Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 326, 2005 г.

Г. Л. Литвинов

ДЕКВАНТОВАНИЕ МАСЛОВА, ИДЕМПОТЕНТНАЯ И ТРОПИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА: КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Анатолию Моисеевичу Вершику
с восхищением и благодарностью

Эта статья практически не содержит строгих формулировок теорем и их доказательств, она является лишь кратким введением в деквантование Маслова, идемпотентную и тропическую математику. Список цитируемой литературы отнюдь не является полным. Дополнительные ссылки могут быть найдены, например, в электронном архиве

`http:// arXiv.org`

и в работах [9, 17, 21, 25, 28–31, 37, 38, 51, 62, 64–70, 84, 87, 89, 93, 96, 102, 104, 110, 115, 137, 187]. Настоящий обзор является расширенной версией статьи [101].

Автор благодарен М. Акиан (M. Akian), Я. И. Белопольской, П. Бутковичу (P. Butkovič), Г. Коэну (G. Cohen), С. Гоберу (S. Gaubert), Р. А. Канингхем-Грину (R. A. Cuninghame-Green), П. Дел Моралу (P. Del Moral), У. Х. Флемингу (W. H. Fleming), Дж. С. Голану (J. S. Golan), М. Гондрану (M. Gondran), И. Итенбергу (I. Itenberg), Е. Кацову (Y. Katsov), В. Н. Колокольцову, П. Лорети (P. Loreti), Ю. И. Манину, Дж. Маскари (G. Mascari), У. М. Макэнэни (W. M. Mac-Eneaney), Г. Паниной, Е. Папу (E. Pap), М. Педишини (M. Pedicini), А. Праду (H. Prade), А. А. Пухальскому (A. A. Puhalskii), Ж.-П. Квадра (J.-P. Quadrat), М. А. Ройтбергу, А. В. Чуркину, Г. Б. Шпизу, И. Зингеру (I. Singer), и О. Виро за полезные добавления и замечания.

Эта работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00824 и Международным институтом математической физики им. Э. Шредингера в Вене (Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics).

Автор особенно благодарен В. П. Маслову за всестороннюю помощь и поддержку и А. Н. Соболевскому за большую помощь, включая три рисунка и многое другое.

1. Основные идеи

В основе идемпотентной математики лежит замена обычных арифметических операций новым набором базовых операций (такими как максимум или минимум), при этом числовые поля заменяются идемпотентными полукольцами и полуполями. Типичные примеры – так называемые алгебра макс-плюс $\mathbf{R}_{\max}$ и алгебра мин-плюс $\mathbf{R}_{\min}$. Пусть $\mathbf{R}$ – поле вещественных чисел. Тогда $\mathbf{R}_{\max} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ с операциями $x \oplus y = \max\{x, y\}$ и $x \odot y = x + y$. Аналогично $\mathbf{R}_{\min} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ с операциями $\oplus = \min$, $\odot = +$. Новое сложение $\oplus$ является идемпотентной операцией, то есть $x \oplus x = x$ для всех x.

Начиная с классической работы С. Клини [88], многие авторы (Ц. Клини, Ц. Н. Н. Пандит, Н. Н. Воробьев, Б. А. Карре, Р. А. Канингхем-Грин, К. Циммерманн, У. Циммерманн, М. Гондран, Ф. Л. Баккелли, Г. Коэн, С. Гобер, Г. Дж. Олсдер, Ж.-П. Квадра и др.) использовали идемпотентные полукольца и матрицы над этими полукольцами для решения ряда прикладных задач дискретной математики и информатики. Современный *идемпотентный анализ* (или *идемпотентное исчисление*, или *идемпотентная математика*) был разработан В. П. Масловым и его сотрудниками в восьмидесятых годах в Москве, см., например, работы [96, 119–124]. Некоторые предварительные результаты сформулировали Э. Хопф и Г. Шоке, см. работы [24, 71].

Идемпотентную математику можно рассматривать как результат деквантования традиционной математики над числовыми полями, при котором постоянная Планка $\hbar$ стремится к нулю, принимая мнимые значения. Такая точка зрения была представлена Г. Л. Литвиновым и В. П. Масловым [102–104], см. также [110, 111]. Иначе говоря, идемпотентная математика является асимптотической версией традиционной математики над полями вещественных и комплексных чисел.

Основную парадигму идемпотентной математики выражает *идемпотентный принцип соответствия*. Этот принцип тесно связан со знаменитым принципом соответствия Нильса Бора для квантовой теории. Оказывается, что существует эвристическое соответствие между рядом важных, интересных и полезных конструкций и результатов обычной математики над полями и аналогичными конструкциями и результатами над идемпотентными полуполями и полукольцами (полуполями и полукольцами с идемпотентными сложением).

Систематическое и последовательное использование идемпотентного принципа соответствия приводит к многообразным результатам, часто весьма неожиданным. В результате, наряду с традиционной математикой, возникает ее "теневая" идемпотентная версия. Эта "теневая" версия так же связана с традиционной математикой, как классическая физика с физикой квантовой, см. рис. 1

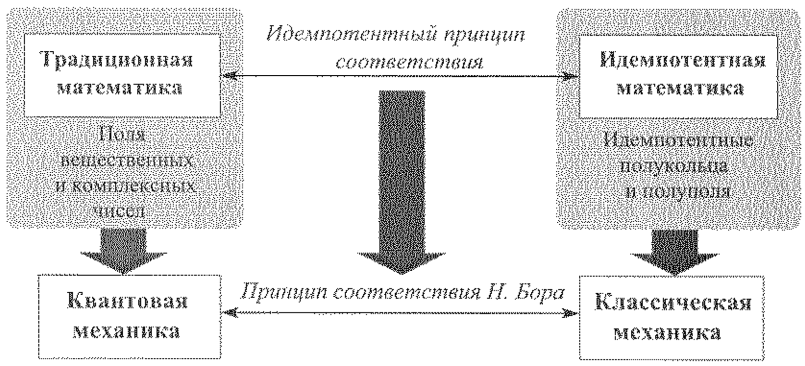

Рис. 1. Связь между идемпотентной и традиционной математикой.

