Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 325, 2005 г.

П. П. Никитин

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ГРАФ ВЕТВЛЕНИЯ СЕМЕЙСТВА АЛГЕБР ТУРАЕВА $\{H_q^{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$

Введение и основные результаты

Рассмотрим свободную алгебру $F = \langle \alpha, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$ и зададим соотношения

$$\sigma_i^2 = e; \quad (\sigma_j\sigma_{j+1})^3 = e; \quad \sigma_l\sigma_k = \sigma_k\sigma_l \text{ при } |l-k| > 1; \tag{1}$$

$$\alpha^2 = q\alpha; \quad \alpha\sigma_1\alpha = \alpha; \quad \alpha\sigma_i = \sigma_i\alpha \quad \text{при } 1 < i \leqslant n-1. \tag{2}$$

Обозначим факторалгебру алгебры F по этим соотношениям через $H_q^{1,n}$. Эту алгебру, наряду с подобными, ввел В. Г. Тураев в работе [3] и по предложению А. М. Вершика мы называем их *алгебрами Тураева.* Из соотношений (1), (2) видно, что введенная алгебра отличается от групповой алгебры симметрической группы $\mathbb{C}[S_{n+1}] = \langle \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$, заданной коксетеровскими образующими, заменой образующей σ_0 на α. Как показано ниже (см. теорему 1), размерность алгебры Тураева в типичном случае равна $(n+1)!$, т.е. равна размерности групповой алгебры $\mathbb{C}[S_{n+1}]$. Тем не менее, как следует из теоремы 1, при $n > 3$ эти алгебры не изоморфны.

Для $q = 1$ алгебра Тураева оказывается подалгеброй алгебры Брауэра–Вейля (см. [6]), именно, алгебра Брауэра–Вейля порождается, в наших обозначениях, образующими $\langle \alpha, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$. В этом случае алгебра $H_q^{1,n}$ не полупроста для любого $n > 1$, однако, используя технику, предложенную в [6], возможно построение полного набора представлений.

В данной работе установлено, что для типичных q ($q \notin \mathbb{Z}$) алгебра $H_q^{1,n}$ является полупростой, найдена ее размерность и построен полный список представлений (см. теорему 1). Кроме того, построен граф ветвления семейства $\{H_q^{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$, см. теорему 2 и рис. 1 в конце статьи.

Работа поддержана грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-2251.2003.1 и грантом INTAS 03-51-5018.

Мы будем пользоваться известными фактами из теории представлений симметрических групп, см., например, монографию [4].

Автор благодарит А. М. Вершика за постановку задачи и многочисленные полезные беседы.

Доказательства

Рассмотрим $I = \langle\alpha\rangle$ – идеал алгебры Тураева $H_q^{1,n}$, порожденный элементом α, и подалгебру $S = \langle\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}\rangle$. Нам потребуется следующее предварительное описание структуры алгебры $H_q^{1,n}$:

Предложение 1. *Идеал I есть линейная оболочка элементов вида $x\alpha y$, где $x, y \in S$, и $H^{1,n}/I = S \cong \mathbb{C}[S_n]$.*

Доказательство. Существует канонический изоморфизм факторалгебры $H_q^{1,n}/I$ и подалгебры S. Соотношения (1) позволяют задать изоморфизм подалгебры S и групповой алгебры симметрической группы $\mathbb{C}[S_n]$, если положить $\sigma_i = (i, i+1)$.

Рассмотрим элемент $h \in H_q^{1,n}$, $h = x\alpha y\alpha z$, $x, y, z \in S$. Любой элемент $a \in S_n$ можно записать в виде $a = b\sigma_1 c$, где $b, c \in S_{n-1} = \langle\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}\rangle$. Поэтому $y = y_1\sigma_1 y_2$ для $y_1, y_2 \in S_{n-1}$, откуда

$$h = x\alpha y\alpha z = a\alpha y_1\sigma_1 y_2\alpha z = xy_1\alpha\sigma_1\alpha y_2 z = xy_1\alpha y_2 z \tag{3}$$

в силу коммутационных соотношений. Продолжая наше рассуждение по индукции, мы приходим к утверждению, что любое произведение образующих $\alpha, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ можно привести к виду, когда образующая α входит в произведение не более одного раза, что завершает доказательство предложения. □

Следствие 1. $\dim(H_q^{1,n}) \leqslant (n+1)!$.

