Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 326, 2005 г.

Л. Ю. Глебский, Е. И. Гордон

ОБ АППРОКСИМАЦИИ АМЕНАБЕЛЬНЫХ ГРУПП КОНЕЧНЫМИ КВАЗИГРУППАМИ

Посвящается Анатолию Моисеевичу Вершику

1. Введение

А. М. Вершиком неоднократно высказывалась идея о том, что феномен аменабельности групп связан с хорошей, в подходящем смысле, аппроксимируемостью этих групп конечными (см., например, [2–4]). Действительно, критерий Фелнера может быть переформулирован в терминах аппроксимации действия группы на себе левыми сдвигами действиями конечных групп на конечных множествах. Имеется много результатов об аппроксимации действий аменабельных групп действиями конечных групп (см., например [11, 14, 15] и упомянутые выше статьи [2–4]). Однако характеризация аменабельности в терминах аппроксимации груповой операции групповыми операциями конечных групп отсутствует.

В работе [4] было введено и изучено одно очень общее определение аппроксмируемости группы конечными группами. При этом оказалось, что существуют аменабельные группы, вообще не аппроксимируемые конечными группами в смысле этого определения. Таким образом, в рамках этого определения имеет смысл только вопрос о характеризации аппроксимруемых аменабельных групп в терминах каких-то количественных характеристик аппроксимации. Одно достаточное условие, сформулированное в этих терминах, получено в [1]. Однако вопрос о его необходимости остается открытым.

В связи с существованием групп, не аппроксимируемых конечными группами, естественно возникает вопрос об аппроксимруемости групп конечными алгебраическими системами более широких классов. Напомним, что в общей алгебре и логике алгебраические системы, в сигнатуре которых имеются только функциональные символы, называются (универсальными) алгебрами. Универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из единственного бинарного функционального символа, называется группоидом.

Вопрос об аппроксимируемсти локально компактных групп конечными полугруппами и квазигруппами обсуждается в [5] (подробные доказательства содержатся в [6, 7]). Оказывается, что аппроксмируемость групп конечными полугруппами эквивалентна их аппроксимируемости конечными группами. С другой стороны, любая дискретная группа аппроксимруется конечными квазигруппами. Этот факт легко следует (см. ниже) из известной в комбинаторике теоремы о дополнении частичного латинского квадрата до полного.

В настоящей заметке получено необходимое и достаточное условие аменабельности группы в терминах количественных характеристик ее аппроксимируемости конечными квазигруппами. На самом деле полученное условие является необходимым для аменабельности квазигрупп. Отметим, что для наличия инвариантного среднего именно свойства квазигруппы (однозначная разрешимость уравнений $a \circ x = b$ и $x \circ a = b$) являются принципиальными. В самом деле, для любой конечной алгебры $\langle G, \circ\rangle$ среднее $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} f(g)$, где $f \in \mathbb{R}^G$, является двусторонне инвариантным в том и только том случае, когда G – квазигруппа.

Приводится также критерий аменабельности левых квазигрупп (см. определение 2) в терминах их аппроксимаций конечными квазигруппами.

2. Аппроксимируемость левых, правых и двусторонних квазигрупп конечными

Нижеследующее определение является частным случаем известного в теории моделей определения локальной вложимости алгбраической системы A в класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем той же сигнатуры (см., например, [10]).

Определение 1. *Группоид $\langle G, \cdot\rangle$ аппроксимируется группоидами из класса $\mathcal{K}$, если для любого конечного множества $F \subseteq G$ существуют множество H, $F \subset H \subset G$ и бинарная операция $\circ$ на H, такие, что $\langle H, \circ\rangle \in \mathcal{K}$ и*

$$\forall a, b \in F \quad a \cdot b = a \circ b. \tag{1}$$

Иными словами, каждый конечный квадрат, вырезанный из таблицы Кэли группоида G, дополняется до таблицы Кэли некоторого группоида из класса $\mathcal{K}$. Пусть $\mathcal{K}$ – некоторый класс конечных группоидов, аппроксимирующих группоид G, $F \subset G$ – конечное множество. Обозначим через $AP_F^{\mathcal{K}}(G)$ множество группоидов $\langle H, \circ \rangle$ удовлетворяющих условию (1) определения 1.

В настоящей заметке нас интересует только аппроксимация счетных группоидов классами, состоящими из конечных группоидов. Для этого случая определение 1 эквивалентно следующему условию [4].