Во многих отношениях идемпотентная математика проще традиционной. Однако переход от традиционных конструкций и результатов к их идемпотентным аналогам часто является нетривиальным.

2. Полукольца, полуполя и деквантование

Пусть на множестве S заданы две алгебраические операции: *сложение* $\oplus$ и *умножение* $\odot$. Говорят, что на множестве S задано *полукольцо*, если выполняются следующие условия:

- сложение $\oplus$ и умножение $\odot$ ассоциативны;
- сложение $\oplus$ коммутативно;
- умножение $\odot$ дистрибутивно относительно сложения $\oplus$:

$$x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z) \quad \text{и}$$

$$(x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z)$$

для любых $x, y, z \in S$.

Единицей полукольца S называется такой элемент $\mathbf{1} \in S$, что $\mathbf{1} \odot x = x \odot \mathbf{1} = x$ для всех $x \in S$. *Нулем* полукольца S называется такой элемент $\mathbf{0} \in S$, что $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ и $\mathbf{0} \oplus x = x$, $\mathbf{0} \odot x = x \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ для всех $x \in S$. Полукольцо S называется *идемпотентным полукольцом*, если $x \oplus x = x$ для всех $x \in S$. Полукольцо S с элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ называется *полуполем*, если для любого ненулевого элемента множества S существует обратный элемент. Заметим, что диоиды в смысле работ [9, 67, 68], кванталы в смысле [147, 148], и инклайны в смысле [84] являются примерами идемпотентных полуколец.

Рассмотрим поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ и полуполе всех неотрицательных вещественных чисел $\mathbf{R}_+$ (относительно обычных операций сложения и умножения). Замена переменных $x \mapsto u = h \ln x$, $h > 0$, задает отображение $\Phi_h \colon \mathbf{R}_+ \to S = \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Перенесем операции сложения и умножения из $\mathbf{R}$ в S с помощью отображения Φ_h, а именно, пусть $u \oplus_h v = h \ln(\exp(u/h) + \exp(v/h))$, $u \odot v = u + v$, $\mathbf{0} = -\infty = \Phi_h(0)$, $\mathbf{1} = 0 = \Phi_h(1)$. Таким образом S приобретает структуру полукольца $\mathbf{R}^{(h)}$, изоморфного $\mathbf{R}_+$; см. рис. 2.

Несложно проверить, что $u \oplus_h v \to \max\{u, v\}$ при $h \to 0$ и что S образует полукольцо относительно сложения $u \oplus v = \max\{u, v\}$ и умножения $u \odot v = u + v$ с нулевым элементом $\mathbf{0} = -\infty$ и единицей $\mathbf{1} = 0$. Обозначим это полукольцо через $\mathbf{R}_{\max}$; оно *идемпотентно*, так как $u \oplus u = u$ для всех элементов. При этом полукольцо $\mathbf{R}_{\max}$ является полуполем. Аналогия с процедурой квантования здесь очевидна, параметр h играет роль постоянной Планка, поэтому полуполе $\mathbf{R}_+$ можно рассматривать как "квантовый" объект, а полукольцо $\mathbf{R}_{\max}$ может рассматриваться как результат его "деквантования". Аналогичная процедура для $h < 0$ дает полукольцо $\mathbf{R}_{\min} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ с операциями $\oplus = \min$, $\odot = +$; в этом случае $\mathbf{0} = +\infty$, $\mathbf{1} = 0$. Полукольца $\mathbf{R}_{\max}$ и $\mathbf{R}_{\min}$ изоморфны. Переход

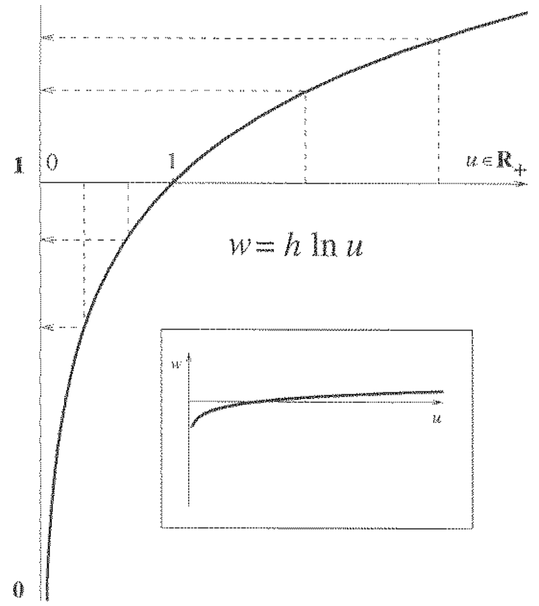

Рис. 2. Переход от $\mathbf{R}_+$ к $\mathbf{R}^{(h)}$. На вставке: то же для малых h.

