Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 325, 2005 г.

П. П. Кулиш, П. Д. Рясиченко

СПИНОВАЯ ЦЕПОЧКА, СВЯЗАННАЯ С КВАНТОВОЙ СУПЕРАЛГЕБРОЙ $\mathrm{sl}_q(1 \mid 1)$

1. Введение

Модели, решаемые с помощью квантового метода обратной задачи (КМОЗ), связаны с R-матрицами, удовлетворяющими уравнению Янга–Бакстера (ЯБ) [1, 2]. Каждому решению уравнения ЯБ сопоставляется интегрируемая система [3–5], исследование которой возможно в рамках КМОЗ.

В работе [6] было установлено соответсвие между решениями обычного и градуированного уравнений ЯБ. Используя данное соответствие, решениям градуированного уравнения ЯБ, отвечающим квантовой супер態гебре $\mathrm{sl}_q(1 \mid 1)$, можно сопоставить спиновую цепочку с неэрмитовым гамильтонианом, R-матрица которой удовлетворяет обычному уравнению ЯБ. Для нахождения спектра цепочки применим КМОЗ.

Цель данной работы заключается в том, чтобы на примере относительно простой (фермионной) модели продемонстрировать основные положения КМОЗ и получить явные выражения для спектра энергии системы и статистической суммы модели на двумерной решетке с граничными условиями типа доменной стенки.

2. Алгебраический анзац Бете. Уравнения Бете

Из работы [6] следует, что решениям градуированного уравнения ЯБ, отвечающим квантовой супералгебре $\mathrm{sl}_q(1 \mid 1)$, соответствует R-матрица $R(\lambda)$ вида

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} \sinh(\lambda+\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p\sinh\lambda & e^{\alpha\lambda}\sinh\eta & 0 \\ 0 & e^{-\alpha\lambda}\sinh\eta & p^{-1}\sinh\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(\eta-\lambda) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

Работа частично поддержана грантами РФФИ 05-01-00899, 05-01-00922 и CRDF RMU1-2622-ST-04.

удовлетворяющая уравнению ЯБ

$$R_{12}(\lambda-\mu)R_{13}(\lambda)R_{23}(\mu)=R_{23}(\mu)R_{13}(\lambda)R_{12}(\lambda-\mu),$$

где $R_{12}(\lambda-\mu)$, $R_{13}(\lambda)$, $R_{23}(\mu)$ определяются стандартным образом. Данная R-матрица регулярна, так как $R(0)=\sinh\eta\mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ – оператор перестановки, действующий в $\mathbf{C^2}\otimes\mathbf{C^2}$. Плотность гамильтониана строится по правилу

$$h_{n,n+1}=\frac{d\widehat{R}}{d\lambda}(0),\qquad \widehat{R}(\lambda)=\mathcal{P}R(\lambda). \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2), получаем

$$\widehat{R}(\lambda)=\begin{pmatrix}\sinh(\lambda+\eta) & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{-\alpha\lambda}\sinh\eta & p^{-1}\sinh\lambda & 0\\ 0 & p\sinh\lambda & e^{\alpha\lambda}\sinh\eta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sinh(\eta-\lambda)\end{pmatrix},$$

$$\frac{d\widehat{R}}{d\lambda}(0)=\begin{pmatrix}\cosh\eta & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\alpha\sinh\eta & p^{-1} & 0\\ 0 & p & \alpha\sinh\eta & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\cosh\eta\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Из (3) для $h_{n,n+1}$ имеем:

$$\begin{aligned}h_{n,n+1}={}&\frac{\cosh\eta}{2}(I_n\otimes\sigma^3_{n+1}+\sigma^3_n\otimes I_{n+1})+\\ &+\frac{\alpha\sinh\eta}{2}(I_n\otimes\sigma^3_{n+1}-\sigma^3_n\otimes I_{n+1})+\\ &+\frac{p^{-1}}{4}(\sigma^1_n\otimes\sigma^1_{n+1}-i\sigma^1_n\otimes\sigma^2_{n+1}+i\sigma^2_n\otimes\sigma^1_{n+1}+\sigma^2_n\otimes\sigma^2_{n+1})+\\ &+\frac{p}{4}(\sigma^1_n\otimes\sigma^1_{n+1}+i\sigma^1_n\otimes\sigma^2_{n+1}-i\sigma^2_n\otimes\sigma^1_{n+1}+\sigma^2_n\otimes\sigma^2_{n+1}).\end{aligned} \tag{4}$$

Для периодических граничных условий гамильтониан H в терминах сигма матриц Паули σ^3, $\sigma^{\pm}=\frac{1}{2}(\sigma^1\pm i\sigma^2)$ имеет вид

$$\begin{aligned}H=\frac{1}{\sinh\eta}\sum_{n=1}^{N}h_{n,n+1}=\frac{1}{\sinh\eta}\Bigg[&\frac{p+p^{-1}}{4}\sum_{n=1}^{N}(\sigma^1_n\sigma^1_{n+1}+\sigma^2_n\sigma^2_{n+1})+\\ &+\frac{i(p-p^{-1})}{4}\sum_{n=1}^{N}(\sigma^1_n\sigma^2_{n+1}-\sigma^2_n\sigma^1_{n+1})\Bigg]+\coth\eta\sum_{n=1}^{N}\sigma^3_n=\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sinh\eta}\left[\frac{p+p^{-1}}{2}\sum_{n=1}^{N}(\sigma_n^+\sigma_{n+1}^- + \sigma_n^-\sigma_{n+1}^+) + \right. \tag{5}$$

$$\left. + \frac{(p-p^{-1})}{2}\sum_{n=1}^{N}(\sigma_n^-\sigma_{n+1}^+ - \sigma_n^+\sigma_{n+1}^-)\right] + \coth\eta\sum_{n=1}^{N}(2\sigma_n^+\sigma_n^- - I).$$

Полученный гамильтониан не являеися эрмитовым для произвольного значения параметра p. Но оператор H будет эрмитовым, если $p = e^{i\phi}$, $\phi \in \mathbf{R}$. При $p = \pm 1$ гамильтониан (5) переходит в гамильтониан XX цепочки в магнитном поле. XX модель является частным случаем XY модели, рассмотренной в [7].