Доказательство. Известно, что $\dim(\mathbb{C}[S_n]) = n!$. Кроме того, идеал I порождается элементами вида $x\alpha y$, где $x, y \in S_n$. Но в силу коммутационных соотношений для любого элемента $z \in \langle\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1}\rangle \cong S_{n-1}$ выполнено равенство $xz\alpha y = x\alpha zy$, поэтому общее число порождающих элементов для идеала I не превосходит $(n!)^2/(n-1)! = n \cdot n!$. Получаем, что $\dim(H_q^{1,n}) \leqslant n! + n \cdot n! = (n+1)!$. □

Введем операторы левого сдвига в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$. Для $g \in \mathbb{C}[S_n]$ определим оператор $P_g : \mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$, $P_g(f) = g \cdot f$. Зададим оператор $P_\alpha : \mathbb{C}[S_n] \mapsto \mathbb{C}[S_{n-1}]$. (Мы будем использовать вложение $\mathbb{C}[S_{n-1}] \hookrightarrow \mathbb{C}[S_n]$, при котором $\mathbb{C}[S_{n-1}] \cong \langle\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}\rangle$. В этом случае мы можем считать P_α действующим из алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ в себя.) Достаточно задать оператор на элементах группы S_n и затем продолжить его по линейности. Для $\sigma \in S_n \backslash S_{n-1}$ зададим этот оператор как вычеркивание числа 1 из циклической записи подстановки, т.е., например,

$$P_\alpha((587)(1432)(69)) = (587)(432)(69).$$

Для $\sigma \in S_{n-1}$ положим $P_\alpha(\sigma) = q \cdot \sigma$.

Проекция P_α (для $q = 1$) или, иначе, *виртуальная проекция*, была введена и исследовалась в контексте теории представлений симметрической группы, см. работу [5], а также работу [1], параграф “Комментарии и следствия”.

Назовем алгеброй $\bar{H}_q^{1,n}$ подалгебру операторов в $\mathrm{End}(\mathbb{C}[S_n])$, порожденную операторами P_{σ_i}, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, и оператором P_α. Определим отображение $\phi : H_q^{1,n} \to \bar{H}_q^{1,n}$ на образующих следующим образом:

$$\phi(\sigma_i) = P_{\sigma_i}, \quad \phi(\alpha) = P_\alpha. \tag{4}$$

Предложение 2. *Отображение ϕ продолжается до гомоморфизма алгебр $\phi : H_q^{1,n} \to \bar{H}_q^{1,n}$.*

Доказательство. Соотношения (1) для коксетеровских образующих симметрической группы (а следовательно, и для соответствующих операторов левого сдвига) хорошо известны.

Соотношение $P_\alpha^2 = qP_\alpha$ очевидно следует из определения оператора. Оставшиеся соотношения на P_α легко проверяются непосредственно. Например, для элемента $\sigma \in S_{n-1} \subset S_n$, $\sigma = \dots(\dots i, 2, j \dots)\dots$, имеем $\sigma_1 \cdot \sigma = \dots(\dots i, 2, 1, j \dots)\dots$, поэтому $P_\alpha(\sigma_1 \cdot \sigma) = \sigma$ и, следовательно, $P_\alpha P_{\sigma_1} P_\alpha = P_\alpha$. (Кроме соотношений (2) также справедливо коммутирование оператора P_α с операторами правого умножения, что понадобится нам ниже.) □

Алгебра $H_q^{1,n}$ имеет два набора представлений, $\{\pi_\lambda\}_{\lambda\vdash n}$ и $\{\rho_\mu\}_{\mu\vdash n-1}$. Представления первого типа есть по сути представления факторалгебры алгебры $H_q^{1,n}$ по идеалу I, т.е. вырождаются в представления алгебры $\mathbb{C}[S_n]$. Эти представления строятся следующим образом. Пусть $\bar{\pi}_\lambda$ — неприводимое представление группы S_n, отвечающее диаграмме $\lambda \vdash n$. Тогда следующее отображение π_λ задает представление алгебры $H_q^{1,n}$:

$$\pi_\lambda(\sigma_i) = \bar{\pi}_\lambda(\sigma_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n-1; \quad \pi_\lambda(\alpha) = 0. \tag{5}$$

При этом, разумеется, $\dim(\pi_\lambda) = \dim(\lambda)$ (где мы полагаем по определению $\dim(\lambda) = \dim(\bar{\pi}_\lambda)$).

