Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 325, 2005 г.

Ю. А. Неретин

О СЖАТИИ АНСАМБЛЕЙ БРЮА–ТИТСА

Известно, что аффинные ансамбли Брюа–Титса[1] (см., например, [1, 3, 7]) являются правильными p-адическими аналогами римановых симметрических пространств. У этой аналогии не известно априорных объяснений, но она существует на уровне геометрии, гармонического анализа и специальных функций.

Вот некоторые примеры этой параллели:

– планшерелевские формулы Гиндикина–Карпелевича и Макдональда, см., например, [7];

– существование единой теории, включающей зональные сферические функции и многочлены Холла–Литтлвуда [8];

– похожие конструкции в геометриях на бесконечности (границы типа Сэмпля–Сатаке, граница Мартина и т.д.), см. [4, 13];

– сходство между неравенством треугольника Хорна–Клячко (см. [2]) для собственных чисел эрмитовых матриц[2] и неравенством треугольника для сложного расстояния в ансамбле;[3]

– существование точной параллели для гармонического анализа ядер Березина и матричных бета-функций на уровне ансамблей,[4] см. [16].

В работе мы продолжаем эту параллель и получаем (довольно простой) аналог теоремы о сжатии углов для ансамблей типа

[1]Хотя Bruhat–Tits building в последнее время все чаще переводится на русский язык словом "билдинг", автору кажется, что русское употребление франкофонского слова "ансамбль" (Версаль, Петергоф и т.п.) лучше подходит объекту, чем, скажем, "Импая Стэйт билдинг" или "боди-билдинг".

[2]Интерпретация этого неравенства как факта геометрии симметрических пространств обсуждается в [15].

[3]Пусть R, S, $T \in \mathrm{Lat}_n$ (см. обозначения ниже). Надо описать всевозможные наборы из $3n$ чисел $\{k_j(R,S)\}$, $\{k_j(R,T)\}$, $\{k_j(S,T)\}$. Это может быть легко сведено к следующему (неожиданно нетривиальному) вопросу, решенному Ф. Холлом и Т. Клейн в 1960-х годах. Пусть A, B – фиксированные конечные абелевы p-группы. Для каких абелевых p-групп C существует подгрупа A', изоморфная A, такая, что $C/A' \simeq B$? Решение см. в [8, II.3].

[4]Матричная гамма-функция соответствует дзета-функции Тамагавы, см. [8, V.4].

A_n (теорема о сжатии углов появилась в [11] как лемма об ограниченности некоторых интегральных операторов в пространстве Фока, доказательство содержится в [12, 6.3], геометрическое обсуждение в [14]; см. также ее расширение на некоторые особые группы в [5]).

1. Формулировка результата

1.1. Обозначения. Пусть $\mathbb{Q}_p$ – поле p-адических чисел, а $|\cdot|$ – норма в $\mathbb{Q}_p$. Кольцо целых p-адических чисел мы обозначим через $\mathbb{O}_p$. Напомним, что $\mathbb{O}_p$ состоит из элементов с нормой $\leqslant 1$. Координатное n-мерное линейное пространство над $\mathbb{Q}_p$ мы обозначим через $\mathbb{Q}_p^n$.

Через $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ мы обозначим группу обратимых матриц размера $n \times n$ над $\mathbb{Q}_p$. Соответственно $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_p)$ – группа матриц $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, таких, что все матричные элементы g и g^{-1} – целые.

1.2. Пространство решеток. *Решетка* в $\mathbb{Q}_p^n$ – это компактный открытый $\mathbb{O}_p$-подмодуль. Напомним, что любая решетка R может быть представлена в форме

$$R = \mathbb{O} f_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{O} f_n, \tag{1}$$

где $f_1, \ldots, f_n$ – некоторый базис в $\mathbb{Q}_p^n$, см. [18, §II.2]. Мы обозначим через Lat_n пространство всех решеток в $\mathbb{Q}_p^n$ (это пространство счетно, естественная топология в Lat_n дискретна).

Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ действует транзитивно на Lat_n. Стабилизатор решетки $\mathbb{O}_p^n$ совпадает $\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$. Поэтому

$$\mathrm{Lat}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) / \mathrm{GL}_n(\mathbb{O}_p).$$

1.3. Сложное расстояние.

Теорема (см., например, [18, теорема 2.2.2]). *Пусть R, S – две решетки в $\mathbb{Q}_p^n$.*

а) *Существует базис $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{Q}_p^n$, такой, что*

$$R = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{O}_p f_j, \qquad S = \sum_{j=1}^{n} p^{-k_j(R,S)} \mathbb{O}_p f_j. \tag{2}$$

Целые числа

$$k_1(R,S) \geqslant k_2(R,S) \geqslant \ldots \geqslant k_n(R,S)$$

однозначно определяются решетками R, S.

b) *Пусть S, R и S', R' – две пары элементов пространства Lat_n, удовлетворяющих равенству*

$$k_j(R,S) = k_j(R',S').$$

Тогда существует оператор $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, такой, что

$$R = g \cdot R', \qquad S = g \cdot S'.$$

Мы говорим, что $k_j(R,S)$ – *сложное расстояние* между S и R (эта структура – аналог сложного расстояния или стационарных углов в симметрических пространствах, см., например, [15]).

1.4. Произведение отношений. Пусть V, W – множества. Отношение $H : V \rightrightarrows W$ – это подмножество в $V \times W$.

Пусть $H : V \rightrightarrows W$, $G : W \rightrightarrows Y$ – два отношения. Их произведение $G \cdot H : V \rightrightarrows Y$ – это отношение, состоящее из всех пар $v \times y \in V \times Y$, для которых существует $w \in W$, удовлетворяющее условиям $v \times w \in H$, $w \times y \in G$.

1.5. Полугруппа Назарова. Элемент полугруппы Назарова Γ_n – это решетка в $\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{Q}_p^n$. Произведение в полугруппе Назарова есть произведение отношений.

Замечание. Элементы группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ можно рассматривать как точки полугруппы Назарова на бесконечности. Действительно, для $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ рассмотрим последовательность решеток $Z_j \subset \mathbb{Q}_p^n \oplus \mathbb{Q}_p^n$, таких, что

$$\cap_{j=1}^{\infty} \cup_{k=j}^{\infty} Z_j$$

совпадает с графиком оператора g. Для любой решетки $R \subset \mathbb{Q}_p^n$ мы имеем $Z_j \cdot R = g \cdot R$ начиная с некоторого места j.

Замечание. Полугруппы Назарова являются p-адическими аналогами полугрупп линейных отношений (см. [12]). Главное нетривиальное свойство полугрупп Назарова – это следующее утверждение. Представление Вейля группы $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p)$ (см. [17]) допускает каноническое продолжение до представления полугруппы Назарова, связанной с ансамблями типа C_n, см. [10, 9].

По-видимому, из этого утверждения можно извлечь много следствий (благодаря возможностям двойственности Хау (Howe)), эти следствия никогда не обсуждались в литературе.

1.6. Действия полугруппы Назарова на Lat_n**.** Пусть $H \in \Gamma_n$, $R \in \mathrm{Lat}_n$. Мы определим $HR \in \mathrm{Lat}_n$ как множество $w \in \mathbb{Q}_p^n$, таких, что существует элемент $v \in R$, удовлетворяющий условию $v \times w \in H$.

1.7. Результат статьи. Главный результат статьи – следующая теорема.