L-оператор как матрица во вспомогательном пространстве записывается в виде

$$L_{a,n}(\lambda) = \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sinh(\lambda+\eta)}{2}(I_n+\sigma_n^3) + \frac{p\sinh\lambda}{2}(I_n-\sigma_n^3) & e^{\alpha\lambda}\sinh\eta\sigma_n^- \\ e^{-\alpha\lambda}\sinh\eta\sigma_n^+ & \frac{\sinh(\eta-\lambda)}{2}(I_n-\sigma_n^3) + \frac{p^{-1}\sinh\lambda}{2}(I_n+\sigma_n^3) \end{pmatrix},$$

где I_n – единичный оператор в квантовом пространстве, индекс a относится к вспомогательному пространству, а n – к квантовому. По L-операторам строится матрица монодромии $T_a(\lambda)$:

$$T_a(\lambda) = L_{a,N}(\lambda)\ldots L_{a,1}(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Матрицы $T(\lambda)$ также сплетаются R-матрицей (1) [3, 4]:

$$R_{a_1,a_2}(\lambda-\mu)T_{a_1}(\lambda)T_{a_2}(\mu) = T_{a_2}(\mu)T_{a_1}(\lambda)R_{a_1,a_2}(\lambda-\mu), \tag{8}$$

где $T_{a_1}(\lambda) = T(\lambda)\otimes I$, $T_{a_2}(\mu) = I\otimes T(\mu)$.

Тождество (8) позволяет установить перестановочные соотношения между элементами матрицы монодромии. Для большей универсальности введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} g_1(\lambda,\mu) &= \sinh(\lambda-\mu+\eta), & g_2(\lambda,\mu) &= p\sinh(\lambda-\mu), \\ g_3(\lambda,\mu) &= e^{\alpha(\lambda-\mu)}\sinh\eta, & g_4(\lambda,\mu) &= e^{-\alpha(\lambda-\mu)}\sinh\eta, \\ g_5(\lambda,\mu) &= p^{-1}\sinh(\lambda-\mu), & g_6(\lambda,\mu) &= \sinh(\eta-\lambda+\mu). \end{aligned}$$

Тогда элементы матрицы монодромии будут удовлетворять соотношениям 6-вершинной модели [4]:

$$
\begin{aligned}
[A(\lambda), A(\mu)] &= 0, \\
A(\lambda)B(\mu) &= \frac{g_1(\mu,\lambda)}{g_5(\mu,\lambda)}B(\mu)A(\lambda) - \frac{g_3(\mu,\lambda)}{g_5(\mu,\lambda)}B(\lambda)A(\mu), \\
A(\lambda)C(\mu) &= \frac{g_1(\lambda,\mu)}{g_2(\lambda,\mu)}C(\mu)A(\lambda) - \frac{g_3(\lambda,\mu)}{g_2(\lambda,\mu)}C(\lambda)A(\mu), \\
[A(\lambda), D(\mu)] &= \frac{g_4(\lambda,\mu)}{g_2(\lambda,\mu)}C(\mu)B(\lambda) - \frac{g_3(\lambda,\mu)}{g_2(\lambda,\mu)}C(\lambda)B(\mu), \\
B(\lambda)A(\mu) &= \frac{g_1(\mu,\lambda)}{g_2(\mu,\lambda)}A(\mu)B(\lambda) - \frac{g_4(\mu,\lambda)}{g_2(\mu,\lambda)}A(\lambda)B(\mu), \\
B(\lambda)B(\mu) &= \frac{g_6(\lambda,\mu)}{g_1(\lambda,\mu)}B(\mu)B(\lambda), \\
B(\lambda)C(\mu) &= \frac{g_5(\lambda,\mu)}{g_2(\lambda,\mu)}C(\mu)B(\lambda)+ \\
&\quad + \frac{g_3(\lambda,\mu)}{g_2(\lambda,\mu)}D(\mu)A(\lambda) - \frac{g_3(\lambda,\mu)}{g_2(\lambda,\mu)}D(\lambda)A(\mu), \\
B(\lambda)D(\mu) &= \frac{g_6(\lambda,\mu)}{g_2(\lambda,\mu)}D(\mu)B(\lambda) - \frac{g_3(\lambda,\mu)}{g_2(\lambda,\mu)}D(\lambda)B\mu, \\
C(\lambda)A(\mu) &= \frac{g_1(\lambda,\mu)}{g_5(\lambda,\mu)}A(\mu)C(\lambda) - \frac{g_4(\lambda,\mu)}{g_5(\lambda,\mu)}A(\lambda)C(\mu), \\
C(\lambda)B(\mu) &= \frac{g_2(\lambda,\mu)}{g_5(\lambda,\mu)}B(\mu)C(\lambda) + \frac{g_4(\lambda,\mu)}{g_5(\lambda,\mu)}(A(\mu)D(\lambda) - A(\lambda)D(\mu)), \\
C(\lambda)C(\mu) &= \frac{g_1(\lambda,\mu)}{g_6(\lambda,\mu)}C(\mu)C(\lambda), \\
C(\lambda)D(\mu) &= \frac{g_6(\mu,\lambda)}{g_5(\mu,\lambda)}D(\mu)C(\lambda) - \frac{g_3(\mu,\lambda)}{g_5(\lambda)}D(\lambda)C(\mu), \\
[D(\lambda), A(\mu)] &= \frac{g_3(\lambda,\mu)}{g_5(\lambda,\mu)}B(\mu)C(\lambda) - \frac{g_4(\lambda,\mu)}{g_5(\lambda,\mu)}B(\lambda)C(\mu), \\
D(\lambda)B(\mu) &= \frac{g_6(\lambda,\mu)}{g_5(\lambda,\mu)}B(\mu)D(\lambda) - \frac{g_4(\lambda,\mu)}{g_5(\lambda,\mu)}B(\lambda)D(\mu), \\
D(\lambda)C(\mu) &= \frac{g_6(\mu,\lambda)}{g_2(\mu,\lambda)}C(\mu)D(\lambda) - \frac{g_4(\mu,\lambda)}{g_2(\mu,\lambda)}C(\lambda)D(\mu), \\
[D(\lambda), D(\mu)] &= 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Следует отметить, что в отличие от XXX и XXZ моделей [3, 4, 8] для рассматриваемой R-матрицы $[B(\lambda), B(\mu)] \neq 0$, $[C(\lambda), C(\mu)] \neq 0$.