к $\mathbf{R}_{\max}$ или $\mathbf{R}_{\min}$ называется *деквантованием Маслова.* Понятно, что соответствующий переход от $\mathbf{C}$ или $\mathbf{R}$ к $\mathbf{R}_{\max}$ осуществляется при помощи деквантования Маслова и отображения $x \mapsto |x|$. Допуская вольность речи, *такой переход в дальнейшем мы также будем называть деквантованием Маслова.*

Связь с физикой и роль мнимых значений постоянной Планка обсуждается ниже, в разделе 6, а также в работах [110, 111]. Идемпотентное полукольцо $\mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ с операциями $\oplus = \max$, $\odot = \min$ может быть получено в результате "вторичного деквантования" полей $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ или полуполя $\mathbf{R}_+$. Десятки интересных примеров неизоморфных идемпотентных полуколец, а также стандартные методы получения новых полуколец из исходных рассматриваются в работах [26, 64, 66–70, 104, 110]. Так называемое *идемпотентное деквантование* является обобщением деквантования Маслова; это переход от полей к идемпотентным полуполям и полукольцам в математических конструкциях и результатах.

Деквантование Маслова связано с хорошо известным логарифмическим преобразованием, использованным, например, в классических работах Э. Шредингера [153] и Э. Хопфа [71]. Используется также термин "преобразование Коула-Хопфа". Идеи Э. Хопфа получили дальнейшее развитие в известном методе исчезающей вязкости и методе вязкостных решений, см., например, работы [10, 19, 54, 122, 125, 149, 167].

3. Терминология: тропические полукольца и тропическая математика

Термин "тропические полукольца" появился в информатике и теории алгоритмов для обозначения дискретной версии алгебры $\mathbf{R}_{\max}$ или $\mathbf{R}_{\min}$ и их подалгебр; дискретные полукольца этого типа были названы "тропическими" Домиником Перрэном в честь бразильского специалиста по информатике и математике Имре Саймона, в знак признания его пионерской деятельности в данной области, см. [140].

В дальнейшем ситуация и терминология изменились. Для большинства современных авторов "тропический" означает "над полуполями $\mathbf{R}_{\max}$ или $\mathbf{R}_{\min}$", а тропические полукольца – это идемпотентные полуполя $\mathbf{R}_{\max}$ и $\mathbf{R}_{\min}$. В этом же смысле часто используются термины "макс-плюс" и "мин-плюс". В настоящее время термин "тропическая математика" обычно означает "математика над полуполями $\mathbf{R}_{\max}$ или $\mathbf{R}_{\min}$", см., например, [7, 11, 12, 14, 39, 41, 55, 56, 59, 60, 72–78, 85, 86, 126–129, 131, 132, 134, 135, 146, 155, 156, 161–165, 169–171]. Термины "тропикализация" и "тропификация" (например, в [87]) в точности означают деквантование и квантование в описанном выше смысле. В любом случае, тропическая математика является естественной и очень важной частью идемпотентной математики. Многие известные конструкции и результаты идемпотентной математики были повторены в рамках тропической математики (и, особенно, в тропической линейной алгебре).

Заметим, что в статьях [174–176] Н. Н. Воробьев развил некоторую версию идемпотентной линейной алгебры (с важными приложениями, в том числе для математической экономики), и предвидел многие аспекты будущей расширенной теории. Для обозначения идемпотентных полуколец и идемпотентной математики он использовал термины “экстремальные алгебры” и “экстремальная математика”. К сожалению, идеи Н. Н. Воробьева в свое время не получили широкой известности, поэтому его терминология не прижилась и сейчас почти не используется.

4. Идемпотентная алгебра и линейная алгебра

Автором первой известной работы по идемпотентной линейной алгебре является Ц. Клини. В его работе [88] рассматриваются системы линейных алгебраических уравнений над несколько экзотическим идемпотентным полукольцом всех формальных языков с фиксированным конечным алфавитом. Однако идеи Ц. Клини оказались весьма общими и универсальными. После этого десятки авторов изучали матрицы с коэффициентами, принадлежащими идемпотентным полукольцам, а также соответствующие приложения к дискретной математике, информатике, языкам программирования, лингвистическим задачам, конечным автоматам, проблемам оптимизации на графах, теории оптимального управления, дискретным системам событий и сетям Петри, стохастическим системам, оценке производительности компьютеров, вычислительным проблемам и т.д. Эти направления хорошо известны и широко представлены в литературе, см., например, [9, 17, 18, 21, 25, 28–30, 44, 62, 64–70, 84, 93, 96, 102, 104–107, 114, 115, 122, 174–177, 187].

Идемпотентная абстрактная алгебра пока не так хорошо развита, хотя с другой стороны, с формальной точки зрения теория решеток, теория упорядоченных групп и полугрупп входят в состав идемпотентной алгебры. Тем не менее, имеется много интересных результатов и приложений, см., например, [29–31, 81, 147, 148, 154].

В частности, идемпотентная версия основной теоремы алгебры сформулирована в [31, 154] для радикабельных идемпотентных полуколец (полукольцо A называется *радикабельным*, если уравнение $x^n = a$ имеет решение $x \in A$ для любого $a \in A$ и любого положительного целого n). Доказано, что $\mathbf{R}_{\max}$ и другие радикабельные полуполя алгебраически замкнуты в естественном смысле [154].

В последние годы особое внимание привлекают к себе вопросы тропической алгебраической геометрии, которые будут рассмотрены ниже, в разделе 11.

