразование Фурье YJM-элемента X_k есть функция на битаблицах, задаваемая формулой

$$\widehat{X_k}(t,s) = \begin{cases} c_k(t), & \text{если } s = t, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

3. Бесконечная симметрическая группа $\mathfrak{S}_\infty$

Необходимые сведения из теории представлений бесконечной симметрической группы могут быть найдены, например, в [14].

[1] Напомним, что содержанием клетки $\square$ диаграммы Юнга, стоящей в i-й строке и j-м столбце, называется число $c(\square) = i - j$.

Пусть $\mathfrak{S}_\infty = \cup_{n=1}^\infty \mathfrak{S}_n = \varinjlim \mathfrak{S}_n$ – бесконечная симметрическая группа с фиксированной структурой индуктивного предела, и пусть $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$ – групповая алгебра группы $\mathfrak{S}_\infty$.

Обозначим через $T = \varprojlim T_n$ пространство бесконечных таблиц, т.е. пространство бесконечных путей в графе Юнга.

Хвостовое отношение эквивалентности $\sim$ на T определяется следующим образом: пути $s = (s_1, s_2, \ldots)$ и $t = (t_1, t_2, \ldots)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $s_k = t_k$ начиная с некоторого места. Аналогично определяется отношение n-эквивалентности на T: $s \sim_n t$ тогда и только тогда, когда $s_k = t_k$ при $k \geqslant n$.

Рассмотрим пространство $\mathcal{B} = \{(s,t) : \ s,t \in T, \, s \sim t\}$ бесконечных битаблиц (петель) с топологией индуктивного предела $\mathcal{B} = \varinjlim \mathcal{B}_n$, где $\mathcal{B}_n = \{(s,t) : \ s,t \in T, \, s \sim_n t\}$. Таким образом, $\mathcal{B}$ есть сепарабельное, вполне несвязное, локально компактное пространство, и его диагональ $\mathcal{B}_0 = \{(t,t), \, t \in T\}$ гомеоморфна пространству таблиц T.

Преобразование Фурье устанавливает канонический изоморфизм между групповой алгеброй $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$ бесконечной симметрической группы и $*$-алгеброй $\mathbb{C}(\mathcal{B})$ локально постоянных финитных функций на пространстве битаблиц $\mathcal{B}$ с умножением, задаваемым сверткой

$$fg(s,t) = \sum_{r \sim t} f(s,r) g(r,t), \tag{5}$$

и инволюцией

$$f^*(s,t) = \overline{f(t,s)}.$$

При этом алгебра Гельфанда–Цетлина бесконечной симметрической группы $\mathrm{GZ}(\infty)$ (т.е. подалгебра в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$, порожденная всеми центрами $Z[\mathfrak{S}_1], Z[\mathfrak{S}_2], \ldots, Z[\mathfrak{S}_n], \ldots$) переходит в коммутативную подалгебру функций с носителем на диагонали $\mathcal{B}_0$.

Центральной мерой на пространстве путей T называется мера M, для которой мера любого цилиндра $M(\{t : [t]_n = s\})$, где $[t]_n$ – начальный отрезок длины n пути t, а s – фиксированная таблица из T_n, зависит только от формы таблицы s. Копереходные вероятности $\mathrm{Prob}\{[t]_n = s \,|\, [t]_{n+1} = u\}$ одинаковы для всех центральных мер и зависят только от графа.

Мера Планшереля на пространстве бесконечных таблиц (т.е. бесконечных путей в графе Юнга) T есть марковская центральная мера μ с переходными вероятностями

$$p_\infty(s,u) = \frac{\dim u}{(n+1)\dim s}, \quad s \in T_n,\ u \in T_{n+1}, \tag{6}$$

и начальным распределением, сосредоточенным на единственной одноклеточной таблице. Таким образом, на цилиндрических множествах мера μ задается следующим образом:

$$\mu(\{t \in T : [t]_n = s\}) = \frac{\dim s}{n!},$$

где $[t]_n$ – начальный отрезок длины n пути t, а s – фиксированная таблица из T_n.

4. Планшерелевское ожидание

4.1. Определение планшерелевского ожидания.

