Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 325, 2005 г.

Ф. С. Дужин

ОЦЕНКИ НА КОЛИЧЕСТВО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ ОБОБЩЁННЫХ БИЛЬЯРДОВ

1. Введение

Изучение замкнутых бильярдных траекторий — классическая задача, впервые поставленная Джорджем Биркгофом. Бильярд есть движение частицы внутри некоторой области при отсутствии силового поля, когда частица двигается по геодезической, отражаясь от границы так, что угол падения равен углу отражения. Замкнутые бильярдные траектории — важный объект, связанный с разными областями математики. Например, бильярдные траектории соответствуют геодезическим такого пространства: берём два экземпляра одной и той же выпуклой области и попарно отождествляем соответствующие друг другу точки границы. Другой пример даёт построение инвариантов узлов и плоских кривых с помощью периодических траекторий бильярда.

Джордж Биркгоф в [1] сформулировал и решил следующую задачу: если дано натуральное число k, оценить снизу количество замкнутых k-звенных траекторий плоского бильярда. Точнее, он доказал, что если $k > 2$ — натуральное число, а $T \subset \mathbb{R}^2$ — строго выпуклая область с гладкой границей, то в области T существует по меньшей мере $\varphi(k)$ замкнутых k-звенных траекторий бильярда. Здесь $\varphi(k)$ обозначает функцию Эйлера, то есть количество взаимно простых с k натуральных чисел, меньших k.

В этой теореме бильярдный шар отражается от границы двумерной выпуклой области, то есть от окружности, вложенной в плоскость. Несложно сформулировать определение замкнутой траектории бильярдного шара, который (в каком-то смысле) отражается от многообразия, даже не вложенного, а погружённого в евклидово пространство произвольной размерности.

Оценкой на количество замкнутых траекторий таких бильярдов, то есть обобщением результатов Биркгофа, занимались многие математики. Самый простой случай, когда данное многообразие является сферой, а замкнутая бильярдная траектория состоит из двух звеньев, был исследован ещё М. Морсом в [2]. Наилучшую общую оценку на количество замкнутых двузвенных траекторий бильярда для произвольного многообразия, погружённого в евклидово пространство, нашёл П. Пушкарь в [4].

Оценки на количество замкнутых k-звенных траекторий бильярда в многомерных строго выпуклых областях (когда бильярдный шар отражается от m-мерной сферы, вложенной в $(m+1)$-мерное евклидово пространство) были доказаны М. Фарбером и С. Табачниковым в [5] и [6].

В нашей работе [7] была получена оценка на количество замкнутых трёхзвенных траекторий бильярда для произвольного многообразия, вложенного в евклидово пространство. К сожалению, статья [7] содержит ошибку, на которую указали М. Фарбер и С. Табачников, — на самом деле эта оценка доказана там только для многообразий, лежащих на границе какой-то строго выпуклой области.

Настоящая работа посвящена, во-первых, исправлению этой ошибки (лемма 3.1) и, во-вторых, оценке на количество замкнутых бильярдных траекторий с произвольным количеством звеньев для любого подмногообразия евклидова пространства (теорема 1).

2. Формулировка основной теоремы

Пусть M — гладкое замкнутое связное m-мерное многообразие, вложенное в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ (очевидно, $m < n$), $k \geqslant 2$ — натуральное число. Группа диэдра D_k действует на декартовой степени многообразия $M^{\times k}$, это действие порождается циклическим сдвигом

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (x_2, x_3, \ldots, x_k, x_1) \tag{1}$$

и отражением

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1). \tag{2}$$

Определение. Набор точек многообразия $(x_1, \ldots, x_k) \in M^{\times k}$, рассматриваемый с точностью до действия группы диэдра D_k, называется *периодической* или *замкнутой k-звенной бильярдной траекторией,* если для любого циклического индекса i (имеется в виду, что $i = i + k$) выполнены следующие условия:

1. $x_i \neq x_{i+1}$,

2. $\dfrac{x_i - x_{i+1}}{\|x_i - x_{i+1}\|} + \dfrac{x_i - x_{i-1}}{\|x_i - x_{i-1}\|} \perp T_{x_i}M.$

Заметим, что второе из этих условий означает, что угол падения равен углу отражения, а факторизация по действию группы диэдра соответствует тому, что одну и ту же замкнутую ломаную можно проходить начиная с любой вершины и в любом из двух направлений. По сути, замкнутые k-звенные ломаные — точки фактор-пространства $M^{\times k}/D_k$.