Предложение 1. *Для того, чтобы счетный группоид $\langle G, \cdot \rangle$ был аппроксимируем конечными группоидами из класса $\mathcal{K}$, необходимо и достаточно существование такой последовательности конечных группоидов $\langle H_n, \circ_n \rangle \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$, что выполнены следующие условия.*

1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ $H_n \subseteq G$ как множество.*
2. $\varinjlim H_n = G$.
3. $\forall\, a, b \in G \,\exists\, N \,\forall\, n > N \quad a \cdot b = a \circ_n b$.

Определение 2. *Группоид $\langle L, \cdot \rangle$ называется левой (правой) квазигруппой, если для любых $a, b \in Q$ уравнение $a \cdot x = b$ $(x \cdot a = b)$ имеет единственное решение. Группоид $\langle Q, \cdot \rangle$ называется квазигруппой, если он является одновременно левой и правой квазигруппой.*

Замечание 1. Обычно в литературе двусторонние квазигруппы называются просто квазигруппами. Левые и правые квазигруппы были введены в [5, 6] в связи с изучением аппроксимаций локально компактных групп. Ниже, если термин "квазигруппа" употребляется без прилагательного "левая" или "правая", то имеется ввиду двусторонняяя квазигруппа, т.е. квазигруппа в общепринятом смысле этого слова.

Таблица Кэли конечной квазигруппы $\langle Q, \circ \rangle$ представляет собой латинский квадрат над Q, т.е. такую квадратную $n \times n$ матрицу, каждая строка и каждый столбец которой представляют собой перестановку элементов Q, где $n = |Q|$.

Обозначим через $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ классы конечных левых квазигрупп, правых и двусторонних квазигрупп соответственно.

Теорема 1. 1. *Каждая левая (правая) квазигруппа $\langle L, \cdot \rangle$ аппроксимируется конечными левыми (правыми) квазигруппами. При этом,* *если $F \subseteq L$ – конечное множество, то существует такая конечная левая (правая) квазигруппа $\langle H, \circ\rangle \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, что $H = F^2 \cup F$, где $F^2 = \{a \cdot b \mid a, b \in F\}$.*

2. *Каждая квазигруппа $\langle Q, \cdot\rangle$ аппроксимируется конечными квазигруппами. При этом если $F \subseteq L$ – конечное множество, то существует такая конечная левая (правая) квазигруппа $\langle H, \circ\rangle \in AP_F^{\mathcal{Q}}(L)$, что $|H| = 2|F^2 \cup F|$.*

Для доказательства второго утверждения теоремы нам потребуется известная теорема Эванса о дополненнии частичных латинских квадратов до полных, которая непосредственно следует из теоремы Райзера о латинских прямоугольниках [13]. Последняя понадобится нам ниже в доказательстве теоремы 5.

Напомним, что $p \times q$-матрица $L = (l_{ij})$ называется латинским прямоугольником над конечным множеством A, если $l_{ij} \in A$ и каждый элемент A встречается в каждой строке и в каждом столбце матрицы L не более одного раза. Частичный латинский квадрат над множеством A это $m \times m$-таблица, некоторые клетки которой заполнены элементами множества A так, что каждый элемент встречается в каждом столбце и в каждой строке не более одного раза.

Теорема (Райзер). *Пусть L – латинский прямоугольник размера $p \times q$ над конечным множеством A. Если $a \in A$, то обозначим через $N_L(a)$ количество вхождений a в L. Тогда L может быть дополнен до латинского квадрата над A если и только если для любого $a \in A$ выполнено неравенство*

$$N_L(a) \geq p + q - |A|.$$

Следствие (Теорема Эванса). *Частичный $m \times m$-латинский квадрат над множеством A из m элементов может быть дополнен до полного латинского квадрата над $B \supseteq A$, если $n|B| \geq 2m$.*

Доказательство теоремы 1. 1. Положим $H = F^2 \cup F$ и определим операцию $\circ$ на H, например, следующим образом. Пусть $f \in F$, $h \in H$. Тогда $f \circ h = f \cdot h$, если $h \in F$. Осталось определить $f \circ h$ для всех $h \in H \setminus F$. Поскольку $|F| = |f \cdot F|$ (L – левая квазигруппа!) и $f \cdot F \subseteq H$, имеем равенство $|H \setminus F| = |H \setminus f \cdot F|$. Возьмем произвольную биекцию $\pi : H \setminus F \to H \setminus f \cdot F$ и положим $f \circ h = \pi(h)$. Очевидно, что отображение $\lambda_f : H \to H$, такое, что $\lambda_f(h) = f \circ h$, является биекцией.