Пусть i_n – каноническое вложение $\mathfrak{S}_n$ в $\mathfrak{S}_{n+1}$. Той же буквой будем обозначать соответствующее вложение групповых алгебр $i_n : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$. Элементы групповой алгебры будем рассматривать как *меры* на группе и соответственно записывать их в виде $\sum_w f_w \delta_w$. Тогда вложение i_n имеет вид

$$(i_n f)_u = \begin{cases} f_u, & u \in \mathfrak{S}_n, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \qquad f = \sum_{w \in \mathfrak{S}_{n+1}} f_w \delta_w \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}], \quad u \in \mathfrak{S}_n,$$

т.е. $i_n(\sum_{w\in\mathfrak{S}_{n+1}} f_w\delta_w) = \sum_{u\in\mathfrak{S}_{n+1}} f_u\delta_u$.

Рассмотрим сопряженный к i_n оператор $p_n = i_n^*$ (относительно скалярных произведений в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ и $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$, задаваемых мерами m_n и m_{n+1} соответственно). При этом элементы двойственных пространств к групповым алгебрам (разумеется, изоморфных самим групповым алгебрам) будем рассматривать как *функции* на группах и использовать для них функциональную запись. Проектор $p_n : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}] \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ имеет вид

$$(p_n f)(w) = f(w), \quad f \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}],\ w \in \mathfrak{S}_n.$$

Таким образом, p_n есть просто ограничение на подгруппу.

Нетрудно убедиться, что p_n есть положительное условное математическое ожидание[2] из алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$ на подалгебру $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

Напомним (см. [12]), что произвольное положительное условное математическое ожидание из алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$ на подалгебру $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ задается набором неотрицательных чисел $a_{\mu\lambda}$, $\mu \in \mathbb{Y}_n$, $\lambda \in \mathbb{Y}_{n+1}$, таких, что $\sum_{\lambda:\mu\subset\lambda} a_{\mu\lambda} = 1$ для всякого μ. Определенное выше условное ожидание p_n соответствует планшерелевским коэффициентам $a_{\mu\lambda} = p_\infty(\mu,\lambda) = \frac{\dim\lambda}{(n+1)\dim\mu}$, поэтому естественно называть его *планшерелевским условным ожиданием*.

Индуктивный предел групповых алгебр $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ относительно вложений i_n есть групповая алгебра бесконечной симметрической группы:

$$\varinjlim(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], i_n) = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty].$$

Проективный предел групповых алгебр $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ (рассматриваемых как пространства функций на группах) относительно условных ожиданий p_n есть пространство произвольных функций на бесконечной симметрической группе:

$$\varprojlim(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], p_n) = \mathbb{F}(\mathfrak{S}_\infty).$$

4.2. Описание планшерелевского условного ожидания в преобразовании Фурье.

Нетрудно подсчитать, что под действием преобразования Фурье вложение i_n переходит в оператор (для простоты мы будем обозначать его той же буквой) $i_n : \mathbb{C}(B_n) \to \mathbb{C}(B_{n+1})$, где для $f \in \mathbb{C}(B_n)$, $(s,t) \in B_{n+1}$

$$(i_n f)(s,t) = \begin{cases} f([s]_n, [t]_n), & \text{если } s \sim_n t, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Планшерелевское условное ожидание переходит в оператор $p_n : \mathbb{C}(B_{n+1}) \to \mathbb{C}(B_n)$, где для $f \in \mathbb{C}(B_{n+1})$, $(s,t) \in B_n$

$$(p_n f)(s,t) = \sum_{(u,v)\in B_{n+1}:(s,t)\nearrow(u,v)} p_\infty(s,u) f(u,v); \tag{7}$$

[2]Относительно понятия условного математического ожидания из C^*-алгебры на ее C^*-подалгебру, см., например, [9]; отметим, что в классическом варианте рассматриваются только положительные ожидания; относительно неположительных ожиданий см. [12] и раздел 7.1.

здесь $p_\infty(s,u)$ – планшерелевская переходная вероятность (6), а запись $(s,t) \nearrow (u,v)$ означает, что пара путей (s,t) получается из пары путей (u,v) отбрасыванием последней вершины.

Индуктивный предел пространств $\mathbb{C}(B_n)$ относительно операторов i_n есть пространство финитных функций на пространстве бесконечных битаблиц $\mathcal{B}$:

$$\varinjlim(\mathbb{C}(B_n), i_n) = \mathbb{C}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{B}).$$

Наша ближайшая цель состоит в описании проективного предела пространств $\mathbb{C}(B_n)$ относительно планшерелевских условных ожиданий p_n.