5. Идемпотентный анализ

Идемпотентный анализ первоначально был построен В. П. Масловым и его сотрудниками, а затем развит в большом количестве публикаций различных авторов. Этому предмету посвящена книга В. Н. Колокольцова и В. П. Маслова [96] (русская версия [122] опубликована в 1994 году).

Пусть S – произвольное полукольцо с идемпотентным сложением $\oplus$ (которое всегда предполагается коммутативным), умножением $\odot$, нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$. Множество S снабжено *стандартным частичным порядком* $\preceq$: по определению, $a \preceq b$ тогда и только тогда, когда $a \oplus b = b$. Таким образом, все элементы множества S неотрицательны: $\mathbf{0} \preceq a$ для всех $a \in S$. Благодаря существованию этого порядка, идемпотентный анализ тесно связан с теорией решеток, теорией векторных решеток и теорией упорядоченных пространств. Более того, этот частичный порядок позволяет моделировать основные топологические понятия и результаты на чисто алгебраическом уровне; систематическое изложение такого подхода можно найти в работах [108–112] и [26].

Анализ главным образом имеет дело с функциями, чьими значениями являются числа. Идемпотентным аналогом числовой функции является отображение $X \to S$, где X – произвольное множество, а S – идемпотентное полукольцо. Функции со значениями в S можно скадывать, умножать друг на друга, а также умножать на элементы S поточечно.

Идемпотентным аналогом линейного функционального пространства является множество функций со значениями в S, замкнутое относительно сложения функций и умножения функций на элементы из S, или S-полумодуль. Рассмотрим, например, S-полумодуль $B(X, S)$ всех функций $X \to S$, которые ограничены в смысле стандартного порядка в S.

Пусть $S = \mathbf{R}_{\max}$, тогда идемпотентный аналог интеграла определяется формулой

$$I(\varphi) = \int_X^{\oplus} \varphi(x)\, dx = \sup_{x \in X} \varphi(x), \tag{1}$$

где $\varphi \in B(X, S)$. Действительно, риманова сумма вида $\sum\limits_i \varphi(x_i) \cdot \sigma_i$ соответствует выражению $\bigoplus\limits_i \varphi(x_i) \odot \sigma_i = \max\limits_i \{\varphi(x_i) + \sigma_i\}$, которое сходится к правой части (1) при $\sigma_i \to 0$. Разумеется, это чисто эвристическое рассуждение.

Формула (1) определяет *идемпотентный интеграл* (или *интеграл Маслова*) не только для функций, принимающих значения в $\mathbf{R}_{\max}$, но также и в общем случае, при условии, что любое ограниченное сверху подмножество S имеет точную верхнюю грань.

Идемпотентная мера (или *мера Маслова*) на X определяется как $m_\psi(Y) = \sup\limits_{x\in Y} \psi(x)$, где $\psi \in B(X,S)$, $Y \subseteq X$. Интеграл по этой мере имеет вид

$$I_\psi(\varphi) = \int\limits_X^{\oplus} \varphi(x)\, dm_\psi = \int\limits_X^{\oplus} \varphi(x) \odot \psi(x)\, dx = \sup_{x\in X} (\varphi(x) \odot \psi(x)). \tag{2}$$

Очевидно, что если $S = \mathbf{R}_{\min}$, то стандартный порядок $\preceq$ является противоположным по отношению к обычному порядку $\leqslant$, поэтому выражение (2) примет вид

$$\int\limits_X^{\oplus} \varphi(x)\, dm_\psi = \int\limits_X^{\oplus} \varphi(x) \odot \psi(x)\, dx = \inf_{x\in X} (\varphi(x) \odot \psi(x)),$$

где inf понимается в смысле обычного порядка $\leqslant$.

Отметим, что так называемый псевдо-анализ (см., например, обзор [138]) связан со специальной частью идемпотентного анализа; тем не менее, вообще говоря, этот псевдо-анализ выходит за рамки идемпотентной математики. Некоторые обобщения мер Маслова обсуждаются в работах [89, 137].

6. Принцип суперпозиции и линейные задачи

Основные уравнения квантовой теории линейны. Это утверждение составляет принцип суперпозиции в квантовой механике. Уравнение Гамильтона–Якоби, которое является основным уравнением классической механики, не является линейным в обычном смысле. Тем не менее, оно линейно над полукольцами $\mathbf{R}_{\max}$ и $\mathbf{R}_{\min}$. Похожим образом различные версии уравнения Беллмана, основного уравнения теории оптимизации, линейны над подходящими полукольцами. В этом состоит идемпотентный принцип суперпозиции В. П. Маслова (см. [119–123]). Например, конечномерное стационарное уравнение Беллмана может быть записано в виде $X = H \odot X \oplus F$, где X, H, F – матрицы с коэффициентами в идемпотентном полукольце S, а неизвестная матрица X определяется через H и F [29]. В частности, стандартные проблемы динамического программирования и задача поиска кратчайшего пути отвечают случаям $S = \mathbf{R}_{\max}$ и $S = \mathbf{R}_{\min}$ соответственно. В работе [20] оптимизационные алгоритмы на конечном графе поставлены в соответствие стандартным методам решения систем линейных уравнений этого типа (над полукольцами). В частности, алгоритму Беллмана поиска кратчайшего пути соответствует алгоритм Якоби, алгоритму Форда отвечает итерационный метод Гаусса–Зейделя и т.д.