Введём следующее обозначение:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_k} \{x_i = x_{i+1}\} \subset M^{\times k}, \\ \Delta &= \tilde{\Delta}/D_k \end{aligned} \tag{3}$$

— диагональ, состоящая из таких наборов точек, у которых какие-то две соседние координаты совпадают, то есть Δ — множество замкнутых k-звенных ломаных, у которых длина хотя бы одного из рёбер равна нулю. Таким образом, в этих обозначениях замкнутая бильярдная траектория — точка пространства $(M^{\times k} \setminus \tilde{\Delta})/D_k = (M^{\times k}/D_k) \setminus \Delta$.

В дальнейшем, желая подчеркнуть, что Δ состоит из k-звенных ломаных, мы будем писать Δ_k. Если же нужно будет обратить внимание на то, что Δ состоит из ломаных с вершинами на многообразии M, мы будем писать Δ_M.

Пусть

$$l = \sum_{i \in \mathbb{Z}_k} \|x_i - x_{i+1}\| : M^{\times k} \to \mathbb{R} \tag{4}$$

есть функция длины замкнутой k-звенной ломаной, все вершины которой лежат на данном многообразии. Очевидно, функция l гладка вне диагонали $\tilde{\Delta}$. Нетрудно видеть, что l инвариантна относительно действия группы диэдра D_k, то есть она является функцией и на фактор-пространстве $M^{\times k}/D_k$.

Хорошо известно, что k-звенные периодические бильярдные траектории (вернее, их прообразы при естественной проекции $M^{\times k} \to M^{\times k}/D_k$, если строго придерживаться терминологии) — то же самое, что критические точки функции l вне $\tilde{\Delta}$.

Определение. Назовём вложение $M \to \mathbb{R}^n$ *общим* (или, точнее, *k-общим*), если все критические точки всех функций $l_{k'}$ с

$k' < k$ вне соответствующих диагоналей $\tilde{\Delta}_{k'}$ невырождены[1]. Таким образом, наша задача сводится к оценке наименьшего количества $BT_k(M)$ критических точек функции l по всем общим вложениям многообразия M в евклидово пространство. Заметим, что в дальнейшем мы эту задачу будем решать только для простых[2] $k = p$.

Теорема 1. *Пусть M — гладкое замкнутое связное m-мерное многообразие, $p > 3$ — простое число*[3]. *Пусть $k_i = \dim H_i(M; \mathbb{Z}_2)$, $B = \sum_{i=0}^m k_i$. Тогда минимальное количество замкнутых p-звенных бильярдных траекторий по всем общим вложениям многообразия M в евклидово пространство удовлетворяет неравенству*

$$BT_p(M) \geqslant \frac{(B-1)((B-1)^{p-1}-1)}{2p} + \frac{mB}{2}(p-1). \qquad (5)$$

Доказательство. Из неравенств Морса (лемма 3.1) следует, что

$$BT_p(M) \geqslant \sum_{i=0}^{pm} \dim H_q(M^{\times p}/D_p, \Delta; \mathbb{Z}_2). \qquad (6)$$

Из результатов работы [7] следует, что если у пространств X_1 и X_2 группы гомологий изоморфны, то группы гомологий $H_q(X_1^{\times p}/D_p, \Delta_{X_1}; \mathbb{Z}_2)$ и $H_q(X_2^{\times p}/D_p, \Delta_{X_2}; \mathbb{Z}_2)$ также изоморфны[4]. Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{pm} \dim H_q(M^{\times p}/D_p, \Delta; \mathbb{Z}_2) = \sum_{i=0}^{pm} \dim H_q(X^{\times p}/D_p, \Delta_X; \mathbb{Z}_2), \qquad (7)$$

где X обозначает букет сфер

$$S^m \vee S_1^{m-1} \vee \cdots \vee S_{k_{m-1}}^{m-1} \vee \cdots \vee S_1^1 \vee \cdots \vee S_{k_1}^1. \qquad (8)$$

[1]Такие вложения образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех вложений, см. подробности в [5].