5. Полная мера Планшереля и проективный предел пространств $\mathbb{C}(B_n)$ относительно планшерелевских условных ожиданий

5.1. Полная мера Планшереля.

Традиционно мерой Планшереля, связанной с бесконечной симметрической группой, называют меру Планшереля на пространстве бесконечных таблиц T, введенную в разделе 3. Однако "настоящей" мерой Планшереля для бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$ является мера на пространстве битаблиц $\mathcal{B}$, которую мы введем в этом разделе. Именно для этой меры выполнена теорема Планшереля, т.е. преобразование Фурье устанавливает изометрию между пространством квадратично интегрируемых функций на $\mathfrak{S}_\infty$ относительно считающей меры и пространством квадратично интегрируемых функций на $\mathcal{B}$ относительно этой меры Планшереля (теорема 2).

Для произвольной таблицы $t \in T$ обозначим через $G^t = \{(t,\cdot) \in \mathcal{B}\}$ счетное множество битаблиц с первой компонентой, равной t. Пусть λ^t – считающая мера на множестве G^t.

Определение 2. *Полной мерой Планшереля на пространстве битаблиц $\mathcal{B}$ называется σ-конечная мера*

$$\tilde{\mu} = \int\limits_T \lambda^t \, d\mu(t).$$

Иными словами, это мера, проекция которой на первую компоненту совпадает с мерой Планшереля μ на пространстве таблиц T, а *условное распределение на второй компоненте при фиксированной первой компоненте есть считающая мера.*

В разделе 5.2 объяснено, что это определение непосредственно связано с группоидной структурой на пространстве битаблиц, и правильно понимать его именно таким образом. С другой стороны, в некоторых случаях удобно использовать следующее явное описание полной меры Планшереля.

Пусть $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ – дизъюнктное объединение конечных петель. Назовем конечную битаблицу $(a,b) \in B$ *собственной*, если $(a,b) \in B_n$ и при этом $a \nsim_{n-1} b$ (т.е. $([a]_{n-1},[b]_{n-1}) \notin B_{n-1}$). При этом единственный элемент первого этажа по определению считаем собственной битаблицей. Обозначим через $B_{\mathrm{prop}} \subset B$ множество всех собственных битаблиц.

Определено естественное отображение $P : \mathcal{B} \to B_{\mathrm{prop}}$, где $P(s,t) = ([s]_n,[t]_n)$, если $s \sim_n t$, но $s \nsim_{n-1} t$. При этом, если $a,b \in T(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Y}_n$, то множество $T_{(a,b)} = P^{-1}(a,b)$ естественно отождествляется с множеством T_λ бесконечных путей в графе Юнга, начинающихся с вершины λ. (В частности, пространство $T_{(1,1)}$, где $(1,1)$ – единственная петля первого этажа, естественно отождествляется с пространством T всех бесконечных путей в графе Юнга.) Таким образом, мы имеем естественное разложение

$$\mathcal{B} = \bigcup_{(a,b)\in B_{\mathrm{prop}}} T_{(a,b)}.$$

На множестве $T_{(a,b)} \simeq T_\lambda$ имеется распределение $\mu_{(a,b)} = \mu_\lambda$, индуцированное мерой Планшереля μ на T, которое есть просто распределение случайного блуждания на T, начинающегося с вершины λ и имеющего планшерелевские переходные вероятности (6). Полная мера Планшереля на пространстве битаблиц $\mathcal{B}$ представляется в виде

$$\tilde{\mu} = \sum_{(a,b)\in B_{\mathrm{prop}}} \frac{\dim a}{n!}\mu_{(a,b)}, \quad (a,b)\in B_n.$$

5.2. Группоидная структура на пространстве битаблиц.

Удобно описывать пространство битаблиц и меры на нем в терминах теории группоидов (см., например, [10]).