Более интересные представления этой алгебры могут быть построены по представлению $\bar{\pi}_\mu$, где $\mu \vdash (n-1)$. Именно, пусть $\bar{V}_\mu$ – векторное пространство представления $\bar{\pi}_\mu$, рассматриваемое как $\mathbb{C}[S_{n-1}]$-модуль. Построим пространство $V_\mu = \mathbb{C}[S_n] \bigotimes_{\mathbb{C}[S_{n-1}]} \bar{V}_\mu$, при этом вложение $\mathbb{C}[S_{n-1}] \subset \mathbb{C}[S_n]$ имеет вид $\mathbb{C}[S_{n-1}] \cong \langle \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n \rangle$. Используя гомоморфизм ϕ, мы для каждого $h \in H_q^{1,n}$ строим оператор $\bar{\rho}_\mu(h) \in \operatorname{End}(\mathbb{C}[S_n] \bigotimes \bar{V}_\mu)$:

$$\bar{\rho}_\mu(h) = \phi(h) \otimes \operatorname{Id}.$$

Предложение 3. *Для любого $h \in H_q^{1,n}$ линейный оператор $\bar{\rho}_\mu(h)$ задает линейный оператор $\rho_\mu(h) \in \operatorname{End}(V_\mu)$. Если $q \notin \mathbb{Z}$, то представление ρ_μ алгебры $H_q^{1,n}$ является неприводимым,* $\dim(\rho_\mu) = n \cdot \dim(\mu)$.

Доказательство. Для проверки корректности задания оператора ρ_μ требуется установить эквивалентность

$$[\bar{\rho}_\mu(h)](vg \otimes w) \equiv [\bar{\rho}_\mu(h)](v \otimes gw) \quad \text{для } g \in S_{n-1}, v \in \mathbb{C}[S_n], w \in \bar{V}_\mu.$$

Имеем $[\bar{\rho}_\mu(h)](vg \otimes w) = [\phi(h)](vg) \otimes w$ и

$$[\bar{\rho}_\mu(h)](v \otimes gw) = [\phi(h)](v) \otimes gw \equiv ([\phi(h)](v))g \otimes w,$$

т.е. достаточно проверить, что

$$[\phi(h)](vg) = ([\phi(h)](v))g \quad \text{для любых} \quad g \in S_{n-1}, h \in H_q^{1,n}. \tag{6}$$

Но для образующих h возможны два случая: если $h = \sigma_i$ для некоторого i, то коммутирование оператора левого умножения $\phi(\sigma_i) = P_{\sigma_i}$ с оператором правого умножения очевидно; если $h = \alpha$, то нам требуется коммутирование оператора P_α с правым умножением – это коммутирование обсуждалось выше.

Для доказательства неприводимости представлений ρ_μ рассмотрим на пространстве V_μ действие подалгебры $S \cong \mathbb{C}[S_n]$. Наше действие – это по определению представление алгебры

$\mathbb{C}[S_n]$, отвечающее групповому представлению $\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S^n}\bar{\pi}_\mu$. Известно, что

$$\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S^n}\bar{\pi}_\mu = \sum_{\lambda\searrow\mu}\bar{\pi}_\lambda,$$

где $\lambda\searrow\mu$ означает, что диаграмма μ получается из λ удалением одной клетки. Пространство представления при этом раскладывается следующим образом:

$$V_\mu = \mathbb{C}[S_n]\bigotimes_{\mathbb{C}[S_{n-1}]}\bar{V}_\mu = \left(\sum_{\lambda\vdash n}\mathrm{End}\,\bar{V}_\lambda\right)\bigotimes_{\mathbb{C}[S_{n-1}]}\bar{V}_\mu =$$

$$= \left(\sum_{\lambda\searrow\mu}\mathrm{End}\,\bar{V}_\lambda\right)\bigotimes_{\mathbb{C}[S_{n-1}]}\bar{V}_\mu = \sum_{\lambda\searrow\mu}\left(\mathrm{End}\,\bar{V}_\lambda\bigotimes_{\mathbb{C}[S_{n-1}]}\bar{V}_\mu\right). \qquad (7)$$