Теорема. *Пусть H – элемент полугруппы Назарова Γ_n. Пусть R, $S \in \mathrm{Lat}_n$. Тогда для любого j число $k_j(H \cdot R, H \cdot S)$ лежит между 0 и $k_j(R,S)$, в том смысле, что*

$$k_j(R,S) \geqslant 0 \qquad \textit{влечет} \qquad 0 \leqslant k_j(H\cdot R, H\cdot S) \leqslant k_j(R,S),$$
$$k_j(R,S) \leqslant 0 \qquad \textit{влечет} \qquad 0 \geqslant k_j(H\cdot R, H\cdot S) \geqslant k_j(R,S).$$

Замечание. В случае римановых симметрических пространств существует обратная теорема о характеризации всех отображений, сжимающих углы [14]. Я не знаю такого утверждения в p-адическом случае.

2. Доказательство.

2.1. Нормы. *Норма* в $\mathbb{Q}_p^n$ – это функция $v \mapsto \|v\|$ в множество

$$\{\dots, p^{-1}, 1, p, p^2, \dots\},$$

удовлетворяющая условию

1. $\|v+w\| \leqslant \max(\|v\|, \|w\|)$;
2. $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$ фор $\lambda \in \mathbb{Q}_p$, $v \in \mathbb{Q}_p^n$.

Множество всех v, таких, что $\|v\| \leqslant 1$, есть решетка.

Обратно, пусть L – решетка. Мы определяем соответствующую норму $\|\cdot\|_L$ по правилу

$$\|v\|_L := \Bigl(\min_{k:\, p^k v \in L} p^k\Bigr)^{-1}.$$

2.2. Минимаксная характеризация сложного расстояния. Следующее утверждение – точный аналог минимаксной характеризации собственных чисел (см., например, [6]) и стационарных углов [15]. Доказательства близки.

Лемма 1. *Пусть L, $M \in \mathrm{Lat}_n$. Тогда*

$$\text{a)}\quad p^{k_j(R,S)} = \max_{W:\ \dim W=j,\ W\subset \mathbb{Q}_p^n} \Big\{ \min_{v\in W,\, v\neq 0} \frac{\|v\|_S}{\|v\|_R} \Big\};$$

$$\text{b)}\quad p^{k_j(R,S)} = \min_{W:\ W\subset \mathbb{Q}_p^n,\ \operatorname{codim} W==j-1} \Big\{ \max_{v\in W,\, v\neq 0} \frac{\|v\|_S}{\|v\|_R} \Big\}.$$

Доказательство. Пусть R, S имеют форму (2). Рассмотрим подпространство $Y = \mathbb{Q}_p f_j \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}_p f_n$. Мы имеем $\|v\|_R/\|v\|_S \leqslant p^{k_j}$ для любого $v \in Y$.

Если $\dim W_j = j$, то $Y \cap W \neq 0$, и, следовательно, $\min_{v\in W} \|v\|_R/\|v\|_S \leqslant p^{k_j}$.

Для $W = \mathbb{Q}_p f_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}_p f_j$ мы имеем $\min_{v\in W} \|v\|_R/\|v\|_S = p^{k_j}$. $\square$

2.3. Другая характеризация сложного расстояния. Следующее утверждение очевидно.

Лемма 2. *Пусть L, $M \in \mathrm{Lat}_n$. Тогда имеется следующий изоморфизм конечных абелевых p-групп:*

$$M/(L\cap M) = \bigoplus_{j:\,k_j(L,M)>0} \mathbb{Z}/p^{k_j(L,M)}\mathbb{Z},$$
$$L/(L\cap M) = \bigoplus_{j:\,k_j(L,M)<0} \mathbb{Z}/p^{-k_j(L,M)}\mathbb{Z}.$$

2.4. Двойственность и сложное расстояние. Обозначим через $(\mathbb{Q}_p^n)^\square$ линейное пространство, двойственное к $\mathbb{Q}_p^n$. Для решетки $L \in \mathrm{Lat}_n$ мы определяем *двойственную решетку* $L^\square \subset (\mathbb{Q}_p^n)^\square$, состоящую из линейных функционалов $f \in (\mathbb{Q}_p^n)^\square$, таких, что

$$v \in L \implies f(v) \in \mathbb{O}_p.$$

Лемма 3. $k_j(L,M) = k_j(M^\square, L^\square)$.