Пространство битаблиц $\mathcal{B} = \{(s,t) : \ s,t \in T, s \sim t\}$ можно рассматривать как главный группоид, порожденный хвостовым отношением эквивалентности путей. А именно, пары (s,t) и

(u,v) перемножаемы тогда и только тогда, когда $u=t$, причем $(s,t)\cdot(t,v)=(s,v)$, а отображения r и d задаются формулами $r(s,t)=(s,s)$ и $d(s,t)=(t,t)$ соответственно. Пространство единиц можно при этом отождествить с диагональю $\mathcal{B}_0=\{(s,s),\ s\in T\}$, т.е. с пространством бесконечных таблиц T. Слой $G^s=r^{-1}(s)$ над элементом $s\in T$ есть $G^s=\{(s,t),\ t\sim s\}$ (счетное множество). Левая система Хаара на главном группоиде B состоит из считающих мер λ^t на слоях G^t. Возьмем меру Планшереля μ на диагонали T. Порожденная ей мера $\int_T\lambda^t d\mu(t)$ на группоиде $\mathcal{B}$ есть в точности полная мера Планшереля $\tilde{\mu}$.

5.3. Проективный предел пространств $\mathbb{C}(B_n)$ относительно планшерелевских условных ожиданий.

Теорема 1. *Проективный предел пространств $\mathbb{C}(B_n)$ относительно планшерелевских условных ожиданий p_n есть пространство*

$$\varprojlim(\mathbb{C}(B_n),p_n)=\mathrm{Mart}(\mathcal{B},\tilde{\mu})$$

мартингалов на пространстве бесконечных битаблиц $\mathcal{B}$ относительно полной меры Планшереля $\tilde{\mu}$.

Пространство мартингалов $\mathrm{Mart}(\mathcal{B},\tilde{\mu})$ относительно σ-конечной меры $\tilde{\mu}$ понимается как пространство наборов $\{\phi_{(a,b)}\}_{(a,b)\in B_{\mathrm{prop}}}$, где $\phi_{(a,b)}$ – мартингал на $T_{(a,b)}$ относительно меры $\mu_{(a,b)}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ – борелевская σ-алгебра в пространстве $\mathcal{B}$. Обозначим через $\mathfrak{A}_n$ ее σ-подалгебру, порожденную функциями, сосредоточенными на $\mathcal{B}_n$ и зависящими только от первых n координат битаблицы (множество таких функций естественно отождествляется с $\mathbb{C}(B_n)$). Утверждение теоремы следует из того, что, как нетрудно заметить, правая часть формулы (7) описывает условное ожидание функции f относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_n$.

Таким образом, мы получаем следующее определение преобразования Фурье на бесконечной симметрической группе $\mathfrak{S}_\infty$.

Определение 3. *Преобразованием Фурье произвольной функции f на бесконечной симметрической группе $\mathfrak{S}_\infty$ является мартингал $(\phi_1,\phi_2,\ldots)$ на пространстве бесконечных битаблиц $\mathcal{B}$ относительно полной меры Планшереля $\tilde{\mu}$, где $\phi_n=\widehat{f_n}$ есть преобразование Фурье ограничения f_n функции f на конечную симметрическую группу $\mathfrak{S}_n$.*

6. Преобразование Фурье различных классов функций на $\mathfrak{S}_\infty$

6.1. Квадратично интегрируемые функции.

Рассмотрим на бесконечной симметрической группе $\mathfrak{S}_\infty$ считающую меру m.

Теорема 2. *Преобразование Фурье есть изометрия пространства $l^2_m(\mathfrak{S}_\infty)$ квадратично интегрируемых функций на бесконечной симметрической группе $\mathfrak{S}_\infty$ относительно считающей меры и пространства $L^2(\mathcal{B},\tilde{\mu})$ квадратично интегрируемых функций на пространстве бесконечных битаблиц $\mathcal{B}$ относительно полной меры Планшереля $\tilde{\mu}$. Формула Планшереля имеет вид*

$$\sum_{w\in\mathfrak{S}_\infty} f(w)\bar{g}(w)=\int_{\mathcal{B}}\hat{f}(s,t)\hat{g}(s,t)d\tilde{\mu}(s,t),\qquad f,g\in l^2_m(\mathfrak{S}_\infty).$$

Доказательство. Преобразование Фурье квадратично интегрируемой функции на $\mathfrak{S}_\infty$ есть квадратично интегрируемый мартингал относительно полной меры Планшереля (поскольку планшерелевские условные ожидания p_n согласованы с гильбертовыми структурами в групповых алгебрах), который, как известно из теории мартингалов, в свою очередь соответствует квадратично интегрируемой функции на $\mathcal{B}$ относительно полной меры Планшереля.