Для $f \in H \setminus F$, $h \in H$ положим $f \circ h = h$. Очевидно, что построенная левая квазигруппа $\langle H, \circ \rangle$ удовлетворяет первому утверждению теоремы.

2. Пусть $F \subseteq Q$ – конечное множество. Всякая квазигруппа $\langle H, \circ \rangle \in AP_F^{\mathcal{Q}}(Q)$ должна содержать множество $F^2 \cup F$ в качестве подмножества. Пусть $|F^2 \cup F| = m$, $|F| = n$. Занумеруем элементы множества $F^2 \cup F$ так, что первые n элементов есть элементы множества $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Рассмотрим $m \times m$-таблицу, в которой заполнены только клетки размера $n \times n$ в левом верхнем углу. При этом в клетке (i, j) находится элемент $f_i \cdot f_j$. Очевидно, полученная таблица есть частичный латинский квадрат размера $m \times m$ над множеством $F^2 \cup F$. Дополним это множество еще m различными элементами из множества $Q \setminus (F^2 \cup F)$ (это возможно, так как множество Q бесконечно). Обозначим полученное множество через H. Поскольку $|H| = 2m$, то по теореме Эванса построенный нами частичный латинский квадрат можно дополнить до полного латинского квадрата над H. Последний представляет собой таблицу некоторой квазигрупповой операции $\circ$ на H. Очевидно, что квазигруппа $\langle H, \circ \rangle$ удовлетворяет условиям утверждения 2 теоремы 1. $\square$

Из утверждения 2 теоремы 1 следует, что любая группа аппроксимируется конечными квазигруппами. Последнее утверждение может быть значительно усилено.

Напомним, что квазигруппа L с единицей e называется лупой. Из аксиом квазигруппы следует существование и единственность левого обратного y к элементу x $(yx = e)$ и правого обратного z к x $(xz = e)$. Если в лупе левый обратный к любому элементу равен правому обратному к этому элементу, то говорят, что в лупе определена операция взятия обратного элемента. Если все элементы лупы L удовлетворяют тождеству $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, то L называется IAA-лупой (*inverse anti-automorphism*).

Обозначим через $\mathcal{I}$ – класс IAA-луп.

В статье [9] фактически доказано следующее утверждение.

Теорема (М. Зиман). *Любая IAA-лупа $\langle L, \cdot \rangle$ (в частности, любая группа) аппроксимируется конечными IAA-лупами. При этом, если $F \subseteq L$ – конечное множество, такое, что $e \in F$ и для любого $f \in F$ выполняется включение $f^{-1} \in F$, то существует такая конечная IAA-лупа $\langle H, \circ \rangle$, что $|H| \geq \max(2|F|, |F^2|)$ и $|H|$ четно.*

3. Аменабельность левых, правых и двусторонних квазигрупп

Понятие аменабельности может быть введено для произвольного группоида $\langle G, \cdot\rangle$. Пусть $B(G)$ – пространство ограниченных вещественных функций на G. Напомним, что средним на G называется положительный линейный функционал на $B(G)$, такой, что $m(\mathbf{1}) = 1$, где $\mathbf{1}$ – функция на G, тождественно равная единице.

Если $a \in G$, $f \in B(G)$, то, как обычно, обозначим через ${}_af$ (f_a) функцию на G, такую, что ${}_af(g) = f(a \cdot g)$ $(f_a(g) = f(g \cdot a))$ для любого $g \in G$. Среднее m называется левоинвариантным (правоинвариантным), если $m(f) = m({}_af)$ $(m(f) = m(f_a))$ для любых $a \in G$ и $f \in B(G)$. Среднее m, являющееся одновременно левоинвариантным и правоинвариантным, называется (двусторонне) инвариантным. Группоид G называется лево-аменабельным (право-аменабельным, аменабельным), если существует ненулевое левоинвариантное (правоинвариантное, двусторонне инвариантное) среднее на G.

Известно (см., например, [8]), что из существования левоинвариантного среднего на группе G следует существование как правоинвариантного среднего, так и двусторонне инвариантного среднего на G. Однако простые доказательства этих фактов не проходят уже для квазигрупп. Обычное доказательство того, что существование левоинвариантного среднего влечет существование правоинвариантного среднего, очевидным образом проходит для IAA-луп. Однако для доказательства существования в этом случае двусторонне инвариантного среднего уже требуется ассоциативность в полном объеме.