При этом слагаемому $\mathrm{End}\,\bar{V}_\lambda\bigotimes_{\mathbb{C}[S_{n-1}]}\bar{V}_\mu$ отвечает представление $\bar{\pi}_\lambda$ алгебры $\mathbb{C}[S_n]$.

Таким образом, любое подпредставление представления ρ_μ должно иметь вид $\sum_\lambda\bar{\pi}_\lambda$, где сумма берется по некоторым λ, для которых $\lambda\searrow\mu$. Для подпредставления такого вида, для произвольной диаграммы λ, отвечающей ненулевому слагаемому в сумме $\sum_\lambda\bar{\pi}_\lambda$, возьмем таблицу T на этой диаграмме, которая при выкидывании клетки с числом n переходит в таблицу T', отвечающую диаграмме μ. Рассмотрим симметризатор Юнга $e^T\in\mathrm{End}\,\bar{V}_\lambda$. В силу доказанной ниже леммы 1, $P_\alpha(e^T)=(c+q)e^{T'}$, где c – некоторое целое число. Таким образом, при $q\notin\mathbb{Z}$ для любого $\lambda\searrow\mu$ мы имеем $\rho_\mu(\alpha)(\mathrm{End}\,\bar{V}_\lambda\bigotimes\bar{V}_\mu)\supset\mathrm{Id}\bigotimes\bar{V}_\mu$, и, так как $\mathbb{C}[S_n]\cdot\mathrm{Id}\bigotimes\bar{V}_\mu=V_\mu$, неприводимость доказана.

Наконец, формула для размерности представления $\dim(\rho_\mu)=n\cdot\dim(\mu)$ непосредственно следует из определения пространства V_μ и того, что число классов смежности (S_n/S_{n-1}) равно n. $\square$

Лемма 1. *$P_\alpha(e^T)=(c+q)e^{T'}$, где e^T – симметризатор Юнга, построенный по таблице T, T' – таблица, полученная из T выкидыванием клетки с числом n, и $c\in\mathbb{Z}$.*

Доказательство. По определению,

$$e^T = \sum_{p\in R(T),\ r\in C(T)}\mathrm{sgn}(r)pr,$$

где $R(T)$ и $C(T)$ – строчный и столбцовый стабилизаторы таблицы T на диаграмме λ, по которой строится стабилизатор. Рассмотрим таблицу T', которая получается из T выкидыванием клетки с номером n. В этом случае

$$R(T)=\sum_{i=1}^{k}R(T')\cdot(a_i,n),\qquad C(T)=\sum_{j=1}^{l}(b_j,n)\cdot C(T'),$$

где $\{a_i\}_{i=1}^{k}$ – числа в строке таблицы T, содержащей число n (включая само n; при этом мы полагаем $(n,n)=e$), а $\{b_j\}_{j=1}^{l}$ – числа в соответствующем столбце. Следовательно,

$$e^T=\sum_{1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant l}\Bigg(\sum_{p'\in R(T'),\ r'\in C(T')}\operatorname{sgn}(r)p'(a_i,n)(b_j,n)r'\Bigg),$$

где $r=(b_j,n)r'$; т.е. $\operatorname{sgn}(r)=-\operatorname{sgn}(r')$ при $b_j\neq n$ и $r=r'$ при $b_j=n$. Для того, чтобы вычислить $P_\alpha(e^T)$, заметим, что α коммутирует с p' и r', поэтому

$$\begin{aligned}P_\alpha(e^T)=\sum_{1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant l}&\Bigg(\sum_{p'\in R(T'),\ r'\in C(T')}-\operatorname{sgn}(r')p'(\bar a_i,\bar b_j)r'\Bigg)+\\&+\sum_{1\leqslant i\leqslant k-1}\Bigg(\sum_{p'\in R(T'),\ r'\in C(T')}\operatorname{sgn}(r')p'r'\Bigg)+\\&+\sum_{1\leqslant j\leqslant l-1}\Bigg(\sum_{p'\in R(T'),\ r'\in C(T')}-\operatorname{sgn}(r')p'r'\Bigg)+\\&+q\cdot\sum_{p'\in R(T'),\ r'\in C(T')}\operatorname{sgn}(r')p'r',\end{aligned}\tag{8}$$