6.2. Пространство Гельфанда–Цетлина.

Как было отмечено выше, преобразованием Фурье элемента алгебры Гельфанда–Цетлина $\mathrm{GZ}(\infty)$ бесконечной симметрической группы является функция с носителем на диагонали T.

Ясно, что планшерелевское условное ожидание (как и любое другое условное ожидание из $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$) переводит алгебру Гельфанда–Цетлина $\mathrm{GZ}(n+1)$ в $\mathrm{GZ}(n)$, поэтому можно рассмотреть пространство $\mathrm{GZ}=\varprojlim \mathrm{GZ}(n)$. Оно уже не является алгеброй, но является правым и левым $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$-бимодулем. Мы будем называть его *пространством Гельфанда–Цетлина бесконечной симметрической группы*. Из вышеизложенного следует, что преобразованием Фурье элемента из GZ является мартингал на пространстве путей T относительно меры Планшереля μ.

6.3. Центральные функции.

Преобразование Фурье центральной функции на $\mathfrak{S}_\infty$ есть *центральный* мартингал $(f^1, f^2, \ldots)$ на пространстве путей T относительно меры Планшереля, где центральность означает, что все функции f^k центральны в смысле разд. 2.4 (т.е. сосредоточены на диагонали и зависят только от формы битаблицы).

Например, пусть f – характеристическая функция класса сопряженности в $\mathfrak{S}_\infty$. Это означает, что существует такая диаграмма $\rho \in \mathbb{Y}_k$ без строк единичной длины, что ограничение функции f на симметрическую группу $\mathfrak{S}_n$ при $n \geqslant k$ есть характеристическая функция класса сопряженности C_{ρ_n}, соответствующего диаграмме $\rho_n = \rho \cup 1^{n-k} \in \mathbb{Y}_n$. Тогда преобразованием Фурье функции $f = f_\rho$ является центральный мартингал $(\phi_1, \phi_2, \ldots)$, где

$$\phi_n(s,t) = \begin{cases} \frac{\chi^\lambda(\rho_n)}{\dim \lambda} |C_{\rho_n}|, & \text{если } s = t \ \text{ и } \ [t]_n \in \lambda, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

6.4. Положительно определенные функции.

Преобразованием Фурье положительно определенной функции на $\mathfrak{S}_\infty$ является мартингал $(f^1, f^2, \ldots)$, такой, что

$$\sum_{(s,t)\in B_n} f^n(s,t) h(s) \bar{h}(t) \frac{\dim s}{n!} \geqslant 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall h \in \mathbb{C}(T_n).$$

В частности, ограничение положительно определенного мартингала на диагональ $\{(t,t)\} \simeq T$ есть положительный мартингал на T. Заметим, что существует естественное взаимно однозначное соответствие между *положительными* мартингалами на T и (положительными) мерами на $T = \varprojlim T_n$. А именно, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots) \leftrightarrow M^\phi = \varprojlim M_n^\phi$, где

$$M_n^\phi(s) := M^\phi(\{t : [t]_n = s\}) = \phi_n(s) \frac{\dim s}{n!}, \quad s \in T_n.$$

Таким образом, ограничение положительно определенного мартингала на диагональ (т.е. преобразование Фурье проекции исходной центральной функции на пространство Гельфанда–Цетлина) есть (положительная) мера на пространстве путей T.

6.5. Характеры.

В частности, если f – характер, т.е. центральная положительно определенная нормированная $(f(e) = 1)$ функция на $\mathfrak{S}_\infty$, то его преобразование Фурье есть положительная вероятностная центральная мера на T (нормированность центральной функции соответствует нормированности соответствующей меры в силу (4)). Таким образом, мы получаем классическое соответствие (см., например, [14] или [4]) $\chi \leftrightarrow M$ между характерами бесконечной симметрической группы и центральными вероятностными мерами на пространстве таблиц, задаваемое формулой

$$\chi_n = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} M^{(n)}(\lambda) \frac{\chi^\lambda}{\dim \lambda},$$

где $\chi_n = \chi|_{\mathfrak{S}_n}$, а $M^{(n)}(\lambda) = M(\{t : [t]_n \in \lambda\})$.