Ниже, говоря об аменабельных левых квазигруппах, правых квазигруппах, двусторонних квазигруппах, мы имеем в виду лево-аменабельные левые квазигруппы, право-аменабельные правые квазигруппы и аменабельные квазигруппы соответственно.

Для аменабельных левых квазигрупп справедлив критерий Фелнера, который в этом случае формулируется точно так же, как для групп (см., например [8]).

Теорема 2. *Левая квазигруппа $\langle L, \cdot\rangle$ аменабельна в том и только том случае, когда для любого конечного множества $F \subseteq L$ и любого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $U \subseteq L$, такое, что для* *любого* $f \in F$

$$\frac{|U \bigtriangleup (f \cdot U)|}{|U|} < \varepsilon.$$

При этом множество U, *удовлетворяющее этим условиям, можно выбрать содержащим любое заданное множество* $K \subseteq L$

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть группу G перестановок L, порожденных левыми сдвигами. Ясно, что L аменабельна в том и только том случае, когда действие G на L аменабельно. Теперь достаточно применить критерий Фелнера для аменабельных действий групп [12]. Второе утверждение теоремы доказывается точно так же, как для групп (см., например, [8]). □

Теорема 3. *Левая квазигруппа* $\langle L, \cdot \rangle$ *аменабельна в том и только том случае, когда существует последовательность конечных левых квазигрупп* $\langle H_n, \circ_n \rangle$, *удовлетворяющая условиям предложения 1 и такая, что для любого* $a \in L$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{h \in H_n \mid a \circ_n h \neq a \cdot h\}|}{|H_n|} = 0. \tag{2}$$

Доказательство. *Достаточность.* Зафиксируем произвольный свободный ультрафильтр $\mathcal{F}$ на $\mathbb{N}$ и определим функционал m на $B(G)$, положив для любой функции $f \in B(G)$

$$m(f) = \lim_{\mathcal{F}} \frac{1}{|H_n|} \sum_{h \in H_n} f(h). \tag{3}$$

(См. [1] по поводу определения и свойств пределов по ультрафильтрам.) Поскольку последовательность в формуле (3) ограничена при $f \in B(G)$, ее предел по любому ультрафильтру существует. Теперь очевидно, что построенный функционал является средним на G. Осталось показать его левую инвариантность. Зафиксируем $a \in G$. В силу свойства 2 предложения 1 $a \in H_n$ для всех n, начиная с некоторого. Поскольку предел по свободному ультрафильтру не зависит от конечного числа членов последовательности, не ограничивая общности, можно считать, что $a \in H_n$ для всех n. Нужно показать, что $m(f) = m({}_a f)$.

Пусть $A_n = \{h \in H_n \mid a \circ_n h \neq a \cdot h\}$. Имеем

$$\Big|\sum_{h\in H_n} f(a\cdot h) - \sum_{h\in H_n} f(h)\Big| = \Big|\sum_{h\in H_n} f(a\cdot h) - \sum_{h\in H_n} f(a\circ_n h)\Big| =$$

$$=\Big|\sum_{h\in A_n} f(a\circ_n h) - f(a\cdot h)\Big| \leq 2|A_n|\cdot\|f\|.$$

Мы воспользовались тем, что $\langle H, \circ_n\rangle$ – левая квазигруппа, т.е. отображение $h \longmapsto a\circ_n h$ биективно. Теперь равенство $m(f) = m({}_af)$ очевидно в силу того, что по условию теоремы $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|A_n|}{|H_n|} = 0$, а следовательно, и $\lim\limits_{\mathcal{F}}\frac{|A_n|}{|H_n|} = 0$.

Необходимость. Пусть $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots$ – возрастающая последовательность конечных подмножеств L, такая, что $\bigcup\limits_k F_k = L$, а ε_k – последовательность положительных чисел, такая, что $|F_k|\varepsilon_k \to 0$ при $k\to\infty$. Из теоремы 2 легко следует существование такой последовательности U_k, $k\in\mathbb{N}$, конечных подмножеств L, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. $F_k \subset U_k$;
2. $\dfrac{|\{x\in U_k \mid \forall f\in F_k\, f\cdot x\in U_k\}|}{|U_k|} \geq 1-\varepsilon_k$.

Положим $H_k = U_k \cup (F_k\cdot U_k)$, $V_k = H_k\setminus U_k$. Заметим, что $|V_k| \leq \varepsilon_k|F_k||U_k|$

Определим операцию $\circ_k$ на H_k следующим образом.

