Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 325, 2005 г.

А. Д. Горбульский

σ-АЛГЕБРА ПРОШЛЫХ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ ПО ОРБИТАМ БЕРНУЛЛИЕВСКОГО ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ Z^D

1. Введение

Пусть заданы пространство Лебега $(X, \mathcal{F}, \mu)$ и убывающая последовательность измеримых разбиений $\mathcal{F} > \xi_1 > \xi_2 > \xi_3 \ldots$. Напомним определение скейлинговой энтропии, введенное А. М. Вершиком в работе [1]. Инвариант строится в несколько шагов.

1. Сначала определим последовательность итерированных полуметрик.

Определение 1.1. *Полуметрика ρ в пространстве $(X, \mathcal{F}, \mu)$ называется допустимой, если она измерима относительно $\mathcal{F}$ и пространство, снабженное этой полуметрикой, квазикомпактно с точностью до множества малой μ-меры.*

По произвольной допустимой полуметрике ρ построим полуметрику ρ_1 на пространстве X как расстояние в метрике Канторовича между условными мерами:

$$\rho_1(x,y) = KR(\mu_x, \mu_y) = \inf\left\{ \int \rho(x,y) d\Theta \mid P_x\Theta = \mu_x, P_y\Theta = \mu_y \right\},$$

где P_x и P_y – маргинальные проекции. С помощью этой процедуры мы можем построить последовательность полуметрик ρ_n. Конструкция итерированных полуметрик корректно определена для любой последовательности разбиений, однако в некоторых специальных случаях эта конструкция имеет альтернативное описание.

2. Теперь дадим определение скейлинговой энтропии последовательности разбиений относительно полуметрики.

Скейлинговой энтропией последовательности разбиений $\Xi = \{\xi_n\}_n$ относительно полуметрики ρ со скейлингом $C = c(n, \varepsilon)$ называется величина

$$h_\varepsilon(\Xi, \rho, C) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} \frac{H_\varepsilon(X, \mu, \rho_n)}{c(n, \varepsilon)}.$$

Здесь $H_\varepsilon(X, \mu, \rho_n)$ – ε-энтропия пространства X с мерой μ и полуметрикой ρ_n. Энтропия пространства определяется как мощность минимальной сети, в ε-окрестности которой находится все пространство X за исключением множества меры ε:

$$H_\varepsilon(X, \mu, \rho_n) = \inf\{\#M \mid M \text{ – дискретное множество}, \\ \mu(V_{\varepsilon,\rho_n}(M)) > 1 - \varepsilon\}.$$

3. Определим скейлинговую энтропию последовательности разбиений как

$$h_\varepsilon(\Xi, C) = \sup_\rho h_\varepsilon(\{\xi_n\}_n, \rho).$$

Заметим, что лишь при одном (с точностью до эквивалентности) выборе скейлинга $C = c(n, \varepsilon)$ в определении может получиться конечный ненулевой супремум.

Если для последовательности разбиений нашелся такой скейлинг, будем называть его собственным скейлингом последовательности разбиений.

Скейлинговая энтропия есть асимптотика меры типичного ε-шара в итерированной метрике.

При выборе $C = c(n, \varepsilon) = 2^n$ мы получим инвариант, совпадающий с энтропией убывающей последовательности разбиений, определенной А. М. Вершиком в работе [2]. Будем называть этот инвариант экспоненциальной энтропией. Отличие скейлинговой энтропии от экспоненциальной заключается в том, что этот инвариант различает более тонкие классы последовательностей разбиений. Однако уточнение инварианта приводит к дополнительным трудностям при его подсчете – а именно, в этом случае доказательство непрерывности скейлинговой энтропии по образующему разбиению каждый раз является предметом проверки, а не общей теоремой ([2]). Тем не менее, для класса примеров последовательностей, рассматриваемого в настоящей работе, непрерывность вытекает из общей верхней оценки на энтропию и основные сложности связаны с доказательством нижней оценки (и, в частности, нестандартности последовательности разбиений).

Теперь опишем рассматриваемый класс последовательностей разбиений.