6.6. Примеры.

1. Преобразованием Фурье δ-функции δ_g в элементе $g \in \mathfrak{S}_\infty$ является функция[3]

$$\hat{\delta}_g(s,t) = \begin{cases} (\pi^\lambda(g) h_{[t]_n}, h_{[s]_n}), & s \sim_n t, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $g \in \mathfrak{S}_n$ и λ – форма таблиц $[s]_n$, $[t]_n$.

В частности, $\hat{\delta}_e(s,t) = \delta_{st}$ – характеристическая функция диагонали.

2. Используя ортогональную форму Юнга (см., например, [1]), можно записать в более явном виде преобразование Фурье кокстеровских образующих $\sigma_k = (k, k+1)$. А именно,

$$\hat{\sigma}_k(s,t) = \begin{cases} \delta_{ts}, & \text{если элементы } k \text{ и } k+1 \\ & \text{находятся в одной строке таблицы } t, \\ -\delta_{ts}, & \text{если элементы } k \text{ и } k+1 \\ & \text{находятся в одном столбце таблицы } t, \\ \rho_1 \delta_{ts} + \rho_2 \delta_{\sigma_k t, s} & \text{иначе}, \end{cases}$$

где

$$\rho_1 = \frac{1}{c_{k+1}(t) - c_k(t)}, \qquad \rho_2 = \sqrt{1 - \rho_1^2},$$

а таблица $\sigma_k t$ получается из таблицы t переменой мест элементов k и $k+1$.

---

[3] Напомним, что через h_t обозначается элемент базиса Гельфанда–Цетлина, соответствующий таблице t.

3. Как было указано выше, преобразование Фурье элемента Юнга–Юциса–Мерфи есть функция

$$\hat{X}_k(s,t) = \begin{cases} c_k(t), & s = t, \\ 0, & s \neq t, \end{cases}$$

где $c_k(t)$ – содержание той клетки таблицы t, в которой стоит элемент k.

4. Можно использовать преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье для переноса действий операторов с групповой алгебры на пространство функций на таблицах и наоборот. Например, рассмотрим оператор, который действует на таблицы (а следовательно, и на битаблицы) отражением относительно главной диагонали (точнее, индуцированный им оператор на функциях). Нетрудно увидеть, что соответствующий оператор на групповой алгебре есть оператор умножения на знак подстановки $\varepsilon(g)$, т.е. $a(g) \mapsto \varepsilon(g)a(g)$.

7. Другие условные ожидания

7.1. Виртуальная проекция.

Пусть $\pi_n : \mathfrak{S}_{n+1} \to \mathfrak{S}_n$ – виртуальная проекция, сопоставляющая подстановке $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ ее производную подстановку, т.е. подстановку, полученную вычеркиванием элемента $n+1$ из содержащего его цикла подстановки w. Той же буквой будем обозначать продолжение виртуальной проекции на групповые алгебры по линейности, т.е. проекцию $\pi_n : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}] \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, задаваемую формулой (элементы групповой алгебры рассматриваются как меры)

$$(\pi_n f)_u = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ \pi_n w = u}} f_w, \qquad f = \sum_{w \in \mathfrak{S}_{n+1}} f_w \delta_w, \quad u \in \mathfrak{S}_n.$$

Эта проекция является обобщенным (т.е. неположительным) условным ожиданием из $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$. Напомним соответствующее определение (см. [12]). Пусть A – C^*-алгебра с единицей над $\mathbb{C}$ и B – ее C^*-подалгебра. Линейный оператор $P : A \longrightarrow B$ называется *условным математическим ожиданием* или просто *ожиданием* алгебры A на подалгебру B, если (1) $P(b) = b$ и $P(b_1 a b_2) = b_1 P(a) b_2$ для любых $a \in A$ и $b, b_1, b_2 \in B$; (2) $P(a^*) = a^*$, $P1 = 1$; (3) $P \geqslant 0$, что означает, что для любого $a \in A$ элемент

$P(aa^*)$ положителен, т.е. принадлежит вещественному конусу в B, порожденному элементами вида bb^*. Если выполнены только условия (1) и (2), то P называется *обобщенным ожиданием.*