Из определения матрицы монодромии (7) и вида L-оператора (6) следует, что

$$T(\lambda)\Omega = \begin{pmatrix} \sinh^N(\lambda+\eta)\Omega & B(\lambda)\Omega \\ 0 & \left(\dfrac{\sinh\lambda}{p}\right)^N \Omega \end{pmatrix},$$

$$\Omega = \prod_{n=1}^{N} \otimes e_n^+, \qquad e_n^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Из (10) находим, что $A(\lambda)\Omega = \alpha^N(\lambda)\Omega$, $D(\lambda)\Omega = \delta^N(\lambda)\Omega$, где $\alpha(\lambda) = \sinh(\lambda+\eta)$, $\delta(\lambda) = \sinh(\lambda)/p$. В то же время $C(\lambda)\Omega = 0$. Из соотношений (9) следует, что

$$A(\lambda)B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_l) = \prod_{k=1}^{l} \frac{g_1(\lambda_k,\lambda)}{g_5(\lambda_k,\lambda)} B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_l)A(\lambda)+ \tag{11}$$

$$+\sum_{k=1}^{l} M_k(\lambda,\lambda_1,\ldots,\lambda_l)B(\lambda)B(\lambda_1)\ldots\widehat{B(\lambda_k)}\ldots B(\lambda_l)A(\lambda_k), \tag{12}$$

где $\widehat{B(\lambda_j)}$ означает, что множитель $B(\lambda_j)$ пропущен. Для вычисления коэффициента $M_k(\lambda,\lambda_1,\ldots,\lambda_l)$ опять используем соотношения (9) [3]:

$$A(\lambda)B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_j)\ldots B(\lambda_l) = \prod_{n=1}^{j-1} \frac{g_6(\lambda_n,\lambda_j)}{g_1(\lambda_n,\lambda_j)} A(\lambda)B(\lambda_j)B(\lambda_1)\ldots\widehat{B(\lambda_j)}$$

$$\ldots B(\lambda_l) = \prod_{n=1}^{j-1} \frac{g_6(\lambda_n,\lambda_j)}{g_1\lambda_n,\lambda_j)} \left(\frac{g_1(\lambda_j,\lambda)}{g_5(\lambda_j,\lambda)} B(\lambda_j)A(\lambda)B(\lambda_1)\ldots\widehat{B(\lambda_j)}\ldots B(\lambda_l) - \right.$$

$$\left. - \frac{g_3(\lambda_j,\lambda)}{g_5(\lambda_j,\lambda)} B(\lambda)A(\lambda_j)B(\lambda_1)\ldots\widehat{B(\lambda_j)}\ldots B(\lambda_l) \right).$$

Первое слагаемое в последнем выражении не даёт вклада в коэффициент $M_j(\lambda,\lambda_1,\ldots,\lambda_l)$, так как в нём оператор $A(\lambda)$ стоит после оператора $B(\lambda_j)$. При дальнейших перестановках оператора $A(\lambda)$ с операторами $B(\lambda_k)$, стоящими правее $A(\lambda)$, оператор $B(\lambda_j)$ не исчезает. Чтобы получить коэффициент $M_j(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, нужно во втором слагаемом при перестановке оператора $A(\lambda)$ с операторами $B(\lambda_k)$, стоящими правее, учитывать только тот член общего перестановочного соотношения операторов $A(\lambda)$ и $B(\mu)$ из (9), в котором операторы сохраняют свои аргументы. В итоге получаем:

$$M_j(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_l) = -\prod_{n=1}^{j-1} \frac{g_6(\lambda_n, \lambda_j)}{g_1(\lambda_n, \lambda_j)} \frac{g_3(\lambda_j, \lambda)}{g_5(\lambda_j, \lambda)} \prod_{k \neq j}^{l} \frac{g_1(\lambda_k, \lambda j)}{g_5(\lambda_k, \lambda_j)}.$$

Тот же способ для оператора $D(\lambda)$ даёт

$$D(\lambda)B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_l) = \prod_{k=1}^{l} \frac{g_6(\lambda, \lambda_k)}{g_5(\lambda, \lambda_k)} B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_l)D(\lambda) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} \widetilde{M}_k(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_l) B(\lambda) B(\lambda_1) \ldots \widehat{B(\lambda_k)} \ldots B(\lambda_l) D(\lambda_k), \tag{13}$$

$$\widetilde{M}_j(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_l) = -\prod_{n=1}^{j-1} \frac{g_6(\lambda_n, \lambda_j)}{g_1(\lambda_n, \lambda_j)} \frac{g_4(\lambda, \lambda_j)}{g_5(\lambda, \lambda_j)} \prod_{k \neq j}^{l} \frac{g_6(\lambda_j, \lambda_k)}{g_5(\lambda_j, \lambda_k)}.$$

Из (12) и (13) следует, что если выполнено условие

$$\alpha^N(\lambda_j) M_j(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_l) + \delta^N(\lambda_j) \widetilde{M}_j(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_l) = 0$$