Если $f\notin F_k$, $h\in F_k$, то положим $f\circ_k h = h$.

Пусть $f\in F_k$. Заметим, что $|U_k\setminus(f\cdot U_k)| = |(f\cdot U_k)\cap V_k|$ и зафиксируем биекцию $\pi : (f\cdot U_k)\cap V_k \to U_k\setminus(f\cdot U_k)$. Теперь положим для любого $h\in H_k$

$$f\circ_k h = \begin{cases} f\cdot h, & h\in U_k\\ h, & \in V_k\setminus(f\cdot U_k)\\ \pi(h), & \in (f\cdot U_k)\cap V_k. \end{cases}$$

Очевидно, построенный группоид $\langle H_k, \circ_k\rangle$ обладает следующими свойствами:

1. $\langle H_k, \circ_k\rangle$ – левая квазигруппа.
2. $F_k \subseteq H_k$;

3. для любых $f_1,\ f_2 \in F_k$ $f_1 \cdot f_2 = f_1 \circ_k f_2$;
4. для любого $f \in F_k$ $W_k = \{x \in H_k \mid f \cdot x \neq f \circ_k x\} \subseteq V_k$, т.е. $\frac{|W_k|}{|U_k|} \to 0$ при $k \to \infty$.

Первые три свойства обеспечивают выполнение условий предложения 1, четвертое условие обеспечивает выполнение равенства (2). □

Вопрос о том, справедлива ли аналогичная теорема в случае аппроксимации квазигруппы конечными квазигруппами, остается открытым. Здесь можно получить несколько более слабое утверждение.

Нам понадобится следующая теорема, представляющая собой почти очевидную модификацию теоремы 3.12 [1]. Ниже кванторы $\forall^f$ и $\exists^f$ обозначают "для любого конечного множества" и "существует конечное множество" соответственно.

Теорема 4. *Для того, чтобы квазигруппа G была аменабельна, необходимо, а в случае, когда G – группа, и достаточно, выполнение следующего условия:*

$$\begin{gathered}\exists\, q > 0\, \forall^f K \subset G \quad \exists^f F \subset G \quad K \cup K^2 \subseteq F \\ \text{и} \quad \frac{|\{x \in F \mid \forall k \in K\, kx \in F\}|}{|F|} \geq q.\end{gathered} \tag{4}$$

Доказательство. Условие (4) в теореме 4 отличается от условия (1) теоремы 3.12 статьи [1] только наличием включения $K \subseteq F$. Доказательство достаточности проходит и без этого включения.

В доказательстве необходимости в теореме 3.12 речь идет только о группах. Однако оно проходит практически без изменений и для квазигрупп в силу теоремы 2. В этом доказательстве в качестве F берется фелнеровское множество, которое, в силу теоремы 2, всегда можно выбрать содержащим произвольное конечное множество. □

Пусть $\langle G, \cdot\rangle$ – счетный группоид, а $\mathcal{K}$ – класс конечных группоидов. Введем следующие обозначения:

$$\lambda_K^{\mathcal{K}}(G) = \sup\left\{\frac{|\{x \in H \mid \forall k \in K\, kx = k \circ x\}|}{|H|} \mid H \in AP_K^{\mathcal{K}}(G)\right\};$$

$$c^{\mathcal{K}}(G) = \inf\left\{\lambda_K^{\mathcal{K}}(G) \mid K \subset G,\ |K| < \infty\right\}.$$

Теорема 5. *Для того, чтобы счетная квазигруппа G была аменабельна, необходимо, а в случае, когда G – группа, и достаточно выполнение неравенства $c^{\mathcal{Q}}(G) > 0$.*

Доказательство. Очевидно, что неравенство $c^{\mathcal{Q}}(G) > 0$ равносильно следующему условию:

$$\exists\, q > 0\, \forall^f K \subset G\, \exists^f \langle H, \circ\rangle \in AP^{\mathcal{Q}}_K(G) \quad K \subseteq H$$
$$\text{и} \quad \frac{|\{x \in H \mid \forall k \in K\; k \cdot x = k \circ x\}|}{|H|} \geq q. \tag{5}$$

Достаточность немедленно вытекает из теоремы 4 и включения

$$\{x \in H \mid \forall k \in K \quad kx \in K\} \supseteq \{x \in H \mid \forall k \in K \quad kx = k \circ x\}.$$