Лемма 1. *При $n \geqslant 4$ виртуальная проекция является единственным условным ожиданием из $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, удовлетворяющим следующему свойству: элемент группы $\mathfrak{S}_{n+1}$ (как элемент групповой алгебры) переходит в элемент группы $\mathfrak{S}_n$.*

Сопряженный (относительно считающих мер в $\mathfrak{S}_{n+1}$ и $\mathfrak{S}_n$) оператор $\pi_n^* : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$ имеет вид (в сопряженном пространстве элементы групповой алгебры рассматриваются как функции)

$$\pi_n^* f(w) = f(\pi_n w), \qquad f \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], \quad w \in \mathfrak{S}_{n+1}.$$

Проективный предел симметрических групп относительно виртуальных проекций π_n называется пространством виртуальных подстановок $\mathfrak{S}^\infty$:

$$\mathfrak{S}^\infty = \varprojlim(\mathfrak{S}_n, \pi_n).$$

Это пространство было введено в работе [4] (см. также подробную версию [5]).

Индуктивный предел групповых алгебр $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ относительно операторов π_n^* есть пространство финитных функций на пространстве виртуальных подстановок:

$$\varinjlim(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], \pi_n^*) = \mathbb{C}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{S}^\infty).$$

Проективный предел групповых алгебр относительно проекций π_n есть пространство борелевских мер на пространстве виртуальных подстановок:

$$\varinjlim(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], \pi_n) = \mathcal{M}(\mathfrak{S}^\infty).$$

Под действием преобразования Фурье виртуальная проекция и сопряженный к ней оператор переходят соответственно в операторы

$$(\pi_n f)(s,t) = \sum_{(u,v)\in B_{n+1}:(s,t)\nearrow(u,v)} p_\infty(s,u)(c_{n+1}(u)+1)f(u,v),$$

где $f \in \mathbb{C}(B_{n+1})$, $(s,t) \in B_n$, и

$$(\pi_n^* f)(s,t) = \begin{cases} f([s]_n, [t]_n)(c_{n+1}(t)+1), & \text{если } s \sim_n t, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $f \in \mathbb{C}(B_n)$, $(s,t) \in B_{n+1}$.

Недостатком проекции π_n является то, что она не согласована с гильбертовыми структурами в групповых алгебрах, задаваемыми считающими мерами на симметрических группах. Чтобы исправить этот недостаток, нужно рассмотреть нормированные проекции $\tilde{\pi}_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\pi_n$, т.е.

$$(\pi_n f)_u = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ \pi_n w = u}} f_w, \quad f = \sum_{w \in \mathfrak{S}_{n+1}} f_w w, \quad u \in \mathfrak{S}_n,$$

$$(\pi_n f)(s,t) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{(u,v) \in B_{n+1} : (s,t) \nearrow (u,v)} p_\infty(s,u)(c_{n+1}(u)+1) f(u,v),$$
$$f \in \mathbb{C}(B_{n+1}),\ (s,t) \in B_n.$$

7.2. z-проекции.

Пусть $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $t = |z|^2$.

z-Проекцией $p_n^z : \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}] \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ будем называть следующую линейную комбинацию планшерелевской и виртуальной проекций:

$$p_n^z = \frac{1}{\sqrt{n+t}}((z-1)p_n + \pi_n).$$

Явная формула для z-проекции имеет вид

$$(p_n^z f)(u) = \frac{1}{\sqrt{n+t}} \left(\sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_{n+1} \\ \pi_n w = u}} f(w) + (z-1) f(u) 1_{u \in \mathfrak{S}_n} \right),$$
$$f \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}], \quad u \in \mathfrak{S}_n.$$

Под действием преобразования Фурье z-проекция переходит в оператор

$$(\pi_n f)(s,t) = \frac{1}{\sqrt{n+t}} \sum_{(u,v) \in B_{n+1} : (s,t) \nearrow (u,v)} p_\infty(s,u)(c_{n+1}(u)+z) f(u,v),$$
$$f \in \mathbb{C}(B_{n+1}),\ (s,t) \in B_n.$$

Виртуальная и планшерелевская проекции являются частными случаями z-проекции при $z = 1$ и $z = \infty$ соответственно.