для любого $j = 1, \ldots, l$, то вектор $B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_l)\Omega$ будет собственным вектором оператора $A(\lambda) + D(\lambda)$. Параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ должны удовлетворять системе уравнений Бете:

$$\frac{g_3(\lambda_j, \lambda)}{g_4(\lambda, \lambda_j)} \frac{g_5(\lambda, \lambda_j)}{g_5(\lambda_j, \lambda)} \frac{\alpha^N(\lambda_j)}{\delta^N(\lambda_j)} =$$

$$= -\prod_{k \neq j}^{l} \frac{g_6(\lambda_j, \lambda_k)}{g_1(\lambda_k, \lambda_j)} \frac{g_5(\lambda_k, \lambda_j)}{g_5(\lambda_j, \lambda_k)}, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{14}$$

В нашем случае уравнения (14) принимают вид

$$\left(\frac{p \sinh(\lambda_j + \eta)}{\sinh \lambda_j} \right)^N = (-1)^{l+1}, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{15}$$

Уравнения (15) имеют следующие решения:

$$\lambda_j = \frac{1}{2}\ln\frac{pe^{-\eta} - e^{\pi i \frac{l+1}{N} + 2\pi i \frac{n_j}{N}}}{pe^{\eta} - e^{\pi i \frac{l+1}{N} + 2\pi i \frac{n_j}{N}}}, \quad n_j = 0, \dots, N-1. \tag{16}$$

Хотя в уравнения (14) формально вошел параметр λ, но в уравнениях (15) он сократился, из чего следует, что бетевский вектор $B(\lambda_1)\dots B(\lambda_l)\Omega$ с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, удовлетворяющими уравнениям (15), является собственным сразу для всего семейства операторов $A(\lambda)+D(\lambda)$. Этот результат следовало ожидать, так как $[A(\lambda)+D(\lambda), A(\mu)+D(\mu)] = 0$ [3, 4]. Можно также написать выражение для собственных векторов гамильтониана (5) в терминах локальных операторов σ_n^- (координатный анзац Бете). Основа этого подхода изложена в книгах [4, 9].

Собственное значение $\Lambda(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_l)$ оператора $A(\lambda)+D(\lambda)$, соответсвующее бетевскому собственному вектору $B(\lambda_1)\dots B(\lambda_l)\Omega$, равно

$$\Lambda(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_l) = \alpha^N(\lambda)\prod_{k=1}^{l}\frac{g_1(\lambda_k, \lambda)}{g_5(\lambda_k, \lambda)} + \delta^N(\lambda)\prod_{k=1}^{l}\frac{g_6(\lambda, \lambda_k)}{g_5(\lambda, \lambda_k)} =$$

$$= (\sinh^N(\lambda+\eta) + (-1)^l(\sinh\lambda/p)^N)\prod_{k=1}^{l}\frac{p\sinh(\lambda_k - \lambda + \eta)}{\sinh(\lambda_k - \lambda)}. \tag{17}$$

Используя связь гамильтониана спиновой цепочки и операторов $A(\lambda)+D(\lambda)$ [3, 4], находим, что векторы $B(\lambda_1)\dots B(\lambda_l)\Omega$ с $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, удовлетворяющими уравнениям (15), являются собственными векторами гамильтониана, а соответствующие значения энергии $E(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ равны

$$E(\lambda_1, \dots, \lambda_l) = \frac{d}{d\lambda}\ln\Lambda(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_l)\mid_{\lambda=0} =$$

$$= N\coth\eta + \sum_{j=1}^{l}\frac{\sinh\eta}{\sinh\lambda_j\sinh(\lambda_j+\eta)}. \tag{18}$$

3. Квантовая алгебра симметрии спиновой системы

Перейдём в R-матрице (1) и L-операторе (6) к мультипликативному спектральному параметру $u = e^{\lambda}$. Введём параметр

$q = e^{\eta}$. В терминах нового спектрального параметра для R-матрицы (1) и L-оператора имеем

$$R_{a_1,a_2}(u/v)L_{a_1,n}(u)L_{a_2,n}(v) = L_{a_2,n}(v)L_{a_1,n}(u)R_{a_1,a_2}(u/v). \tag{19}$$

Рассмотрим L-операторы вида

$$L_a(u) = \begin{pmatrix} ua - u^{-1}c & u^{\alpha}(q-q^{-1})S^- \\ u^{-\alpha}(q-q^{-1})S^+ & ub - u^{-1}d \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где a, b, c, d, S^-, S^+ – пока произвольные операторы, действующие в некотором пространстве. Потребуем, чтобы L-оператор (20) удовлетворял соотношению (19) с R-матрицей (1), выраженной через мультипликативный параметр. L-оператором такого вида является оператор (6), выраженный через u. При этом

$$\begin{aligned} &a=\frac{1}{4}((q+p)I+(q-p)\sigma^3), && c=\frac{1}{4}((q^{-1}+p)I+(q^{-1}-p)\sigma^3),\\ &b=\frac{1}{4}((p^{-1}-q^{-1})I+(p^{-1}+q^{-1})\sigma^3), && d=\frac{1}{4}((p^{-1}-q)I+(p^{-1}+q)\sigma^3),\\ &S^- = \frac{1}{2}\sigma^-, && S^+ = \frac{1}{2}\sigma^+, \end{aligned}$$

где I – единичный оператор в $\mathbf{C}^2$.

Чтобы R-матрица и L-оператор содержали только u и u^{-1}, сделаем преобразование

$$\begin{aligned} &\widetilde{L}_a(u) = Q(u)L_a(u)Q^{-1}(u),\\ &\widetilde{R}_{a_1,a_2}(u/v) = Q(u)\otimes Q(v)R_{a_1,a_2}(u/v)Q^{-1}(u)\otimes Q^{-1}(v), \end{aligned} \tag{21}$$

где матрица $Q(u)$ выбирается в виде

$$Q(u) = \begin{pmatrix} u^{\frac{1-\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & u^{-\frac{1-\alpha}{2}} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Если соотношение (19) выполнено для преобразованных операторов, то оно будет выполнено и для исходных операторов [3].