Рассмотрим действие группы Z_d сдвигами на пространстве простых функций $Y = \{-1;1\}^{Z_d}$. Пусть на пространстве Y задана мера μ – продакт-мера с сомножителем $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$. Пусть e_i, $i = -d,\ldots,d$, – сдвиги вдоль координатных осей. Элемент e_i действует на функцию сдвигом вдоль направления e_i. Положим $e_{-i} = -e_i$. Пусть σ – односторонний бернуллиевский сдвиг на пространстве $(X,\mathcal{B},\nu)$, где $X = \{e_{-d},\ldots,e_d\}^N$ – пространство последовательностей, B – борелевская σ-алгебра, ν – продакт-мера с сомножителем $(\frac{1}{2d},\ldots,\frac{1}{2d})$. В дальнейшем мы будем отождествлять образующие e_i группы Z_d и элементы e_i базы пространства X. Итак, у нас заданы два действия – $(Y,\mathcal{A},\mu,Z_d)$ и (X,B,ν,σ).

Определим косое произведение действий $\mathcal{T} = [T,T^{-1}]_d$ на пространстве $(X\times Y,\mathcal{F},\nu\times\mu)$, где алгебра $\mathcal{F}$ есть произведение алгебр B и $\mathcal{A}$. Определим d-мерный аналог автоморфизма Каликова $[T,T^{-1}]$ как

$$\mathcal{T}_d(x,y) = (\sigma x, T^{x_0}y).$$

Последовательность прошлых этого эндоморфизма есть $\{\xi_n\} = \mathcal{T}_d^{-n}\xi_0$ (разбиение ξ_0 – это разбиение на точки). Заметим, что эндоморфизм $\mathcal{T}$ – это отображение степени $2d$ п.в. Так как все прообразы имеют равные условные вероятности, последовательность разбиений на прошлые этого эндоморфизма однородная. Заметим, что пересечение этой последовательности тривиально. Для случая $d = 1$ А. М. Вершик сформулировал в виде гипотезы, а К. Хоффман и Д. Хейклен позднее доказали, что последовательность, которую мы только что описали, не стандартна. В статье [4] более детально изучена комбинаторика итерированной метрики. В настоящей работе дается частичный ответ на вопрос А. М. Вершика о том, каким может быть собственный скейлинг последовательности разбиений.

Основной результат настоящей работы заключается в подсчете собственного скейлинга и скейлинговой энтропии последовательности прошлых эндоморфизма $\mathcal{T}$ – случайного блуждания по траекториям бернуллиевского действия группы Z_d, а именно, собственный скейлинг этой последовательности равен $c(\varepsilon,n) = (n\ln\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{d}{2}}$. Скейлинговая энтропия этой последовательности с собственным скейлингом равна $h(\Xi) = \frac{1}{2d}\log(2d)$ (см. теорему 4.2). Таким образом, собственный скейлинг последовательности разбиений может быть полиномиальным по n. Полученные результаты обобщают результаты статьи [4] на многомерный случай.

Как и в одномерном случае, аналогичная теорема будет справедлива и для произвольного действия группы Z_d с положительной энтропией.

2. Определения

При доказательстве теоремы мы будем существенно использовать структуру дерева, возникающую на точках прообраза $\mathcal{T}^{-n}(x,y)$. Нам понадобятся некоторые понятия, связанные с этим деревом.

Зафиксируем высоту дерева n. Веткой дерева длины n, или n-веткой дерева, будем называть элемент куба $Q^n = \{e_1,\ldots,e_d,e_1^{-1},\ldots,e_d^{-1}\}^n \subset X$. n-Дерево – это дерево степени $2d$ и высоты n. Для каждой точки (x,y) имеется соответствие $I^n_{\{x,y\}}$ между ветками n-дерева и 2^n элементами множества $\mathcal{T}^{-n}(x,y)$. Это отображение переводит n-ветку $(b_1,\ldots,b_n)$ в точку $\overline{(-b_1,-b_2,\ldots,-b_n}x,(\sum\limits_i b_i)(y))$ множества $\mathcal{T}^{-n}(x,y)$. Пусть P – конечное разбиение пространства Y; тогда маркированным n-деревом для разбиения P над точкой $y\in Y$ будем называть дерево с метками $P((\sum\limits_{i=1}^n b_i)(y))$. Узлом будем называть элемент решетки Z_d. Будем говорить, что ветка дерева попадает в узел k, если $(\sum\limits_{i=1}^n b_i) = k$. Ветка проходит через узел k на высоте h, если $(\sum\limits_{i=h+1}^n b_i) = k$. Для $m \leqslant n$ определим m-поддерево n-дерева как дерево с $(2d)^m$ ветками, такими, что последние $n-m$ координат у всех у них совпадают, а первые m координат принимают все возможные значения. Ветки m-поддерева соответствуют $(2d)^m$ элементам множества $\mathcal{T}^{-n}(x,y)$, которые переводятся в одну точку отображением $\mathcal{T}^m$. Расстоянием между m-поддеревьями n-дерева называется величина $\sum\limits_{i=m+1}^n |b_i - b_i'|$ для произвольно выбранных веток b и b', проходящих через эти поддеревья. Фиксируем разбиение P, и пусть W и W' – маркированные n-деревья над точкой y и y' соответственно. Метрикой Хэмминга между двумя маркированными n-деревьями W и W' называется величина