Необходимость. Рассмотрим произвольное конечное множество $K \subseteq G$ и построим по нему конечное множество F, удовлетворяющее теореме 4. Пусть $U = \{x \in F \mid \forall k \in K\, k \cdot x \in F\}$. Заметим, что $K \subseteq U$ в силу того, что $K^2 \subseteq F$. Пусть $K = \{k_1, \dots, k_p\}$, $U = \{x_1, \dots, x_q\}$. Рассмотрим $p \times q$-латинский прямоугольник $L = (l_{ij})$ над F, такой, что $l_{ij} = k_i \cdot x_j$. По теореме Райзера L дополняется до латинского квадрата над множеством $H \supseteq F$, таким, что $|H| = \max\{|K| + |U|, |F|\}$. Этот латинский квадрат можно рассматривать как таблицу Кэли квазигрупповой операции $\circ$ на H. Очевидно, что $\langle H, \circ\rangle \in AP^{\mathcal{Q}}_K$. Пусть $W = \{h \in H \mid \forall k \in K k \cdot h = k \circ H\}$. Тогда $W \supset U$. Поскольку $|U| \geq q|F|$, легко видеть, что $\frac{|W|}{|H|} \geq \frac{|U|}{|H|} \geq \min\{\frac{1}{2}, q\}$. □

Вопрос 1. Останется ли утверждение теоремы справедливым в случае, если $\langle G, \cdot\rangle$ – IAA-лупа, а вместо $\mathcal{Q}$ рассмотреть класс конечных IAA-луп?

Вопрос 2. В работах [6, 7] показано, что любая локально компактная левая квазигруппа аппроксимируется конечными левыми квазигруппами, а любая локально компактная группа аппроксимируется квазигруппами в том и только том случае, когда она унимодулярна. Существуют ли аналоги теорем 3 и 5 для этого случая?

Литература

1. М. А. Алексеев, Л. Ю. Глебский, Е. И. Гордон. *Об аппроксимациях групп, групповых действий и алгебр Хопфа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **256** (1999), 224–262.

2. А. М. Вершик, *Счетные группы, близкие к конечным.* В кн. [8], 112–135.
3. A. M. Vershik, *Amenability and approximation of infinite groups.* — Sel. Math. Sov. **2**, No. 4 (1982), 311–330.
4. А. М. Вершик, Е. И. Гордон, *Группы, локально вложимые в класс конечных групп.* — Алгебра и Анализ **9**, No. 1 (1997), 71–91.
5. L. Yu. Glebsky, E. I. Gordon, *On approximation of locally compact groups by finite algebraic systems.* — Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **10**, (2004), 21–28.
6. L. Yu. Glebsky, E. I. Gordon, *On approximation of locally compact groups by finite quasigroups and finite semigroups.* — Accepted by the Illinois Journal of Mathematics.
7. L. Yu. Glebsky, E. I. Gordon, *On approximation of unimodular groups by finite quasigroups.* — Accepted by the Illinois Journal of Mathematics .
8. Ф. Гринлиф, Инвариантные средние на топологических группах. Мир, М. (1973).
9. M. Ziman, *Extensions of Latin subsquares and local embeddability of groups and group algebras.* — Quasigroups and related systems **12** (2005).
10. А. И. Мальцев, *Алгебраические системы.* Наука, М. (1970).
11. D. Ornstein, B. Weiss, *Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups.* — J. d'Analyse Math. 48 (1987), 1–141.
12. J. M. Rosenblatt, *A generalization of Fölner condition.* — Math. Scand. **33** (1973), 153–170.
13. H. J. Ryser, *Combinatorial Mathematics.* The Carus Mathematical Monographs **15** (1963).
14. А. М. Степин, *Аппроксимируемость групп и групповых действий.* — Успехи мат. наук **38**, No. 6 (1983), 123–124.
15. A. M. Stepin, *Approximation of groups and group actions. Cayley topology. Ergodic theory of* $\mathbf{Z}^d$*-actions.* — London Math. Soc., Lect. Notes Series **228**, Cambridge Univ. Press (1996), 474–484.

Glebsky L. Yu., Gordon Ye. I. On approximation of amenable groups by finite quasigroups.

An amenability criterion for groups in terms of their approximation by finite quasigroups is given.

Поступило 27 мая 2005 г.

IICO-UASLP AvKarakorum 1470
Lomas 4ta Session SanLuis
Potosi SLP 7820 Mexico

E-mail: glebsky@cactus.iico.uaslp.mx

Department of Mathematics
and Computer Science
Eastern Illinois University

E-mail: cfyig@eiu.edu