Для $\widetilde{L}_a(u)$ и $\widetilde{R}_{a_1,a_2}(u/v)$ получаем следующее разложение по спектральному параметру:

$$\widetilde{L}(u) = u\widetilde{L}_+ - u^{-1}\widetilde{L}_-, \quad \widetilde{R}(u/v) = \frac{u}{v}\widetilde{R}_+ - \frac{v}{u}\widetilde{R}_-, \tag{23}$$

где

$$\widetilde{R}_+ = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q-q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & p^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{R}_- = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & -(q-q^{-1}) & p^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{L}_+ = \begin{pmatrix} a & (q-q^{-1})S^- \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \widetilde{L}_- = \begin{pmatrix} c & 0 \\ -(q-q^{-1})S^+ & d \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Получившаяся R-матрица не зависит от параметра α. Данное обстоятельство отражает тот факт, что сам параметр α вводится в R-матрицу, не содержащую его изначально, с помощью преобразования типа (21).

Подставим разложение (24) в (19). Действуя аналогично [3], получаем, что оператор (20) удовлетворяет равенству (19), если выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_+\widetilde{L}^1_+\widetilde{L}^2_+ &= \widetilde{L}^2_+\widetilde{L}^1_+\widetilde{R}_+, \\ \widetilde{R}_+\widetilde{L}^1_-\widetilde{L}^2_- &= \widetilde{L}^2_-\widetilde{L}^1_-\widetilde{R}_+, \\ \widetilde{R}_+\widetilde{L}^1_+\widetilde{L}^2_- &= \widetilde{L}^2_-\widetilde{L}^1_+\widetilde{R}_+, \end{aligned} \tag{25}$$

где индексы 1 и 2 соответствуют индексам a_1 и a_2 двух вспомогательных пространств. Из (25) получаем, что для элементов a, b, c, d, S^-, S^+ должны выполнятся следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &ab = ba,\ ac = ca,\ ad = da,\ bc = cb,\ bd = db,\ cd = dc, \\ &q(q-q^{-1})aS^- = p(q-q^{-1})S^-a, \\ &p(q-q^{-1})aS^+ = q(q-q^{-1})S^+a, \\ &p^{-1}(q-q^{-1})bS^- = -q^{-1}(q-q^{-1})S^-b, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&q^{-1}(q-q^{-1})bS^+ = -p^{-1}(q-q^{-1})S^+b,\\
&p^{-1}(q-q^{-1})cS^- = q(q-q^{-1})S^-c,\\
&q(q-q^{-1})cS^+ = p^{-1}(q-q^{-1})S^+c,\\
&-q^{-1}(q-q^{-1})dS^- = p(q-q^{-1})S^-d,\\
&-p(q-q^{-1})dS^+ = q^{-1}(q-q^{-1})S^+d,\\
&(q^2-q^{-2})(S^-)^2 = 0, \quad (q^2-q^{-2})(S^+)^2 = 0,\\
&(q-q^{-1})^2(p^{-1}S^+S^- - pS^-S^+) = (q-q^{-1})(da-bc).
\end{aligned} \tag{26}
$$

Если $q^4 \neq 1$, то соотношения (25) примут вид

$$
\begin{aligned}
&ab = ba,\ ac = ca,\ ad = da,\ bc = cb,\ bd = db,\ cd = dc,\\
&qaS^- = pS^-a, \qquad paS^+ = qS^+a,\\
&p^{-1}bS^- = -q^{-1}S^-b, \quad q^{-1}bS^+ = -p^{-1}S^+b,\\
&p^{-1}cS^- = qS^-c, \quad qcS^+ = p^{-1}S^+c,\\
&-q^{-1}dS^- = pS^-d, \quad -pdS^+ = q^{-1}S^+d,\\
&(S^-)^2 = 0, \quad (S^+)^2 = 0,\\
&(q-q^{-1})(p^{-1}S^+S^- - pS^-S^+) = (da-bc).
\end{aligned} \tag{27}
$$

С любым представлением алгебры с образующими, удовлетворяющими условиям (26), можно по формуле (20) связать L-оператор, для которого будет выполнено равенство (19). По этому оператору можно построить матрицу монодромии и отвечающую ей динамическую систему, к исследованию которой в полной мере применим КМОЗ. Таким образом, с каждым представлением данной алгебры связана некоторая интегрируемая система.

Матрица монодромии $\widetilde{T}_a(u)$, построенная по операторам $\widetilde{L}_{a,n}(u)$, выражается следующим образом через матрицу $T_a(u)$:

$$
\widetilde{T}_a(u) = Q(u)T_a(u)Q^{-1}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & u^{1-\alpha}B(u) \\ u^{\alpha-1}C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \tag{28}
$$

Для $\widetilde{T}_a(u)$ выполняется тождество

$$
\widetilde{R}_{a_1,a_2}(u/v)\widetilde{T}_{a_1}(u)\widetilde{T}_{a_2}(v) = \widetilde{T}_{a_2}(v)\widetilde{T}_{a_1}(u)\widetilde{R}_{a_1,a_2}(u/v). \tag{29}
$$

Учитывая разложение (23), можем написать

$$
\widetilde{L}_{a,N}(v)\ldots\widetilde{L}_{a,1}(v) = \left(v\widetilde{L}^N_+ - \frac{1}{v}\widetilde{L}^N_-\right)\ldots\left(v\widetilde{L}^1_+ - \frac{1}{v}\widetilde{L}^1_-\right) =
$$

$$= v^N \widetilde{L}_+^N \dots \widetilde{L}_+^1 + \dots + \frac{(-1)^N}{v^N} \widetilde{L}_-^N \dots \widetilde{L}_-^1,$$

где верхний индекс у L-операторов теперь обозначает соответствующий номер узла цепочки. Таким образом,

$$\widetilde{T}_a(v) = v^N \widetilde{L}_+^N \dots \widetilde{L}_+^1 + \dots + \frac{(-1)^N}{v^N} \widetilde{L}_-^N \dots \widetilde{L}_-^1. \tag{30}$$