$$d_n(W,W') = \frac{\#\text{ветки, в которых маркировки } W \text{ и } W' \text{ различаются}}{(2d)^n}.$$

Пусть D_n – группа автоморфизмов n-дерева.

В случае однородной последовательности разбиений итерированная метрика может быть явно описана с помощью этой группы – для полуметрики ρ на пространстве $\mathcal{X}$ и $2d$-адической последовательности разбиений ξ_n итерированная полуметрика допускает следующее представление:

$$\rho_n(U,V) = \inf_{a\in D_n} \sum_{i=1}^{2d^n} \rho(a\circ I_U^n(u_i), v_i).$$

Здесь u_i – прообразы точки U, v_i – прообразы точки V. Это комбинаторное определение позволит нам вычислять итерированную полуметрику.

Зададим полуметрику ρ формулой

$$\rho((x,y),(u,v)) = \sum_{i=1}^{l} \frac{|x_i-u_i|}{2^i} + \frac{1}{(2l)^d} \sum_{|k|<l} |y(k)-v(k)|.$$

Заметим, что для точек, близких в итерированной полуметрике ρ_l, автоморфизм дерева $a\in D_n$, реализующий инфимум в определении расстояния, будет оставлять неподвижным некоторое m-поддерево n-дерева, причем чем меньше расстояние, тем больше m.

Определим вспомогательные полуметрики на пространстве Y:

$$d_n(f,g) = \sum_{|x|\leqslant n} |f(x)-g(x)| * C_n^{\bar{x}}$$

(эта полуметрика получается из одноименной полуметрики на деревьях при проектировании $\mathcal{X} = X\times Y$ на вторую координату) и (аналог f-метрики)

$$f_n(f,g) = \inf\Big\{ \sum_{|x|\leqslant n} |f(x)-g(l(x))| * C_n^{|x|} \,\Big|\, l \text{ – монотонное вдоль всех координатных осей}\Big\}.$$

3. План доказательства

Первым делом устанавливается оценка сверху для скейлинговой энтропии. Для класса полуметрик, порожденных цилиндрическими разбиениями, ε-энтропия итерированной метрики ρ_n оценивается через ε-энтропию пространства с мерой, факторизованного по классам эквивалентности $\sim_{\rho_n}$, порожденной полуметрикой ρ_n ($U \sim_{\rho_n} V \iff \rho_n(U, V) = 0$), а это энтропия пространства функций на кубе $\mathrm{Cub}(0, n)$ со стороной n с метрикой d_n. Таким образом, мы получаем оценку сверху. Для произвольной полуметрики мы используем оценку для аппроксимирующих цилиндрических полуметрик и монотонность скейлинговой энтропии по полуметрике. Более сложная часть теоремы – оценка снизу. Будем рассматривать полуметрику, порожденную цилиндрическим разбиением достаточно большого ранга. Сначала мы проверим нестандартность последовательности разбиений. Доказательство аналогично приведенному в статье [3] – используется экспоненциальный характер объектов. В качестве исходной полуметрики выбирается вырожденная полуметрика – такая, чтобы фактор по ядру n-й итерации содержал все конфигурации на кубе $\mathrm{Cub}(0, n)$. Для получения более точной оценки снизу мы покажем, что энтропия фактор-пространства по ядру действия группы автоморфизмов дерева D_n на пространство конфигураций отличается от энтропии самого пространства конфигураций как пространства с метрикой и мерой на малую величину. Для этого мы покажем, что для типичной точки пространства действие группы на пространстве конфигураций, реализующее минимум в определении итерированной полуметрики, совпадает "почти везде" с действием, индуцированным некоторым отображением базы. Затем мы проверим, что это отображение монотонно вдоль всех координатных осей – тем самым мы покажем, что почти все ε-шары в итерированной метрике мало отличаются по мере от ε-шаров в f_n-метрике с теми же центрами. Энтропии пространства с метрикой f_n и с метрикой d_n имеют одинаковые асимптотики, откуда мы заключаем, что нижняя и верхняя оценки совпадают.