Линейность над $\mathbf{R}_{\min}$ и $\mathbf{R}_{\max}$ уравнения Гамильтона–Якоби (которое является результатом деквантования Маслова уравнения Шредингера) тесно связана с обычной линейностью уравнения Шредингера и может быть выведена из этой линейности. Таким образом, можно заимствовать стандартные идеи и методы из линейного анализа и применять их в новой области.

Рассмотрим классическую динамическую систему, описываемую гамильтонианом

$$H = H(p, x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} + V(x),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_N)$ – обобщенные координаты, $p = (p_1, \ldots, p_N)$ – обобщенные импульсы, m_i – массы, а $V(x)$ – потенциал. В этом случае лагранжиан системы $L(x, \dot{x}, t)$ запишется в виде

$$L(x, \dot{x}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\dot{x}_i^2}{2} - V(x),$$

где $\dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N)$, $\dot{x}_i = dx_i/dt$. При этом функция значения функционала действия $S(x, t)$ имеет вид

$$S = \int_{t_0}^{t} L(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt,$$

где интегрирование ведется вдоль реальной траектории системы. Классические уравнения движения выводятся из условия минимума функционала действия (принцип Гамильтона или принцип наименьшего действия).

Для фиксированных моментов времени t и t_0 и произвольной траектории $x(t)$ функционал действия $S = S(x(t))$ может быть рассмотрен как функция, переводящая множество кривых (траекторий) во множество вещественных чисел, которое, в свою очередь, может быть интерпретировано как $\mathbf{R}_{\min}$. В этом случае минимум функционала действия выражается интегралом Маслова по множеству траекторий, т.е. как идемпотентный аналог эвклидовой версии фейнмановского континуального интеграла.

Минимум функционала действия соответствует максимуму функции e^{-S}, т.е. идемпотентному интегралу $\int\limits_{\{\text{paths}\}}^{\oplus} e^{-S(x(t))} D\{x(t)\}$ по отношению к алгебре $\mathbf{R}_{\max}$. Таким образом, классический принцип наименьшего действия может рассматриваться как идемпотентная версия фейнмановской формулировки квантовой механики. Представление решения уравнения Шредингера в виде континуального интеграла Фейнмана соответствует формуле Лакса–Олейник для уравнения Гамильтона–Якоби.

Поскольку $\partial S/\partial x_i = p_i$, $\partial S/\partial t = -H(p,x)$, справедливо следующие уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}, x_i\right) = 0. \tag{3}$$

Квантование (см., например, [48]) приводит к уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \widehat{H}\psi = H(\widehat{p}_i, \widehat{x}_i)\psi, \tag{4}$$

где $\psi = \psi(x,t)$ – волновая функция, т.е. зависящий от времени элемент гильбертового пространства $L^2(\mathbf{R}^N)$, а $\widehat{H}$ – оператор энергии, полученный из классической функции Гамильтона заменой переменных p_i операторами импульсов $\widehat{p}_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}$, и переменных x_i – операторами координат: $\widehat{x}_i\colon \psi \mapsto x_i\psi$. Уравнение Шредингера линейно в обычном смысле (квантовый принцип суперпозиции).

В стандартной процедуре предельного перехода от уравнения Шредингера к уравнению Гамильтона–Якоби используется представление для волновой функции в виде $\psi(x,t) = a(x,t)\cdot e^{iS(x,t)/\hbar}$ и выделение главного члена при $\hbar \to 0$ (квазиклассический предел).

Вместо этого мы заменим постоянную Планка $\hbar$ мнимой величиной $h = i\hbar$, выбирая $h > 0$. Тогда уравнение Шредингера (4) перейдет в обобщенное уравнение теплопроводности:

$$h\frac{\partial u}{\partial t} = H\left(-h\frac{\partial}{\partial x_i}, \widehat{x}_i\right) u, \tag{5}$$

в котором вещественнозначная функция u соответствует волновой функции ψ (точнее, ее модулю). Похожая идея (переход к мнимому времени) используется в эвклидовой квантовой теории поля (см., например, [130]). Напомним, что время и энергия – дуальные величины.

Линейность уравнения (4) ведет к линейности уравнения (5). Поэтому если u_1 и u_2 – решения уравнения (5), то их линейная комбинация

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \tag{6}$$

также является решением уравнения (5). Положим $S = h\ln u$, или $u = e^{S/h}$, как это было сделано выше в разделе 2. Несложно проверить, что после такой замены уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} = V(x) + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m_i}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + h\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2m_i}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2}. \tag{7}$$

Таким образом, мы перешли от (4) к (7) при помощи замены переменных $\psi = e^{S/h}$. При этом $|\psi| = e^{\mathrm{Re}S/h}$, где $\mathrm{Re}S$ – вещественная часть S. Будем рассматривать теперь S как вещественную переменную. Уравнение (7) нелинейно в обычном смысле. Однако если S_1 и S_2 – его решения, то функция

$$S = \lambda_1 \odot S_1 \oplus_h \lambda_2 \odot S_2,$$

полученная из (6) заменой $S = h\ln u$, также является решением уравнения (7). В этом случае обобщенное умножение $\odot$ совпадает с обычным сложением, а обобщенное сложение $\oplus_h$ определяется выбранной заменой переменных. При $h \to 0$ мы получим операции идемпотентного полукольца $\mathbf{R}_{\max}$, то есть $\oplus = \max$ и $\odot = +$, а уравнение (7) перейдет в уравнение Гамильтона–Якоби (3), так как третье слагаемое в правой части уравнения (7) исчезает.