Лемма 2. *При $n \geqslant 4$ z-проекции исчерпывают все условные ожидания из $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+1}]$ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, удовлетворяющие следующему свойству: элемент группы $\mathfrak{S}_{n+1}$ переходит в элемент группы $\mathfrak{S}_n$, возможно, с некоторым коэффициентом.*

В частности, при планшерелевской проекции элемент группы переходит в элемент группы или 0.

Лемма 3. *Для любой функции $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ имеем*

$$(p_1^z p_2^z \dots p_{n-1}^z p_n^z f)(w) = \langle f, z^{[w]} \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, задаваемое считающей мерой на $\mathfrak{S}_n$, а $[w]$ обозначает количество циклов подстановки $w \in \mathfrak{S}_n$.

В частности, для планшерелевского ожидания получаем

$$(p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n f)(w) = \langle f, \delta_e \rangle = f(e),$$

а для виртуальной проекции

$$(\pi_1 \pi_2 \dots \pi_{n-1} \pi_n f)(w) = \langle f, 1 \rangle = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w).$$

Литература

1. Г. Джеймс, *Теория представлений симметрических групп.* М., Мир (1982).
2. G. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group.* Addison-Wesley, Reading, Mass. (1981).
3. Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ.* Т. 1, 2. Наука, М. (1974); Мир, М. (1974).
4. S. Kerov, G. Olshanski, and A. Vershik, Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. Math.* **316**, No. 8 (1993), 773–778.
5. S. Kerov, G. Olshanski, and A. Vershik, Harmonic analysis on the infinite symmetric group. *Invent. Math.* **158**, No. 3 (2004), 551–642.
6. I. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd edition. Clarendon Press, Oxford (1995).
7. А. Ю. Окуньков, Теорема Тома и представления бесконечной бисимметрической группы. *Функц. анал. и прил.* **28** (1994), вып. 2, 31–40.
8. Г. И. Ольшанский, Унитарные представления (G, K)-пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$. *Алгебра и анализ* **1** (1989), вып. 4, 178–209.
9. G. K. Pedersen, *C^*-algebras and Their Automorphism Groups.* Academic Press, London–New York (1979).

10. J. Renault, *A Groupoid Approach to C^*-Algebras.* Lect. Notes in Math. **793**, Springer-Verlag, Berlin–Heildelberg–New York (1980).
11. R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 2. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999).
12. A. Vershik, Gelfand–Tsetlin algebras, expectations, inverse limits, Fourier analysis. In: *Unity of Mathematics. Proc. of the conference dedicated to I. M. Gelfand.* Birkhäuser (2005) (to appear).
13. А. М. Вершик, С. В. Керов, Асимптотическая теория характеров симметрической группы. *Функц. анал. и прил.* **15** (1981), вып. 4, 15–27.
14. A. M. Vershik and S. V. Kerov, The Grothendieck group of infinite symmetric group and symmetric functions (with the elements of the theory of K_0-functor of AF-algebras). In: *Representation of Lie Groups and Related Topics*, A. M. Vershik and D. P. Zhelobenko (eds.). Gordon and Breach Sci. Publ. (1990), pp. 39–118.
15. А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков, Новый подход к теории представлений симметрических групп. II. *Зап. научн. семин. ПОМИ* **307** (2004), 57–98.
16. А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков, Новый подход к теории представлений симметрических групп. II. Приложение к книге У. Фултон, *Таблицы Юнга.* М.: МЦНМО (2004).

Vershik A. M., Tsilevich N. V. On the Fourier transform on the infinite symmetric group.

We present a sketch of the Fourier theory on the infinite symmetric group $\mathfrak{S}_\infty$. As a dual space to $\mathfrak{S}_\infty$, we suggest the space (groupoid) of Young bitableaux $\mathcal{B}$. The Fourier transform of a function on the infinite symmetric group is a martingale with respect to the so-called full Plancherel measure on the groupoid of bitableaux. The Plancherel formula determines an isometry of the space $l^2(\mathfrak{S}_\infty, m)$ of square integrable functions on the infinite symmetric group with the counting measure and the space $L^2(\mathcal{B}, \tilde{\mu})$ of square integrable functions on the groupoid of bitableaux with the full Plancherel measure.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vershik@pdmi.ras.ru
natalia@pdmi.ras.ru

Поступило 25 мая 2005 г.