[2]Дело в том, что, во-первых, при составных $k = ab$ в множество k-звенных замкнутых бильярдных траекторий входят не только однократные траектории, но и a-звенные, пройденные b раз. Во-вторых, при составном k пространство $(M^{\times k}/D_k) \setminus \Delta$ не является гладким многообразием.

[3]Для $p = 2, 3$ эта оценка может быть улучшена, а именно, количество замкнутых бильярдных траекторий длины 2 — не менее $\frac{B^2+(m-1)B}{2}$ (см. [4]), а длины 3 — не менее $\frac{B^3+3(m-1)B^2+2B}{6}$ (см. [7]).

[4]Это утверждение доказано в [7] только для $p = 2, 3$, но его несложно обобщить на случай произвольного p.

Из леммы 4.2 следует, что

$$\sum_{i=0}^{pm} \dim H_q(X^{\times p}/D_p, \Delta_X; \mathbb{Z}_2) \geqslant \frac{(B-1)((B-1)^{p-1}-1)}{2p} + \frac{mB}{2}(p-1). \tag{9}$$

Теорема доказана. □

3. Неравенства Морса

Вначале сформулируем главную лемму, а затем — все утверждения, нужные для её доказательства.

Лемма 3.1. *Пусть M — гладкое замкнутое связное m-мерное многообразие, общим образом вложенное в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, p — простое число. Тогда у M существует не менее*

$$\sum_{q=0}^{mp} \dim H_q(M^{\times p}/D_p, \Delta; \mathbb{Z}_2) \tag{10}$$

замкнутых p-звенных бильярдных траекторий.

Доказательство. Если $p = 2$ или если M лежит в гиперповерхности, ограничивающей строго выпуклую область в $\mathbb{R}^n$, то лемма уже доказана в [7].

В противном случае нужно пошевелить вложение $M \to \mathbb{R}^n$ так, чтобы это условие выполнялось. Сделать это несложно: $M \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, и, очевидно, можно продеформировать $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ так, чтобы M оказалось на сфере большого радиуса. Эту деформацию можно сделать сколь угодно малой на самом M. В силу леммы 3.5 количество замкнутых бильярдных траекторий не меняется, а M становится строго выпуклым. Лемма доказана. □

Так как при $p = 2$ всё уже доказано, то в дальнейшем в этом параграфе мы можем предполагать, что $p > 2$.

Введём следующие функции:

$$\begin{aligned} f_2 &= \langle a, x_1 - x_2 \rangle : S^{n-1} \times M \times M \to \mathbb{R}, \\ f_k &= \sum_{i \in \mathbb{Z}_k} \langle a_i, x_i - x_{i+1} \rangle : (S^{n-1})^{\times k} \times M^{\times k} \to \mathbb{R},\ k \geqslant 3, \end{aligned} \tag{11}$$

где $a, a_i \in S^{n-1} = \{u_1^2 + \dots + u_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$, $x_i \in M$ и, как раньше, $i = i + k$. Здесь $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ и $M \subset \mathbb{R}^n$, то есть корректно определены скалярные произведения в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 3.2. *Если $(x_1, \dots, x_k)$ — замкнутая k-звенная бильярдная траектория, то есть критическая точка функции*

$$l_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}_k} \|x_i - x_{i+1}\| : M^{\times k} \to \mathbb{R}, \tag{12}$$

то

$$P_0 = \left(\frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}, \frac{x_2 - x_3}{\|x_2 - x_3\|}, \dots, \frac{x_k - x_1}{\|x_k - x_1\|}, x_1, x_2, \dots, x_k \right) \tag{13}$$

— критическая точка функции f_k. При $k = 2$, соответственно,

$$P_0 = \left(\frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}, x_1, x_2 \right) \tag{14}$$

— критическая точка функции f_2.