Естественно рассматривать предельную функцию $S = \lambda_1 \odot S_1 \oplus \lambda_2 \odot S_2$ как решение уравнения Гамильтона–Якоби и ожидать, что это уравнение можно рассматривать как линейное над $\mathbf{R}_{\max}$. Подобная аргументация (на эвристическом уровне) может быть применена и к уравнениям более общего вида. Строгое обоснование линейности этих уравнений над полукольцами приводится в [52, 96, 122, 123], а также в [120]. Отметим, что если h заменить на $-h$, то в результате мы получим линейность уравнения Гамильтона–Якоби над полукольцом $\mathbf{R}_{\min}$.

Идемпотентный принцип суперпозиции показывает, что ряд важных нелинейных (в обычном смысле) задач может быть сведен к задачам, линейным над идемпотентными полукольцами. Таким образом, линейный идемпотентный функциональный анализ (см. ниже) является естественным инструментом для исследования нелинейных бесконечномерных задач, обладающих этим свойством.

7. Свертка и преобразование Фурье–Лежандра

Пусть G – некоторая группа. Тогда пространство $B(X, \mathbf{R}_{\max})$ всех ограниченных функций $G \to \mathbf{R}_{\max}$ (см. выше) является идемпотентным полукольцом относительно следущего аналога обычной операции свертки $\circledast$:

$$(\varphi(x) \circledast \psi)(g) = \int_G^{\oplus} \varphi(x) \odot \psi(x^{-1} \cdot g)\, dx = \sup_{x \in G}(\varphi(x) + \psi(x^{-1} \cdot g)).$$

Разумеется, можно также использовать и другие функциональные пространства (и другие базовые полукольца вместо $\mathbf{R}_{\max}$). В работах [96, 122] групповые полукольца этого типа называются *сверточными полукольцами*.

Пусть $G = \mathbf{R}^n$, где $\mathbf{R}^n$ понимается как топологическая группа относительно векторного сложения. Обычное преобразование Фурье–Лапласа определяется формулой

$$\varphi(x) \mapsto \tilde{\varphi}(\xi) = \int_G e^{i\xi \cdot x} \varphi(x)\, dx, \tag{8}$$

где $e^{i\xi \cdot x}$ является характером группы G и решением функционального уравнения

$$f(x + y) = f(x) f(y).$$

Идемпотентный аналог этого уравнения имеет вид

$$f(x+y) = f(x) \odot f(y) = f(x) + f(y),$$

поэтому "непрерывные идемпотентные характеры" являются линейными функциями вида $x \mapsto \xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$. В результате преобразование (8) переходит в преобразование

$$\varphi(x) \mapsto \tilde{\varphi}(\xi) = \int_G^{\oplus} \xi \cdot x \odot \varphi(x)\, dx = \sup_{x \in G}(\xi \cdot x + \varphi(x)). \qquad (9)$$

Преобразование (9) есть не что иное, как *преобразование Лежандра* (с точностью до обозначений) [121]. Преобразования этого вида устанавливают связь между гамильтоновым и лагранжевым формализмом в классической механике. Преобразование Лежандра порождает идемпотентную версию гармонического анализа в пространстве выпуклых функций (подробнее см., например, [118]).

Разумеется, описанную конструкцию можно обобщить на различные классы групп и полуколец. Преобразования указанного типа переводят обобщенную операцию свертки в поточечное произведение (обобщенное), сохраняя при этом ряд важных свойств обычного преобразования Фурье. Для случая полукольца множеств Парето соответствующая версия преобразования Фурье сводит задачу многокритериальной оптимизации к семейству однокритериальных задач [152].

Примеры, обсуждаемые в данном разделе, могут рассматриваться как фрагменты идемпотентной теории представлений, см., например, [111]. В частности, "идемпотентные" представления групп можно трактовать как представления соответствующих сверточных полуколец (т.е. идемпотентных групповых полуколец) в идемпотентных полумодулях.

8. Приложения к стохастике и двойственность между теорией вероятностей и теорией оптимизации

Идемпотентные меры Маслова являются неотрицательными (в смысле стандартного порядка), как и вероятностные меры. Аналогия между идемпотентными и вероятностными мерами определяет важную взаимосвязь между теорией оптимизации и теорией вероятностей. К настоящему времени исследован целый ряд идемпотентных аналогов вероятностных конструкций, например, макс-плюс мартингалы, макс-плюс стохастические дифференциальные уравнения и др. Например, полученные результаты позволяют перенести мощные стохастические методы в теорию оптимизации. Это было отмечено и исследовано многими авторами (Г. Салю, П. Дел Морал, М. Акиан, Ж.-П. Квадра, В. П. Маслов, В. Н. Колокольцов, П. Бернар, У. А. Флеминг, У. М. Макэнэни, А. А. Пухальский и др.), см. обзорную статью У. А. Флеминга и У. М. Макэнэни [53] и [1, 6, 13, 28, 35–38, 50–52, 69, 122, 141, 143, 144]. По поводу связей и приложений к теории больших уклонений см. [1, 35–38, 142], и особенно книгу А. А. Пухальского [141].