Далее находим:

$$\widetilde{L}_+^N \dots \widetilde{L}_+^1 = \begin{pmatrix} a_N & (q-q^{-1})S_N^- \\ 0 & b_N \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_1 & (q-q^{-1})S_1^- \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_N \dots a_1 & (q-q^{-1}) \sum\limits_{k=1}^{N} a_N \dots a_{k+1} S_k^- b_{k-1} \dots b_1 \\ 0 & b_N \dots b_1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{L}_-^N \dots \widetilde{L}_-^1 = \begin{pmatrix} c_N & 0 \\ (q^{-1}-q)S_N^+ & d_N \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ (q^{-1}-q)S_1^+ & d_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_N \dots c_1 & 0 \\ (q^{-1}-q) \sum\limits_{k=1}^{N} d_N \dots d_{k+1} S_k^+ c_{k-1} \dots c_1 & d_N \dots d_1 \end{pmatrix}.$$

Мы приходим к реализации алгебры (27) в терминах локальных операторов

$$a_{gl} = a_N \dots a_1, \quad b_{gl} = b_N \dots b_1, \quad c_{gl} = c_N \dots c_1, \quad d_{gl} = d_N \dots d_1,$$

$$S_{gl}^- = \sum_{k=1}^{N} a_N \dots a_{k+1} S_k^- b_{k-1} \dots b_1,$$

$$S_{gl}^+ = \sum_{k=1}^{N} d_N \dots d_{k+1} S_k^+ c_{k-1} \dots c_1 d_N \dots d_1.$$

Подставим разложение (23) для R-матрицы и разложение (30) для $\widetilde{T}_{a_2}(v)$ в (29). Из равенства коэффициентов при степенях v^{N+1} и v^{-N-1} получаем

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_+ \widetilde{T}_{a_1}(u) I \otimes \widetilde{L}_-^N \dots \widetilde{L}_-^1 &= I \otimes \widetilde{L}_-^N \dots \widetilde{L}_-^1 \widetilde{T}_{a_1}(u) \widetilde{R}_+, \\ \widetilde{R}_- \widetilde{T}_{a_1}(u) I \otimes \widetilde{L}_+^N \dots \widetilde{L}_+^1 &= I \otimes \widetilde{L}_+^N \dots \widetilde{L}_+^1 \widetilde{T}_{a_1}(u) \widetilde{R}_-. \end{aligned} \tag{31}$$

Используя (31) и (28), можно получить перестановочные соотношения между элементами матрицы $T_a(u)$ и произведениями элементов алгебры (26), относящихся к разным узлам цепочки. Например:

$$
\begin{aligned}
&[A(u), a_{gl}] = [D(u), a_{gl}] = 0, \quad [A(u), b_{gl}] = [D(u), b_{gl}] = 0,\\
&[A(u), c_{gl}] = [D(u), c_{gl}] = 0, \quad [A(u), d_{gl}] = [D(u), d_{gl}] = 0,\\
&a_{gl}B(u) = \frac{p}{q}B(u)a_{gl}, \qquad b_{gl}B(u) = -\frac{p}{q}B(u)b_{gl},\\
&c_{gl}B(u) = pqB(u)c_{gl}, \qquad d_{gl}B(u) = -pqB(u)d_{gl},\\
&S^-_{gl}B(u) = -\frac{1}{q^2}B(u)4S^-_{gl},\\
&A(u)S^-_{gl} = pqS^-_{gl}A(u) - qu^{1-\alpha}a_{gl}B(u),\\
&D(u)S^-_{gl} = -qS^-_{gl}D(u) - \frac{q}{p}u^{1-\alpha}b_{gl}B(u).
\end{aligned} \tag{32}
$$

Из (32) следует, что операторы a_{gl}, b_{gl}, c_{gl}, d_{gl} коммутируют с гамильтонианом системы и являются интегралами движения.

Рассмотрим представление алгебры (26), отвечающее L-оператору (6). В этом случае имеем

$$a_n\Omega = \frac{q}{2}\Omega, \quad b_n\Omega = \frac{1}{2p}\Omega, \quad c_n\Omega = \frac{1}{2q}\Omega, \quad d_n\Omega = \frac{1}{2p}\Omega.$$

Каждый вектор вида $B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_l)\Omega$ является собственным вектором операторов a_{gl}, b_{gl}, c_{gl}, d_{gl} со следующими собственными значениями:

$$
\begin{aligned}
a_{gl}B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_l)\Omega &= \frac{p^l q^{N-l}}{2^N}B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_l)\Omega,\\
b_{gl}B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_l)\Omega &= \frac{(-q)^l}{2^N p^{n-l}}B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_l)\Omega,\\
c_{gl}B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_l)\Omega &= \frac{p^l}{q^{N-l}}2^N B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_l)\Omega,\\
d_{gl}B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_l)\Omega &= \frac{(-q)^l}{p^{N-l}2^N}B(\lambda_1)\ldots B(\lambda_l)\Omega.
\end{aligned}
$$

Здесь числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ произвольны. Процедура поиска собственных векторов гамильтониана среди собственных векторов коммутирующих с гамильтонианом операторов a_{gl}, b_{gl}, c_{gl}, d_{gl} даст уравнения Бете на спектральные параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$.

Рассмотрим произвольное представление алгебры (26). Пусть ω – собственный вектор коммутирующих между собой операторов a, b, c, d. Тогда любой вектор вида $B(\lambda_1)\dots B(\lambda_l)\Omega$, где $\Omega=\omega\otimes\dots\otimes\omega$, будет собственным вектором операторов a_{gl}, b_{gl}, c_{gl}, d_{gl}. Выбор собственных векторов гамильтониана из данных векторов приведёт к уравнениям Бете на параметры $\lambda_1,\dots,\lambda_l$.