2.5. Сложное расстояние и пересечение решеток.

Лемма 4. *Пусть L, M, $N \in \mathrm{Lat}_n$. Тогда для всех j число $k_j(L\cap M, L\cap N)$ лежит между 0 и $k_j(M,N)$.*

Утверждение является следствием леммы 1 и следующей леммы 5.

Лемма 5. *Для* $v \in \mathbb{Q}_p^n$ *число* $\|v\|_{L\cap M}/\|v\|_{L\cap N}$ *лежит между 1 и* $\|v\|_M/\|v\|_N$.

Доказательство. Обозначим

$$\log_p \|v\|_L = l, \quad \log_p \|v\|_M = m, \quad \log_p \|v\|_N = z.$$

Тогда

$$\log_p \|v\|_{L\cap M} = \max(l, m), \quad \log_p \|v\|_{L\cap N} = \max(l, z).$$

Остается заметить, что $\max(l, m) - \max(l, z)$ лежит между 0 и $l - z$. $\square$

2.6. Сложное расстояние и суммы решеток.

Лемма 6. *Пусть* L, M, $N \in \mathrm{Lat}_n$. *Тогда* $k_j(L+M, L+N)$ *лежит между* 0 *и* $k_j(M, N)$.

Доказательство. Для P, $Q \in \mathrm{Lat}_n$ мы имеем

$$(P+Q)^\square = P^\square \cap Q^\square.$$

Из соображений двойственности наша лемма равносильна лемме 4. $\square$

2.7. Обозначения. Пусть $S \subset \mathbb{Q}_p^n \oplus \mathbb{Q}_p^n$ – элемент полугруппы Назарова. Мы определяем

– его *ядро* $\operatorname{Ker} S = S \cap (\mathbb{Q}_p^n \oplus 0)$,

– *область определения* $\operatorname{Dom} S$ как образ S при проекции $\mathbb{Q}_p^n \oplus \mathbb{Q}_p^n \to \mathbb{Q}_p^n \oplus 0$,

– *образ* $\operatorname{Im} S$ как образ S при проекции $\mathbb{Q}_p^n \oplus \mathbb{Q}_p^n \to 0 \oplus \mathbb{Q}_p^n$,

– *неопределенность* $\operatorname{Indef} S$ как пересечение $S \cap 0 \oplus \mathbb{Q}_p^n$.

Очевидно, что все множества $\operatorname{Dom} S$, $\operatorname{Ker} S$, $\operatorname{Indef} S$, $\operatorname{Im} S$ являются решетками в $\mathbb{Q}_p^n$.

2.8. Доказательство теоремы. Пусть $S \in \Gamma_n$. Очевидно,

$$S \subset \operatorname{Dom} S \oplus \operatorname{Im} S, \qquad S \supset \operatorname{Ker} S \oplus \operatorname{Indef} S.$$

Рассмотрим (конечную) фактор-группу

$$Y := \big(\operatorname{Dom} S/ \operatorname{Ker} S\big) \oplus \big(\operatorname{Im} S/ \operatorname{Indef} S\big)$$

и образ σ решетки S в Y. Легко проверить, что множество σ является графиком изоморфизма

$$\operatorname{Dom} S/\operatorname{Ker} S \to \operatorname{Im} S/\operatorname{Indef} S.$$

В частности, эти две группы изоморфны.