Доказательство. Пусть $P_0 = (a_1, \dots, a_k, x_1, \dots, x_k)$ — такая критическая точка функции f_k, что $x_i \neq x_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{Z}_k$. Тогда для всех i выполнены условия $\frac{\partial f_k}{\partial a_i}(P_0) = 0$ и $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(P_0) = 0$. Из первого условия имеем

$$x_i - x_{i+1} \perp T_{a_i} S^{n-1}, \tag{15}$$

то есть $a_i \parallel x_i - x_{i+1}$. Второе условие означает, что

$$a_{i-1} - a_i \perp T_{x_i} M. \tag{16}$$

Пусть теперь $(x_1, \dots, x_k)$ — критическая точка функции l_k. Это означает, что

$$\frac{x_i - x_{i+1}}{\|x_i - x_{i+1}\|} - \frac{x_{i-1} - x_i}{\|x_{i-1} - x_i\|} \perp T_{x_i} M. \tag{17}$$

Положим $a_i = \frac{x_i - x_{i+1}}{\|x_i - x_{i+1}\|}$. Лемма доказана. □

Лемма 3.3. *Предположим, что $P_0 = (a_1, \dots, a_k, x_1, \dots, x_k)$ — критическая точка функции f_k, где $k > 2$, и некоторые из x_i совпадают. А именно, пусть $\beta_1, \dots, \beta_{k'}$ — такие натуральные числа, что*

1. $\beta_1, \dots, \beta_{k'} \geqslant 1$,
2. $\beta_1 + \dots + \beta_{k'} = k$,
3. $1 < k' < k$,

и α_i обозначает сумму $\alpha_i = \beta_1 + \dots + \beta_i$. Предположим, что x_i удовлетворяют условиям

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & \dots & = & x_{\alpha_1} & \neq & \\ x_{\alpha_1+1} & = & \dots & = & x_{\alpha_2} & \neq & \\ & & \vdots & & & & \\ x_{\alpha_{k'-1}+1} & = & \dots & = & x_k & \neq & x_1. \end{array} \tag{18}$$

Тогда имеют место следующие свойства:

1. *Точка $P_0' = (a_1, a_{\alpha_1+1}, \dots, a_{\alpha_{k'-1}+1}, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{k'}})$ является критической для функции $f_{k'}$.*
2. *Точка P_0 принадлежит критическому многообразию M_0, заданному условиями*

$$\begin{array}{llll} a_2 - a_1, & \dots, & a_{\alpha_1} - a_{\alpha_1 - 1}, & a_{\alpha_1+1} - a_{\alpha_1} \perp T_{x_{\alpha_1}} M, \\ a_{\alpha_1+2} - a_{\alpha_1+1}, & \dots, & a_{\alpha_2} - a_{\alpha_2-1}, & a_{\alpha_2+1} - a_{\alpha_2} \perp T_{x_{\alpha_2}} M, \\ & \vdots & & \\ a_{\alpha_{k'-1}+2} - a_{\alpha_{k'-1}+1}, & \dots, & a_{\alpha_{k'}} - a_{\alpha_{k'}-1}, & a_1 - a_k \perp T_{x_k} M. \end{array} \tag{19}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, рассмотрим самый простой случай $x_1 = x_2$ и $x_i \neq x_{i+1}$ для $i \neq 1$. Как и выше, мы, очевидно, имеем

$$a_i \parallel x_i - x_{i+1}, \quad i \neq 1, \tag{20}$$

и

$$a_i - a_{i+1} \perp T_{x_i} M, \quad i \in \mathbb{Z}_k, \tag{21}$$

что для вершины $x_1 = x_2$ даёт $a_k - a_1 \perp T_{x_1} M$ и $a_1 - a_2 \perp T_{x_1} M$. Сложив эти два условия, получаем, что $a_k - a_2 \perp T_{x_1} M$, а все возможные положения для a_1 образуют сферу размерности $n - m - 1$. Если $n = m + 1$, то эта сфера представляет из себя пару точек, но в дальнейших рассмотрениях у нас всегда будет выполнено неравенство $n \geqslant m+2$, поэтому мы не уделяем особого внимания случаю $n = m + 1$.

Если $k' < k - 1$, то аналогичные рассуждения тоже полностью доказывают лемму с той лишь разницей, что соответствующие критические многообразия являются не сферами, а произведениями сфер. $\square$

Замечание 3.1. Также существует критическое многообразие $M^{(0)}$, заданное условиями

$$\begin{aligned} &x_1 = \dots = x_k = x \in M, \\ &a_i - a_j \perp T_x M, \ i \neq j. \end{aligned} \tag{22}$$

Оно является расслоением над M со слоем, определённым вторым из этих условий.