4. Статистическая сумма модели на двумерной решетке с граничными условиями типа доменной стенки

Статистическая сумма $Z_N(\{\lambda_i\}_1^N;\{\xi_i\}_1^N)$ модели на квадратной решетке $N\times N$ с граничными условиями типа доменной стенки представляет интерес в связи с вычислением норм бетевских векторов и последующим применением полученных результатов для исследования корреляционных функций системы [4, 10, 11]. Статистическая сумма для 6-вершинной модели с R-матрицей XXZ-цепочки в точке "свободных фермионов" $\eta=i\pi/4$ была вычислена в [12]. Исследуемая нами модель тоже относится к классу "свободных фермионов" [2], но с иной R-матрицей (1).

Статистическая сумма Z_N может быть записана в следующем виде [4, 10]:

$$Z_N=$$

$$(\otimes_{k=1}^N\downarrow)\otimes(\otimes_{\alpha=1}^N\uparrow)\prod_{\alpha=1}^{\overleftarrow{N}}\prod_{k=1}^{\overleftarrow{N}}L_{\alpha k}(\lambda_\alpha-\xi_k)(\otimes_{k=1}^N\uparrow)\otimes(\otimes_{\alpha=1}^N\downarrow)\qquad(33)$$

(здесь индекс k соответствует первому пространству в произведении $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^2$, а α – второму). В (33) использованы естественные обозначения:

$$\uparrow=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad\downarrow=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Произведение L-операторов в (33) можно переупорядочить:

$$Z_N=\qquad(34)$$

$$=(\otimes_{k=1}^N\downarrow)\otimes(\otimes_{\alpha=1}^N\uparrow)\prod_{k=1}^{\overleftarrow{N}}\prod_{\alpha=1}^{\overleftarrow{N}}L_{\alpha k}(\lambda_\alpha-\xi_k)(\otimes_{k=1}^N\uparrow)\otimes(\otimes_{\alpha=1}^N\downarrow).$$

Рассмотрим случай $\lambda_1=\xi_1$. Оператор $L_{11}(0)$ сводится к оператору $\sinh\eta\mathcal{P}$. Воспользовавшись тем, что векторы $\uparrow\otimes\uparrow$ и $\downarrow\otimes\downarrow$

являются собственными векторами оператора $L_{\alpha k}(\lambda_\alpha - \xi_k)$, отвечающими собственными значениям $\sinh(\lambda_\alpha - \xi_k + \eta)$ и $\sinh(\eta - \lambda_\alpha + \xi_k)$ соответственно, получаем

$$Z_N(\lambda_1 = \xi_1) = \tag{35}$$

$$= \sinh\eta \prod_{j=2}^{N} \sinh(\lambda_1 - \lambda_j + \eta)\sinh(\lambda_1 - \xi_j + \eta) Z_{N-1}(\{\lambda_i\}_2^N; \{\xi_i\}_2^N).$$

Введём матрицу монодромии $\widetilde{T}_\alpha(\lambda)$:

$$\widetilde{T}_\alpha(\lambda) = \overleftarrow{\prod_{k=1}^{N}} L_{\alpha k}(\lambda - \xi_k) = \begin{pmatrix} \widetilde{A}(\lambda) & \widetilde{B}(\lambda) \\ \widetilde{C}(\lambda) & \widetilde{D}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

От введённой ранее матрицы монодромии (7) она отличается тем, что в качестве вспомогательного пространства в L-операторах выбрано второе пространство в произведении $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$. Оператор $\widetilde{B}(\lambda)$ получается из оператора $B(\lambda)$ с помощью замены параметров α и p на $-\alpha$ и $1/p$. Статистическая сумма записывается как

$$Z_N = \otimes_{k=1}^N \downarrow \widetilde{B}(\lambda_N) \ldots \widetilde{B}(\lambda_1) \otimes_{k=1}^N \uparrow . \tag{36}$$

Запишем Z_N ещё в одном виде. Для этого введём матрицу монодромии $\widehat{T}_j(\xi)$, которую определим следующим образом:

$$\widehat{T}_j(\xi) = \overleftarrow{\prod_{\alpha=1}^{N}} L_{\alpha j}(\lambda_\alpha - \xi) = \begin{pmatrix} \widehat{A}(\xi) & \widehat{B}(\xi) \\ \widehat{C}(\xi) & \widehat{D}(\xi) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\widehat{C}(\xi) = C(-\xi)$. Для Z_N получаем следующее выражение:

$$Z_N = \otimes_{k=1}^N \uparrow \widehat{C}(\xi_N) \ldots \widehat{C}_1(\xi_1) \otimes_{k=1}^N \downarrow . \tag{37}$$

Из формул (36), (37) и из построения операторов $\widetilde{B}(\lambda)$ и $\widehat{C}(\xi)$ заключаем, что $Z_N(\alpha) = \exp(-\alpha \sum_{j=1}^N (\lambda_j - \xi_j)) Z_N(\alpha = 0)$.

В дальнейшем будем предполагать, что $\alpha = 0$.