Поэтому по лемме 2

$$k_j(\operatorname{Dom} S, \operatorname{Ker} S) = k_j(\operatorname{Im} S, \operatorname{Indef} S).$$

Это влечет существование (неканонического) оператора $g_S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, такого, что

$$g_S \cdot \operatorname{Dom} S = \operatorname{Im} S, \qquad g_S \cdot \operatorname{Ker} S = \operatorname{Indef} S.$$

Для любого $L \in \mathrm{Lat}_n$

$$S \cdot L = g_S \cdot (L \cap \operatorname{Dom} S) + \operatorname{Indef} S.$$

Остается применить леммы 4 и 6. $\square$

Литература

1. K. Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, New York (1989).
2. W. Fulton, *Eigenvalues of sums of Hermitian matrices (after A. Klyachko).* Asterisque, No. 252 (1998), Exp. No. 845, 5, 255–269.
3. P. Garrett, *Buildings and Classical Groups.* Chapman & Hall, London (1997).
4. Y. Ji, L. Guivarch, and J. Taylor, *Compactifications of Symmetric Spaces.* Birkhauser Boston, Inc., Boston (1998).
5. Kh. Koufany, *Contractions of angles in symmetric cones.* — Publ. Res. Inst. Math. Sci. **38**, No. 2 (2002), 227–243.
6. В. Б. Лидский, *Неравенства для собственных и сингулярных чисел.* Добавление к второму, третьему, четвертому изданию книги Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* М., 1966, 1976, 1988.
7. I. G. Macdonald, *Spherical functions on a group of p-adic type*, Publ. Ramanujan Inst., Madras (1972). Русский перевод: Успехи мат. наук **28**, вып. 5 (1973), 155–224.
8. I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd edition. Clarendon Press, Oxford (1995). Русский перевод первого издания: И. Макдональд, Симметрические функции и многочлены Холла. Мир, М. (1985).
9. M. L. Nazarov, *The oscillator semigroup over nonarchimedian field.* J. Funct. Anal., **128** (1995), 384–438.
10. V. Yu. Nazarov, Yu. G. Neretin, and G. Olshanskii, *Semi-groupes engendrés par la représentation de Weil du groupe symplectique de dimension infinie.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **309** (1989), No. 7, 443–446.
11. Ю. А. Неретин, *Об одной полугруппе операторов в бозонном пространстве Фока.* — Функц. анал. и прилож., **24**, вып. 2 (1990), 63–73.

12. Yu. Neretin, *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups.* Oxford University Press, New York (1996). Русский вариант: Ю. А. Неретин. Категории симметрий и бесконечномерные группы, Эдиториал УРСС (1998).
13. Yu. A. Neretin, *Hinges and the Study–Semple–Satake–Furstenberg–De Concini–Procesi–Oshima boundary.* In: Kirillov's Seminar on Representation Theory, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **181**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1998), pp. 165–230.
14. Ю. А. Неретин, *Конформная геометрия симметрических пространств и обобщенные дробно-линейные отображения Крейна–Шмульяна.* — Мат. сб., **190**, вып. 2 (1999), 93–122.
15. Yu. A. Neretin, *Jordan angles and triangle inequality in Grassmannian manifold,* Geom. Dedicata, **86** (2001), 403–432.
16. Ю. А. Неретин, *Бета-функция ансамбля Брюа–Титса и деформация пространства L^2 на пространстве решеток.* Мат. сб. **194**, вып. 12 (2003), 31–62.
17. A. Weil, *Sur certains groupes d'operateurs unitaires.* — Acta Math., **111** (1964), 143–211. Русский перевод: Математика (сборник переводов), **13**, 5 (1969), 33–44.
18. A. Weil, *Basic number theory.* Springer-Verlag, New York (1967). Русский перевод: А. Вейль, Основы теории чисел. Мир, М. (1972).

Neretin Yu. A. On compression of Bruhat–Tits buildings.

Consider an affine Bruhat–Tits building Lat_n of type A_{n-1} and the complex distance in Lat_n, i.e., the complete system of invariants of a pair of vertices of the building. An element of the Nazarov semigroup is a lattice in the duplicated p-adic space $\mathbb{Q}_p^n \oplus \mathbb{Q}_p^n$. We investigate the behavior of the complex distance with respect to the natural action of the Nazarov semigroup on the building.

ИТЭФ, Москва
University of Vienna
E-mail: neretin@mccme.ru

Поступило 28 сентября 2004 г.