Лемма 3.4. *Пусть $(x_1, \dots, x_k)$ — невырожденная критическая точка функции l_k и её индекс Морса равен μ. Тогда соответствующая критическая точка*

$$P_0 = (a_1, \dots, a_k, x_1, \dots, x_k), \quad a_i = \frac{x_i - x_{i+1}}{\|x_i - x_{i+1}\|}, \tag{23}$$

функции f_k тоже невырождена и её индекс Морса равен $\mu + k(n-1)$ для $k > 2$ или $\mu + n - 1$ для $k = 2$.

Доказательство. Пусть $P = (b_1, \dots, b_k, y_1 \dots, y_k)$ лежит в маленькой окрестности рассматриваемой критической точки P_0. Введём координаты в этой окрестности следующим образом. Предположим, что

$$y_i = y_i(t_i), \tag{24}$$

где $t_i \in \mathbb{R}^m$ — некоторая параметризация для y_i, а

$$b_i = b_i(s_i), \tag{25}$$

где s_i — параметризация для b_i, определённая следующим образом. Пусть A_i — какой-то ортогональный оператор $\mathbb{R}^{n-1} \to (y_i - y_{i+1})^\perp$, $s_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ — наш параметр. Положим

$$b_i = \frac{\|s_i\| A_i s_i + \frac{y_i - y_{i+1}}{\|y_i - y_{i+1}\|}}{\left\| \|s_i\| A_i s_i + \frac{y_i - y_{i+1}}{\|y_i - y_{i+1}\|} \right\|} = \frac{\|s_i\| A_i s_i + \frac{y_i - y_{i+1}}{\|y_i - y_{i+1}\|}}{\sqrt{1 + \|s_i\|^2}}. \tag{26}$$

Очевидно, $\|b_i\| = 1$ и $b(0) = \frac{y_i - y_{i+1}}{\|y_i - y_{i+1}\|}$. Так как $A_i s_i \perp y_i - y_{i+1}$, то

$$\langle b_i, y_i - y_{i+1} \rangle = \frac{\|y_i - y_{i+1}\|}{\sqrt{1 + \|s_i\|^2}}. \tag{27}$$

Таким образом, имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} f_k(P) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}_k} \langle b_i, y_i - y_{i+1} \rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}_k} \frac{\|y_i - y_{i+1}\|}{\sqrt{1 + \|s_i\|^2}} = \\ &= l_k(y_1, \dots, y_k) - \frac{1}{2} \sum \|s_i\|^2 + \dots . \end{aligned} \tag{28}$$

Лемма доказана. □

Замечание 3.2. Предположим, что $x_i = x_{i+1}$ для какого-то i. Как было показано выше, в этом случае имеется несколько критических многообразий, соответствующих критическим точкам функций $f_{k'}$, $k' < k$. Если $(x_1, \ldots, x_{k'})$ — невырожденная критическая точка функции $l_{k'}$, то соответствующее критическое многообразие тоже невырождено, равно как невырождено и критическое многообразие $M^{(0)}$, для которого $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$.

Лемма 3.5. *Предположим, что $F : M \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ — гладкая гомотопия в классе общих вложений. Тогда F сохраняет количество замкнутых k-звенных бильярдных траекторий.*

Доказательство. Рассмотрим гомотопию $F : M \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Обозначим функции f_k и l_k, соответствующие вложению F_t, как f_{kt} и l_{kt}.

Из предыдущих утверждений мы знаем, что общая картина такова. Замкнутые бильярдные траектории (они же невырожденные критические точки функции l_k) соответствуют невырожденным критическим точкам гладкой функции f_k, определённой на гладком многообразии

$$(S^{n-1})^{\times k} \times M^{\times k}. \tag{29}$$

В силу предположений леммы f_{kt} имеет конечное множество изолированных критических точек и некоторое количество невырожденных критических многообразий, соответствующих изолированным критическим точкам функций $f_{k't}$ с $k' < k$.