где наборы $\{\bar a_i\}_{i=1}^{k}$ и $\{\bar b_i\}_{j=1}^{l}$ уже не содержат число n. Несложно проверить, что $\sum_{p'\in R(T'),\ r'\in C(T')}-\operatorname{sgn}(r')p'(a,b)r'=0$, если числа a и b находятся в разных строках и столбцах таблицы T'. Осталось заметить, что в этом случае

$$P_\alpha(e^T)=(q+(k-1)-(l-1))\sum_{\substack{p'\in R(T'),\\ r'\in C(T')}}\operatorname{sgn}(r')p'r'=(q+k-l)e^{T'}.\qquad\square$$

Теорема 1. *Алгебра $H_q^{1,n}$ полупроста для всех $q \notin \mathbb{Z}$. Набор $\{\pi_\lambda\}_{\lambda\vdash n}$, $\{\rho_\mu\}_{\mu\vdash n-1}$ задает полный набор попарно неэквивалентных неприводимых представлений этой алгебры. Размерность этой алгебры равна $\dim(H_q^{1,n}) = (n+1)!$.*

Доказательство. Построенные выше представления алгебры $H_q^{1,n}$ попарно неизоморфны. Действительно, для представлений π_λ, при $\lambda \vdash n$, образующая α отображается в ноль, а действие подалгебры S отвечает представлениям $\bar{\pi}_\lambda$ алгебры $\mathbb{C}[S_n]$, т.е. эти представления попарно различны.

Для представлений ρ_μ, $\mu \vdash n-1$, образ отображения $P_\alpha : \mathbb{C}[S_n] \mapsto \mathbb{C}[S_n]$ является инвариантным относительно подалгебры $\mathbb{C}[S_{n-1}] = \langle \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \rangle$, так как $P_\alpha(\mathbb{C}[S_n]) = \mathbb{C}[S_{n-1}]$; соответствующее представление алгебры $\mathbb{C}[S_{n-1}]$ есть $\bar{\pi}_\mu$, следовательно, представления ρ_μ также попарно различны.

Для любого представления T будем обозначать через $\mathrm{End}(T)$ алгебру линейных операторов в пространстве представления. Известно, что для попарно неизоморфных неприводимых представлений $\{T_i\}_{i=1}^k$ алгебры A отображение из A в $\bigoplus_{i=1}^k \mathrm{End}(T_i)$, переводящее элемент $a \in A$ в $\oplus_{i=1}^k T_i(a)$, является сюръективным (см., например, [2]). Т.е. в нашем случае отображение

$$i : H_q^{1,n} \to \sum_{\lambda\vdash n} \mathrm{End}(\pi_\lambda) \bigoplus \sum_{\mu\vdash n-1} \mathrm{End}(\rho_\mu), \ \ i(h) = \sum_{\lambda\vdash n} \pi_\lambda(h) \oplus \sum_{\mu\vdash n-1} \rho_\mu(h)$$

является сюръективным. Но $\dim(H_q^{1,n}) \leqslant (n+1)!$ по следствию 1, при этом

$$\sum_{\lambda\vdash n} \dim(\mathrm{End}(\pi_\lambda)) + \sum_{\mu\vdash n-1} \dim(\mathrm{End}(\rho_\mu)) = \tag{9}$$

$$= \sum_{\lambda\vdash n} \dim(\lambda)^2 + n^2 \cdot \sum_{\mu\vdash n-1} \dim(\mu)^2 = n! + n^2 \cdot (n-1)! = (n+1)!.$$

Следовательно, отображение i является биекцией, $\dim(H_q^{1,n}) = (n+1)!$, и, кроме того, алгебра $H_q^{1,n}$ полупроста и указанные представления действительно составляют полный список попарно неизоморфных неприводимых представлений алгебры. $\square$

Предложение 4. $\bar{H}_q^{1,n} = \sum_{\mu\vdash n-1} \mathrm{End}(\rho_\mu)$.