9. Идемпотентный функциональный анализ

Для многих конструкций и результатов традиционной математики можно указать интересные идемпотентные аналоги. В частности, это относится к основным конструкциям и теоремам функционального анализа. Идемпотентный функциональный анализ является абстрактной версией идемпотентного анализа. Для простоты изложения положим $S = \mathbf{R}_{\max}$, и пусть X – произвольное множество. Идемпотентное интегрирование задается формулой (1), написанной выше. Функционал $I(\varphi)$ линеен над S, и его значения соответствуют предельным значениям соответствующих аналогов сумм Лебега (или Римана). Идемпотентное скалярное произведение двух функций φ и ψ определяется формулой

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_X^{\oplus} \varphi(x) \odot \psi(x)\, dx = \sup_{x \in X} (\varphi(x) \odot \psi(x)).$$

Поэтому естественно построить идемпотентные аналоги интегральных операторов в виде

$$\varphi(y) \mapsto (K\varphi)(x) = \int\limits_Y^{\oplus} K(x,y) \odot \varphi(y)\, dy = \sup_{y \in Y} \{K(x,y) + \varphi(y)\}, \quad (10)$$

где $\varphi(y)$ – элемент пространства функций, определенных на множестве Y, а $K(x,y)$ – функция, заданная на $X \times Y$, и принимающая значения в S. Как известно, выражения подобного типа стандартны для теории оптимизации.

Напомним, что описанные выше определения и конструкции могут быть успешно обобщены на случай идемпотентных полуколец, которые условно полны в смысле стандартного порядка. Используя интеграл Маслова, можно сконструировать различные функциональные пространства, а также идемпотентную версию теории обобщенных функций (распределений). Для некоторых конкретных идемпотентных функциональных пространств доказано, что каждый "хороший" линейный (в идемпотентном смысле) оператор может быть представлен в виде (10). Это утверждение является идемпотентной версией теоремы Л. Шварца о ядре; результаты такого рода были получены В. Н. Колокольцовым, П. С. Дудниковым и С. Н. Самборским, И. Зингером, М. А. Шубиным и другими авторами, см., например, [44, 96, 122, 123, 158]. Таким образом, каждый "хороший" линейный функционал представим в виде $\varphi \mapsto \langle\varphi,\psi\rangle$, где $\langle,\rangle$ – идемпотентное скалярное произведение.

В рамках идемпотентного функционального анализа результаты этого типа могут быть доказаны в очень общей ситуации. В работах [108–112] развита алгебраическая версия идемпотентного функционального анализа. Это означает, что основные топологические понятия и результаты моделируются в чисто алгебраических терминах. Построенная теория охватывает предмет, начиная с основных понятий и результатов (например, идемпотентных аналогов знаменитых теорем Хана–Банаха, Банаха–Штейнгауза, Рисса и Рисса–Фишера) и включая идемпотентные аналоги определений и результатов А. Гротендика (A. Grothendieck) по топологическим тензорным произведениям, ядерным пространствам и операторам. Сформулирована абстрактная версия теоремы о ядре. Отметим, что переход от обычной теории к идемпотентному функциональному анализу может быть весьма нетривиальным. Так, например, существует много неизоморфных идемпотентных гильбертовых пространств. Важные результаты идемпотентного функционального анализа (теоремы о двойственности и отделимости) недавно опубликовали Г. Коэн, С. Гобер и Ж.-П. Квадра [26]; конечномерная версия теоремы об отделимости опубликована в [183]. Последнее время идемпотентный функциональный анализ привлекает повышенное внимание, см., например, [2–5, 27, 68, 105, 113, 149, 158, 159, 178] и работы, цитированные выше.

10. Преобразование деквантования и обобщение многогранников Ньютона

В этом разделе мы кратко обсудим результаты, опубликованные в работе [113]. Для функций, определенных на $\mathbf{C}^n$ почти всюду, можно построить преобразование деквантования $f \to \widehat{f}$, порожденное деквантованием Маслова. Для полиномиальной функции f субдифференциал $\partial\widehat{f}$ функции $\widehat{f}$ совпадает с многогранником Ньютона полинома f. Для полукольца полиномов с неотрицательными коэффициентами преобразование деквантования является гомоморфизмом этого полукольца в идемпотентное полукольцо выпуклых многогранников относительно хорошо известных операций Минковского. Эти результаты могут быть обобщены на широкий класс функций и выпуклых множеств.

10.1. Преобразование деквантования. Рассмотрим топологическое пространство X. Для функций $f(x)$, определенных на X, будем говорить, что некоторое свойство выполняется *почти всюду* (п.в.), если оно справедливо для всех элементов x из открытого всюду плотного подмножества в X. Выберем в качестве X множество $\mathbf{C}^n$ или $\mathbf{R}^n$; обозначим через $\mathbf{R}^n_+$ множество $x = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X \mid x_i \geq 0,\ \text{где } i = 1, 2, \ldots, n\}$. Для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ положим $\exp(x) = (\exp(x_1), \ldots, \exp(x_n))$; таким образом, если $x \in \mathbf{R}^n$, то $\exp(x) \in \mathbf{R}^n_+$.

Обозначим через $\mathcal{F}(\mathbf{C}^n)$ множество всех функций, непрерывных на открытом всюду плотном подмножестве $U \subset \mathbf{C}^n$, причем $U \supset \mathbf{R}^n_+$. Во всех ниже приведенных примерах мы рассмотрим даже более регулярные функции, которые голоморфны в U. Очевидно, что $\mathcal{F}(\mathbf{C}^n)$ – кольцо (и алгебра над $\mathbf{C}$) по отношению к обычному сложению и умножению функций.