Таким образом, при деформации вложения $F_0 : M \to \mathbb{R}^n$ изолированные критические точки функции f_k могли бы исчезать и появляться только из невырожденных критических многообразий. Несложно видеть, что это невозможно. Действительно, предположим, что при $t = t_0$ появилась такая невырожденная критическая точка, то есть существует M_t — невырожденное критическое многообразие функции f_{kt} для достаточно малого $|t - t_0|$, а при $t > t_0$ имеется невырожденная критическая точка P_t, такая, что $\lim_{t\to t_0+0} P_t = P_0 \in M_{t_0}$. В силу теории Морса–Ботта в окрестности $U \subset (S^{n-1})^{\times k} \times M^{\times k} \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ точки P_{t_0} можно ввести такие координаты $t, X^1, \ldots, X^N$, что M_t задаётся условиями $X^1 = \cdots = X^r = 0$, а

$$f_{kt} = C(t) - (X^{r+1})^2 - \cdots - (X^{r+s})^2 + (X^{r+s+1})^2 + \cdots + (X^N)^2. \tag{30}$$

Из этой формулы очевидно, что тогда в U нет других критических точек функцииf_{kt}, кроме многообразия M_t. Это противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

4. Вычисления для букета сфер

Лемма 4.1. *Пусть M — гладкое замкнутое m-мерное многообразие, $k_i = \dim H_i(M;\mathbb{Z}_2)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $B = \sum_{i=0}^m k_i$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{m} ik_i = \frac{mB}{2}. \tag{31}$$

Доказательство. Используя двойственность Пуанкаре, получаем:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} ik_i = \sum_{i=0}^{m} ik_i = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}(ik_i + (m-i)\,k_{m-i}) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}(ik_i + (m-i)\,k_i) = \frac{mB}{2}. \qquad \square\end{aligned} \tag{32}$$

Лемма 4.2. *Пусть M — гладкое замкнутое связное m-мерное многообразие, $p > 3$ — простое число, $k_i = \dim H_i(M;\mathbb{Z}_2)$, $B = \sum_{i=0}^m k_i$. Пусть*

$$X = S^m \vee S_1^{m-1} \vee \cdots \vee S_{k_{m-1}}^{m-1} \vee \cdots \vee S_1^1 \vee \cdots \vee S_{k_1}^1 \tag{33}$$

— букет сфер, группы гомологий которого изоморфны группам гомологий данного многообразия. Тогда

$$\sum_{i=0}^{pm} \dim H_i(X^{\times p}/D_p, \Delta_X;\mathbb{Z}_2) \geqslant \frac{(B-1)((B-1)^{p-1}-1)}{2p} + \frac{mB}{2}(p-1). \tag{34}$$

Доказательство. Рассмотрим букет сфер X. Пусть X_0 обозначает общую точку всех сфер букета. Пусть X_i — i-я из сфер букета, из которой выкинута точка X_0, так что топологически X_i — это евклидово пространство $\mathbb{R}^q$, а $X = X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_{B-1}$ — клеточное разбиение.

Очевидно,

$$X^{\times p} = \bigcup_{i_1,\ldots,i_p} X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_p} \tag{35}$$

— клеточное разбиение декартовой степени $X^{\times p}$. Нам нужно построить такое его подразбиение, что

- оно инвариантно относительно действия группы диэдра D_p,
- диагональ Δ_X — клеточное подпространство.

Заметим, что если $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \dots \neq i_p \neq i_1$, то $X_{i_1\dots i_p} = X_{i_1} \times \dots \times X_{i_p}$ не пересекает диагональ. Следовательно, $X_{i_1\dots i_p}$ — клетка разбиения, которое мы строим, её граница равна нулю.

Теперь рассмотрим такое $X_{i_1\dots i_p} = X_{i_1} \times \dots \times X_{i_p}$, что $i_\alpha = i_{\alpha+1}$ для какого-то $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Сначала предположим, что не все i_α совпадают. Не ограничивая общности, можем считать, что $i_1 = \dots = i_{\beta_1} \neq i_{\beta_1+1} = \dots = i_{\beta_2} \neq \dots \neq i_{\beta_u+1} = \dots = i_p \neq i_1$. Мы строим подразбиения для всех $X_i \times X_i \times \dots \times X_i$, а подразбиение для всего $X_{i_1\dots i_p}$ будет их тензорным произведением.