Доказательство. Формула прямо следует из разложения пространства $\mathbb{C}[S_n]$

$$\mathbb{C}[S_n]=\mathbb{C}[S_n]\cdot\mathbb{C}[S_{n-1}]=\mathbb{C}[S_n]\cdot(\sum_{\mu\vdash n-1}\mathrm{End}(\bar\pi_\mu))=\sum_{\mu\vdash n-1}(\mathbb{C}[S_n]\cdot\mathrm{End}(\bar\pi_\mu))$$

и определения представлений ρ_μ. $\square$

Построим граф ветвления семейства алгебр $\{H_q^{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$. Для этого рассмотрим характеры χ_λ^π и χ_μ^ρ полученных представлений. Обозначим через $\bar\chi_\lambda$ характер представления $\bar\pi_\lambda$ алгебры $\mathbb{C}[S_n]$. Понятно, что $\chi_\lambda^\pi(\sigma)=\bar\chi_\lambda(\sigma)$, если $\sigma\in S$, и что $\chi_\lambda^\pi(x\alpha y)=0$ для любых $x,y\in S$. Таким образом, для характеров χ_λ^π выполняется то же ветвление, что и для $\bar\chi_\lambda$:

$$\chi_\lambda^\pi=\sum_{\mu\nearrow\lambda}\chi_\mu^\pi. \tag{10}$$

Для описания ветвления характеров χ_μ^ρ нам потребуется более явное задание пространства V_μ:

$$V_\mu=\mathbb{C}[S_n]\bigotimes_{\mathbb{C}[S_{n-1}]}\bar V_\mu=\sum_{a=1}^{n}(a,n)\bigotimes_{\mathbb{C}[S_{n-1}]}\bar V_\mu.$$

Запишем элемент $h=\sigma^1\alpha\sigma^2$ в виде $h=(b,n)\bar\sigma^1\alpha\bar\sigma^2(c,n)$, где $1\leqslant b,c\leqslant n$, $\bar\sigma^1,\bar\sigma^2\in\langle\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1}\rangle$. Оператор P_h действует на элемент $(a,n)\otimes\bar\sigma$ следующим образом:

$$P_h((a,n)\otimes\bar\sigma)=(b,n)\bar\sigma^1\cdot P_\alpha(\bar\sigma^2(c,n)\cdot(a,n)\otimes\bar\sigma)=(b,n)\otimes\bar\sigma^1\bar\sigma^2(c,a)\bar\sigma.$$

Значит, оператор P_h – проектор на подпространство $(b,n)\bigotimes\mathbb{C}[S_{n-1}]$. Следовательно,

$$\chi_\mu^\rho((b,n)\bar\sigma^1\alpha\bar\sigma^2(c,n))=\bar\chi_\mu(\bar\sigma^1\bar\sigma^2(c,b)),$$

и, таким образом,

$$\chi_\mu^\rho(h)=\sum_{\nu\nearrow\mu}\chi_\nu^\rho(h),\quad \text{если } h=\sigma^1\alpha\sigma^2. \tag{11}$$

Рассмотрим значения характера χ_λ^π на элементах $\sigma\in S$. Если мы через $\bar\chi_\mu^I$ обозначим характер представления $\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}\bar\pi_\mu$, то из изложенного выше следует, что

$$\chi_\mu^\rho(\sigma)=\bar\chi_\mu^I(\sigma).$$

Докажем, что

$$\chi_\mu^\rho(\sigma) = \chi_\mu^\pi(\sigma) + \sum_{\nu\nearrow\mu} \chi_\nu^\rho(\sigma). \tag{12}$$