Теорема 3.1. *Последовательность прошлых эндоморфизма $\mathcal{T}$ нестандартна.*

Доказательство. Воспользуемся критерием стандартности последовательности разбиений [2]. Пусть ρ_n – итерированная метрика, соответствующая метрике ρ. Прежде всего рассмотрим классы точек, находящихся на нулевом расстоянии по полуметрике ρ_n. Две точки (x, y) и (u, v) находятся на нулевом расстоянии, если совпадают последние n элементов последовательностей x и u и совпадают конфигурации y и v на кубе со стороной n.

Удачным выбором последовательности $\varepsilon_i \to \varepsilon_0$ и последовательностей чисел l_n, p_n мы добьемся того, что при достаточно большом l и маленьком ε

$$P(u : \exists\, y, v : \rho_{l_n}((x, y), (u, v)) < \varepsilon_n) < p_n \to 0.$$

Отсюда мы получаем нестандартность последовательности разбиений. □

Замечание 1. В силу особого вида последовательностей l_n и p_n в теореме 4.1 можно утверждать, что меры шаров имеют суперполиномиальную скорость сходимости к нулю.

Теперь мы построим множество G, $\mu(G) > 1 - \varepsilon$, “невырожденных” точек y, для которых будут справедливы дальнейшие оценки.

Будем обозначать через $\mathrm{Cub}(j, k)$ куб в пространстве Z^d с центром в точке j и радиусом k. Сдвиг на вектор i будем обозначать e_i, так же как и сдвиг вдоль координатных осей.

Построим вспомогательное множество

$$\gamma_k = \{y \,|\, \exists i \in Z^d,\, 2k < |i| < k^5, \text{ такой, что } \rho_{l_n}(y, e_i(y)) < \delta_0\}.$$

Положим

$$B(\delta, \delta_0) = \{y \,|\, \exists i \in Z^d,\, 0 < |i| < n_0, \text{ такой, что } \bar{d}_{[-n_0,n_0]^d}(y, e_i(y)) < \delta_0/4\}.$$

Для данной точки y мы будем говорить, что узел l “крашеный”, если

(1) существуют вектор j и радиус k, такие, что $e_j(y) \in \gamma_k$ и $l \in \mathrm{Cub}(j, k)$, или

(2) существует такой вектор j, что $e_j(y) \in B(\delta, \delta_0)$ и $l \in \mathrm{Cub}(j, n_0)$.

Будем называть n-словом точки $y \in Y$ множество $(2n)^{2d}$ значений $y_l = P(e_l(y))$.

Определение 3.1. *n-Слово точки y называется (δ,δ_0)-вырожденным, если доля веток в n-дереве над точкой y, которые заканчиваются в крашеных узлах, больше $\frac{\delta}{2}$.*

Лемма 3.1. *Существует δ_0, зависящее только от процесса $(\mathcal{T},P)$, такое, что для достаточно малых δ выполнено неравенство $\mu(B(\delta,\delta_0))<\delta^2/4$.*

Теперь мы зафиксируем δ_0, такое, чтобы выполнялось условие предыдущей леммы.

Лемма 3.2. *Для достаточно малых δ множество всех y, которые вырождены для $n>n_0=2^{\frac{1}{\delta}}$, имеет меру не больше δ.*

Таким образом, нам достаточно рассматривать только невырожденные точки y.