Каждое X_i гомеоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^q$. Итак, мы имеем дело с декартовой степенью $(\mathbb{R}^q)^{\times\beta}$. Пусть $x_1^j, \dots, x_q^j$ — координаты на j-м экземпляре $\mathbb{R}^q$. Клетка задаётся тогда следующими условиями:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1^1 & \varepsilon_1^1 & x_1^2 & \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_1^{\beta-1} & x_1^\beta, \\ x_2^1 & \varepsilon_2^1 & x_2^2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_2^{\beta-1} & x_2^\beta, \\ & & & \vdots & & & \\ x_q^1 & \varepsilon_q^1 & x_q^2 & \varepsilon_q^2 & \dots & \varepsilon_q^{\beta-1} & x_q^\beta, \end{array} \tag{36}$$

где каждое ε_*^* — это один из знаков $<$, $>$, $=$.

Теперь рассмотрим $X_{i_1\dots i_p}$, для которого $i_1 = \dots = i_p = i$. Тогда клеточное подразбиение для этого множества задаётся той же самой конструкцией, но в которую добавлены неравенства $x_j^\beta \varepsilon_j^\beta x_j^1$. Очевидно, $\varepsilon_j^1, \varepsilon_j^2, \dots, \varepsilon_j^\beta$ не все одновременно равны $<$ или $>$, иначе эта система неравенств несовместна.

Мы построили клеточное разбиение и соответствующий цепной комплекс для пространства $X^{\times p}$. Обозначим этот цепной комплекс $C(X^{\times p})$. Они индуцируют клеточное разбиение и цепной комплекс для фактора $X^{\times p}/D_p$ со стянутой в точку диагональю. Обозначим этот цепной комплекс $C(X^{\times p}/D_p, \Delta_X)$. Наша цель — вычислить сумму его чисел Бетти

$$\sum \dim H_i(X^{\times p}/D_p, \Delta_X). \tag{37}$$

Сначала рассмотрим $X_{i\dots i}$ для фиксированного $i > 0$. Пусть $\dim X_i = q$. Заметим, что все $X_{i_1\dots i_p}$, такие, что i_α равняется или

0, или i для всех $\alpha = 1, \ldots, p$, образуют цепной подкомплекс. Обозначим его $C^+(X_{i\ldots i})$. Более того, вне $C^+(X_{i\ldots i})$ не существует таких клеток, что их алгебраическая граница содержит члены, лежащие в $C^+(X_{i\ldots i})$. Следовательно, $C^+(X_{i\ldots i})$ — прямое слагаемое в $C(X^{\times p}/D_p, \Delta_X)$. Очевидно, $C^+(X_{i\ldots i})$ совпадает с цепным комплексом для сферы $C((S^q)^{\times p}/D_p, \Delta_{S^q})$. В силу результатов Фарбера и Табачникова (см. [5] и [6]) сумма чисел Бетти рассматриваемого подкомплекса равняется

$$\sum \dim H_\alpha(C^+(X_{i\ldots i}); \mathbb{Z}_2) = q(p-1). \tag{38}$$

Суммируя по всем i и используя лемму 4.1, находим, что вклад в сумму чисел Бетти (37) равен

$$\frac{mB}{2}(p-1). \tag{39}$$

Рассмотрим теперь $X_{i_1\ldots i_p} = X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_p}$ для $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \cdots \neq i_p \neq i_1$. Каждое из этих $X_{i_1\ldots i_p}$ — это такая клетка, что

- её алгебраическая граница равна нулю,
- она не содержится в алгебраической границе никакой другой клетки.

Следовательно, она образует цепной подкомплекс в комплексе $C(X^{\times p}/D_p, \Delta_X)$, состоящий только из одной группы с одной образующей и нулевым граничным оператором. Обозначим этот подкомплекс $C(X_{i_1\ldots i_p})$. Его вклад в вычисляемую сумму (37) равен 1.