Мы знаем, что $\bar{\chi}_\mu^I = \sum_{\lambda\searrow\mu} \bar{\chi}_\lambda$ и что $\bar{\chi}_\lambda = \sum_{\mu\nearrow\lambda} \bar{\chi}_\mu$. Следовательно, нам нужно доказать, что

$$\bar{\chi}_\mu^I = \bar{\chi}_\mu + \sum_{\nu\nearrow\mu} \bar{\chi}_\nu^I \Leftrightarrow \sum_{\lambda\searrow\mu} \bar{\chi}_\lambda = \bar{\chi}_\mu + \sum_{\nu\nearrow\mu} \bar{\chi}_\nu^I \Leftrightarrow \sum_{\mu'\nearrow\lambda\searrow\mu} \bar{\chi}_{\mu'} = \bar{\chi}_\mu + \sum_{\mu''\searrow\nu\nearrow\mu} \bar{\chi}_{\mu''}.$$

Последнее равенство хорошо известно, что доказывает формулу (12).

Таким образом, используя тот факт, что $\chi_\mu^\pi(h) = 0$ при $h = \sigma^1\alpha\sigma^2$, мы выводим из формул (11) и (12), что $\chi_\mu^\rho = \chi_\mu^\pi + \sum_{\nu\nearrow\mu} \chi_\nu^\rho$. Это приводит нас к заключительной теореме.

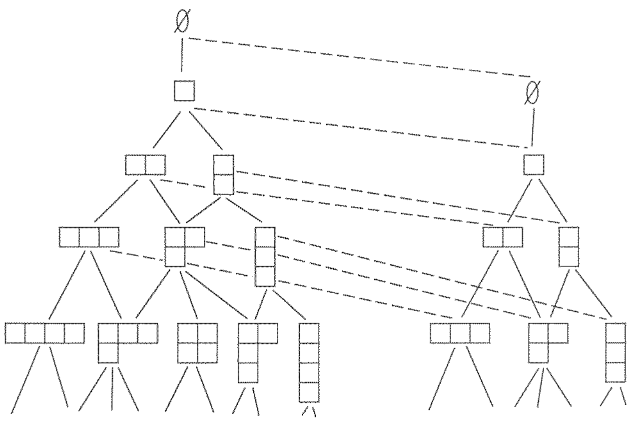

Рис. 1. Граф ветвления.

Теорема 2. *Ветвление характеров (и соответствующих представлений) семейства алгебр $\{H_q^{1,n}\}_{n=1}^\infty$ задается формулами*

$$\chi_\lambda^\pi = \sum_{\mu\nearrow\lambda} \chi_\mu^\pi, \qquad \chi_\mu^\rho = \chi_\mu^\pi + \sum_{\nu\nearrow\mu} \chi_\nu^\rho.$$

Обозначим представления алгебры $H_q^{1,n}$ отвечающими этим представлениям диаграммами. В этом случае, согласно теореме 2, граф ветвления семейства алгебр Тураева состоит из двух графов Юнга, отвечающих наборам представлений $\{\pi_\lambda\}$ и $\{\rho_\mu\}$. Эти два графа расположены со сдвигом на один этаж, с добавлением ребер, соединяющих одинаковые диаграммы, см. рис. 1.

Литература

1. А. Ю. Окуньков, А. М. Вершик, *Новый подход к теории представлений симметрических групп.* Зап. научн. семин. ПОМИ **307**, (2004), 57–98.
2. И. Райнер, Ч. Кертис, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.* Наука, М. (1969).
3. В. Г. Тураев, *Операторные инварианты матриц и r-матрицы.* — Изв. АН СССР, сер. мат., **53**, вып. 5 (1989), 1073–1989.
4. G. James, A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 16, Addison-Wesley (1981).
5. A. Vershik, S. Kerov, G. Olshanski, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group.* Inv. Math. **158**, No. 3 (2004), 551–642.
6. H. Wensl, *On the structure of brauer's centralizer algebras.* — Ann. Math. **128**, No. 1 (1988), 173–193.

Nikitin P. P. The representation theory and the branching graph for the family of Turaev algebras $\{H_q^{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$.

In this paper we consider the family of algebras $\{H_q^{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$. The algebra $H_q^{1,n}$ can be constructed from the group algebra of the symmetric group S_n by changing the first generator. For the algebras under consideration we describe the representations and construct the branching graph.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: pnikitin0103@yahoo.co.uk

Поступило 23 мая 2005 г.