Лемма 3.3. *Если n-слова точек y и y' невырождены и $\rho_n(y,y')<\delta$, то доля хороших веток больше $1-10\delta$.*

Определение 3.2. *Назовем ветку b очень хорошей для автоморфизма a, если для любого $j\leqslant n$ j-поддерево, через которое проходит ветка b, проходит по крайней мере через $(2d)^j(1-C_1)$ хороших веток, где $C_1=\frac{\delta_0}{1000}\int\limits_{100}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}$.*

Лемма 3.4. *Если n-слова точек y и y' невырождены и $\rho_n(y,y')<\delta$, то доля очень хороших веток для автоморфизма a будет больше $1-\frac{10}{C_1}\delta$.*

Лемма 3.5. *Предположим, что n-слова точек y и y' невырождены и $\rho_n(y,y')<\delta$. Для любых очень хороших веток b и b' и $h\geqslant n_0$ выполняется следующее условие:*

$$\text{если}\quad \sum_{i=h+1}^{n} b_i-b_i'=0,\qquad \text{то}\qquad \Bigl|\sum_{i=h+1}^{n} b_i-b_i'\Bigr|\leqslant 2h.$$

То есть образы очень хороших веток, оканчивающихся в одном узле, оканчиваются в узлах, отстоящих друг от друга на расстояние не более $2h$.

Лемма 3.6. *Если n-слова точек y и y' невырождены и $\rho_n(y,y')<\delta$, то для каждого k найдется k', такое, что все очень хорошие ветки для a, оканчивающиеся в узле k, под действием автоморфизма a переходят в ветки, оканчивающиеся в узле k'.*

Лемма 3.7. *Отображение $k'(k)$ монотонно на множестве K мощности $\#K > c\sqrt{n}(1-\alpha_n)$, где α_n может быть сделано сколь угодно малым при достаточно малом ε.*

В последней лемме мы установили, что автоморфизм дерева, на котором реализуется расстояние в итерированной метрике между точками y и y', действует как отображение, монотонное вдоль каждой координатной оси на почти всех узлах куба $\mathrm{Cub}(0, c\sqrt{n})$. Отсюда немедленно следует взаимосвязь между итерированной метрикой и f_n-метрикой на узлах, что и доказывает нижнюю оценку на скейлинговую энтропию. Так как верхняя и нижняя оценки асимптотически совпадают, мы получаем основной результат работы – следующую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть $\Xi = \{\xi_n\}_n$ – последовательность прошлых случайного блуждания $\mathcal{T}$ по траекториям бернуллиевского действия группы Z_d.*

1. *Собственный скейлинг последовательности $\Xi = \{\xi_n\}_n$ равен $c(\varepsilon, n) = (n \log \frac{1}{\varepsilon})^{\frac{d}{2}}$.*
2. *Скейлинговая энтропия последовательности $\Xi = \{\xi_n\}_n$ с собственным скейлингом равна $h(\Xi) = \frac{1}{2d}\log(2d)$.*

Полные доказательства всех утверждений будут опубликованы в последующих работах.

Автор выражает благодарность профессору А. М. Вершику за постановку задачи и многочисленные плодотворные обсуждения.

Литература

1. А. М. Вершик, *Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры.* — Успехи мат. наук **55**, вып. 4 (2000), 59–128.
2. А. М. Вершик, *Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений.* — Алгебра и анализ **6**, вып. 4 (1994), 1–68.
3. D. Heicklen, C. Hoffman, *T, T^{-1} is not standard.* — Ergodic Theory Dynam. Systems **18** (1998), 875–878.
4. D. Heicklen, C. Hoffman, D. Rudolph, *Entropy and dyadic equivalence of random walks on a random scenary.* — Adv. Math. **156**, No. 2 (2000), 157–179.

Gorbulsky A. D. The σ-algebra of pasts of a random walk on the orbits of the Bernoulli action of the group Z^d.

In the present paper, we study the σ-algebra of pasts $\Xi = \{\xi_n\}_n$ of a random walk $\mathcal{T}$ on the orbits of the Bernoulli action of the group Z^d. The proper scaling and the scaling entropy of this sequence of partitions is calculated. We show that the proper scaling entropy of the σ-algebra of pasts is $h(\Xi) = \frac{1}{2d}\log(2d)$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: gorbulsky@consultant.com

Поступило 2 августа 2005 г.