Из комбинаторики хорошо известно, что количество разных $X_{i_1\ldots i_p}$, таких, что $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \cdots \neq i_p \neq i_1$, равняется

$$(B-1)((B-1)^{p-1}-1). \tag{40}$$

В любом случае докажем это. Предположим, что $N(p)$ — это количество наборов $(i_1, \ldots, i_p)$, таких, что $0 \leqslant i_\alpha \leqslant B-1$ и $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \cdots \neq i_p \neq i_1$. Пусть теперь p — не обязательно простое. Тогда имеем

$$N(p) = B(B-1)^{p-1} - N(p-1). \tag{41}$$

Действительно, i_1 можно выбрать B способами. Каждое i_α, $\alpha = 2, \ldots, p$, можно выбрать $B-1$ способами так, что оно отлично от $i_{\alpha-1}$. Это даёт нам $B(B-1)^{p-1}$ вариантов. Если же получилось

$i_1 = i_p$, то $(i_1, i_2, \ldots, i_{p-1})$ — правильный набор из $(p-1)$ чисел. Снова вспоминая, что p — нечётное простое число, имеем

$$\begin{aligned} N(p) &= B(B-1)^{p-1} - N(p-1) = \\ &= B(B-1)^{p-1} - B(B-1)^{p-2} + N(p-2) = \\ &= B(B-1)^{p-1} - B(B-1)^{p-2} + B(B-1)^{p-3} - \cdots - B(B-1) = \\ &= B(1-B)\frac{1-(1-B)^{p-1}}{1-(1-B)} = (B-1)((B-1)^{p-1}-1). \end{aligned} \tag{42}$$

Мы вычислили количество разных $X_{i_1 \ldots i_p}$ в цепном комплексе $C(X^p)$, которые не пересекаются с диагональю. Это даёт нам

$$\frac{(B-1)((B-1)^{p-1}-1)}{2p} \tag{43}$$

после факторизации по действию группы диэдра D_p. Лемма доказана. □

Литература

1. G. Birkhoff, *Dynamical Systems.*[5] New York, 1927.
2. M. Morse, S. S. Cairns, *Critical Points Theory in Global Analysis and Differential Topology.* Academic Press, New York, 1969.
3. F. Takens, J. White, *Morse theory of double normals of immersions.* — Indiana Univ. Math. J. **21**, No. 1 (1971), 11–17.
4. P. Pushkar, *Diameters of immersed manifolds and of wave fronts.* — C. R. Acad. Sci. Paris **326**, No. 2 (1998), 201–205.
5. M. Farber, S. Tabachnikov, *Topology of cyclic configuration spaces and periodic trajectories of multi-dimensional billiards.* — Topology **41**, No. 3 (2002), 553–589.
6. M. Farber, S. Tabachnikov, *Periodic trajectories in 3-dimensional convex billiards.* — Manuscripta Math. **108**, No. 4 (2002), 431–437.
7. F. S. Duzhin, *Lower bounds for the number of closed billiard trajectories of period 2 and 3 in manifolds embedded in Euclidean space.* — IMRN 2003, No. 8, 425–449.

Duzhin F. S. Lower bounds on the number of closed trajectories of generalized billiards.

The mathematical study of periodic billiard trajectories is a classical question and goes back to George Birkhoff. A billiard is a motion of a particle when a field of force is lacking. Trajectories of such a particle are geodesics. A billiard ball rebounds from the boundary of a given domain making the angle of incidence equal the angle of reflection.

[5] Имеется перевод: Дж. Биркгоф, *Динамические системы.* Москва, 1942.

Let k be a fixed integer. Birkhoff proved a lower estimate for the number of closed billiard trajectories of length k in an arbitrary plane domain. We give a general definition of a closed billiard trajectory when the billiard ball rebounds from a submanifold of a Euclidean space. Besides, we show how in this case one can apply the Morse inequalities using the natural symmetry (a closed polygon may be considered starting at any of its vertices and with the reversed direction). Finally, we prove the following estimate.

Let M be a smooth closed m-dimensional submanifold of a Euclidean space, $p > 2$ a prime integer. Then M has at least

$$\frac{(B-1)((B-1)^{p-1}-1)}{2p} + \frac{mB}{2}(p-1)$$

closed billiard trajectories of length p.

Royal Institute of Technology,
Stockholm
E-mail: fduzhin@gmail.com

Поступило 17 июля 2005 г.