Из структуры L-операторов (6) находим, что $\widetilde{B}(\lambda) = \exp(-(N-1)\lambda)\widetilde{P}_{N-1}(e^{2\lambda})$, $\widetilde{C}(\xi) = \exp(-(N-1)\xi)\widehat{P}_{N-1}(e^{2\xi})$, где $\widetilde{P}_{N-1}$ и $\widehat{P}_{N-1}$ – некоторые полиномы степени $N-1$. Следовательно, Z_N имеет аналогичную структуру по каждой переменной. Таким образом, чтобы найти Z_N с точностью до множителя, не зависящего от переменных $\lambda_1,\ldots,\lambda_N,\xi_1,\ldots,\xi_N$, достаточно знать корни Z_N как полинома по каждой из переменных $e^{2\lambda_1},\ldots,e^{2\lambda_N},e^{2\xi_1},\ldots,e^{2\xi_N}$. С этой целью рассмотрим соотношения (9),

$$B(\lambda)B(\mu)=\frac{\sinh(\eta-\lambda+\mu)}{\sinh(\lambda-\mu+\eta)}B(\mu)B(\lambda),$$

$$C(\lambda)C(\mu)=\frac{\sinh(\lambda-\mu+\eta)}{\sinh(\eta-\lambda+\mu)}C(\mu)C(\lambda),$$

из которых получаем

$$\widetilde{B}(\lambda+\eta)\widetilde{B}(\lambda)=0,\quad \widehat{C}(\lambda+\eta)\widehat{C}(\lambda)=0\quad \text{для любого}\quad \lambda\in\mathbf{C}. \tag{38}$$

Значит, как полином по переменной $e^{2\lambda_k}$ $(k=1,\ldots,N)$ Z_N имеет корни $e^{2(\lambda_1+\eta)},\ldots,e^{2(\lambda_{k-1}+\eta)}$, $e^{2(\lambda_{k+1}-\eta)},\ldots,e^{2(\lambda_N-\eta)}$. Аналогично по переменной $e^{2\xi_k}$ $(k=1,\ldots,N)$ Z_N имеет нули в точках $e^{2(\xi_1+\eta)},\ldots,e^{2(\xi_{k-1}+\eta)}$, $e^{2(\xi_{k+1}-\eta)},\ldots,e^{2(\xi_N-\eta)}$. Так как для каждой переменной известно $N-1$ корней соответствующего полинома, то Z_N фиксируется с точностью до множителя:

$$Z_N\sim\exp(-(N-1)\sum_{j=1}^{N}(\lambda_j+\xi_j))\prod_{i<j}(e^{2\lambda_i}-e^{2(\lambda_j-\eta)})(e^{2\xi_i}-e^{2(\xi_j-\eta)})\sim$$
$$\sim\prod_{i<j}\sinh(\lambda_i-\lambda_j+\eta)\sinh(\xi_i-\xi_j+\eta).$$

Окончательно можем написать:

$$Z_N=M_N\prod_{i<j}\sinh(\lambda_i-\lambda_j+\eta)\sinh(\xi_i-\xi_j+\eta). \tag{39}$$

Для нахождения коэффициента M_N используем свойство редукции (35). Положим в (39) $\lambda_1=\xi_1$, тогда

$$Z_N=\frac{M_N}{M_{N-1}}\prod_{j=2}^{N}\sinh(\lambda_1-\lambda_j+\eta)\sinh(\lambda_1-\xi_j+\eta)Z_{N-1}(\{\lambda_i\}_2^N;\{\xi_i\}_2^N).$$

В итоге приходим к соотношению

$$\frac{M_N}{M_{N-1}}=\sinh\eta. \tag{40}$$

Выражение (40) представляет собой рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов M_N. Заметим, что $Z_1 = M_1$, откуда прямыми вычислениями находим $M_1 = \sinh\eta$, следовательно, $M_N = \sinh^N\eta$. Для Z_N имеем:

$$Z_N = \sinh^N\eta \prod_{i<j} \sinh(\lambda_i - \lambda_j + \eta)\sinh(\xi_i - \xi_j + \eta). \tag{41}$$

При $\alpha \neq 0$ получаем:

$$Z_N = \sinh^N\eta \exp(-\alpha \sum_{j=1}^{N} (\lambda_j - \xi_j))\times$$
$$\times \prod_{i<j} \sinh(\lambda_i - \lambda_j + \eta)\sinh(\xi_i - \xi_j + \eta). \tag{42}$$

5. Заключение

В рамках КМОЗ было проведено исследование спиновой системы. Найден спектр системы и выделена алгебра симметрии. Специфические свойства операторов $\widetilde{B}(\lambda)$ и $\widehat{C}(\xi)$ позволили явно вычислить статистическую сумму на решетке с граничными условиями типа доменной стенки. Полученные результаты мы надеемся применить к изучению норм бетевских векторов и корреляционных функций системы.

Авторы благодарят Н. А. Китанина и В. О. Тарасова за полезные обсуждения.

Литература

1. C. N. Yang. — Phys. Rev. Lett. **19**, No. 23 (1967), 1312–1314.
2. R. J. Baxter. — Ann. Phys. **70**, No. 1 (1972), 193–228.
   Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике.* Мир, М. (1985).
3. L. D. Faddeev. — In: Quantum Symmetries/Symmetries Quantiques, A. Connes *et al.* (eds.), North-Holland, Amsterdam (1998), pp. 149–219.
4. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* Наука, М. (1992).
5. P. P. Kulish, E. K. Sklyanin. — Lect. Notes Phys. **151** (1982), 61–159.
6. П. П. Кулиш, Е. К. Склянин, *О решениях уравнения Янга–Бакстера.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **95** (1980), 129–160.
7. E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis. — Ann. Phys. **16** (1961), 407–466.

8. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **109** (1981), 134–178.
9. M. Gaudin, *La fonction d'onde de Bethe.* Masson, Paris (1983).
10. V. E. Korepin. — Comm. Math. Phys. **86** (1982), 391–418.
11. Н. А. Славнов. — ТМФ **79**, No. 2 (1989), 232–240.
12. N. M. Bogoliubov, A. G. Pronko, M. B. Zvonarev. — J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002), 5525–5541.

Kulish P. P., Ryasichenko P. D. Spin chain connected to the quantum superalgebra $\mathrm{sl}_q(1 \mid 1)$.

We consider an integrable system with R-matrix connected to the algebra $\mathrm{sl}_q(1 \mid 1)$. We construct the Hamiltonian of the system and find its spectrum by means of the algebraic Bethe Ansatz. The symmetry algebra of the chain is written out. The partition function of the model on the lattice with domain wall boundary conditions is calculated.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kulish@pdmi.ras.ru

С.-Петербургский государственный
университет

Поступило 27 июня 2005 г.