Для $f \in \mathcal{F}(\mathbf{C}^n)$ определим функцию $\widehat{f}_h$ по следующей формуле:

$$\widehat{f}_h(x) = h \log |f(\exp(x/h))|, \tag{11}$$

где h (малый) вещественный параметр, а $x \in \mathbf{R}^n$. Положим

$$\widehat{f}(x) = \lim_{h \to 0} \widehat{f}_h(x), \tag{12}$$

если предел в правой части равенства (12) существует почти всюду. Назовем функцию $\widehat{f}(x)$ *деквантованием* функции $f(x)$, а преобразование $f(x) \mapsto \widehat{f}(x)$ – *преобразованием деквантования*.

По построению, $\widehat{f}_h(x)$ и $\widehat{f}(x)$ могут быть рассмотрены как функции, принимающие значения в $\mathbf{R}_{\max}$. Отметим, что на самом деле $\widehat{f}_h(x)$ и $\widehat{f}(x)$ зависят только от сужения функции f на подмножество $\mathbf{R}^n_+$; поэтому фактически преобразование деквантования задается для функций, определенных только на $\mathbf{R}^n_+$. Понятно, что преобразование деквантования порождено деквантованием Маслова и отображением $x \mapsto |x|$. Разумеется, аналогичные определения могут быть даны и для функций, заданных на $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^n_+$.

Обозначим через V множество $\mathbf{R}^n$, рассматриваемое как линейное эвклидово пространство (со скалярным произведением $(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$) и положим $V_+ = \mathbf{R}^n_+$. Назовем функцию $f \in \mathcal{F}(\mathbf{C}^n)$ *деквантуемой*, если ее деквантование $\widehat{f}(x)$ существует (и определено на открытом всюду плотном подмножестве в V). Обозначим через $\mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$ множество всех деквантуемых функций и пусть $\widehat{\mathcal{D}}(V)$ означает множество $\{\,\widehat{f} \mid f \in \mathcal{D}(\mathbf{C}^n)\,\}$. Напомним, что функции из $\mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$ (и $\widehat{\mathcal{D}}(V)$) определены почти всюду и равенство $f = g$ означает, что $f(x) = g(x)$ для любого x из открытого всюду плотного подмножества в $\mathbf{C}^n$ (соответственно в V). Обозначим через $\mathcal{D}_+(\mathbf{C}^n)$ множество всех функций $f \in \mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$ таких, что $f(x_1,\dots,x_n) \geq 0$, если $x_i \geq 0$ для $i = 1,\dots,n$; тогда $f \in \mathcal{D}_+(\mathbf{C}^n)$, если сужение f на $V_+ = \mathbf{R}^n_+$ является неотрицательной функцией. Обозначим полученный в результате деквантования образ множества $\mathcal{D}_+(\mathbf{C}^n)$ через $\widehat{\mathcal{D}}_+(V)$. Говорят, что функции $f, g \in \mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$ находятся в *общем положении*, если $\widehat{f}(x) \neq \widehat{g}(x)$ для элементов x, пробегающих открытое всюду плотное множество в V.

Для функций f, $g \in \mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$ и ненулевой константы c верны следующие равенства:

1) $\widehat{fg} = \widehat{f} + \widehat{g}$;
2) $|\widehat{f}| = \widehat{f}$; $\widehat{cf} = f$; $\widehat{c} = 0$;
3) $(\widehat{f+g})(x) = \max\{\widehat{f}(x), \widehat{g}(x)\}$ п.в., если f и g неотрицательны на V_+ (то есть $f, g \in \mathcal{D}_+(\mathbf{C}^n)$) или f и g – функции общего положения.

Левые части этих уравнений определены автоматически.

Множество $\mathcal{D}_+(\mathbf{C}^n)$ имеет естественную структуру полукольца относительно обычного сложения и умножения функций, принимающих значение в $\mathbf{C}$. Множество $\widehat{\mathcal{D}}_+(V)$ имеет естественную структуру идемпотентного полукольца относительно операций $(f \oplus g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $(f \odot g)(x) = f(x) + g(x)$; элементы из $\widehat{\mathcal{D}}_+(V)$ можно рассматривать как функции, принимающие значения в $\mathbf{R}_{\max}$. Преобразование деквантования порождает гомоморфизм из $\mathcal{D}_+(\mathbf{C}^n)$ в $\widehat{\mathcal{D}}_+(V)$.

10.2. Простые функции. Для любого ненулевого числа $a \in \mathbf{C}$ и любого вектора $d = (d_1, \dots, d_n) \in V = \mathbf{R}^n$ положим $m_{a,d}(x) = a\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$; функции такого вида будем называть *обобщенными мономами*. Обобщенные мономы определены п.в. на $\mathbf{C}^n$ и на V_+, но не на V, исключая случай, когда d_i являются целыми или подходящими рациональными числами. Назовем функцию f *обобщенным полиномом*, если она представляет собой конечную сумму линейно независимых обобщенных мономов. Например, полиномы Лорана являются обобщенными полиномами.

Как обычно, для $x, y \in V$ положим $(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. Легко показать, что если f – обобщенный моном $m_{a,d}(x)$, то $\widehat{f}$ – линейная функция $x \mapsto (d, x)$. Если f – обобщенный полином, то $\widehat{f}$ – сублинейная функция.

Напомним, что вещественная функция p, определенная на $V = \mathbf{R}^n$, *сублинейна*, если $p = \sup_\alpha p_\alpha$, где $\{p_\alpha\}$ – семейство линейных функций. Сублинейные функции, определенные всюду на $V = \mathbf{R}^n$, выпуклы; следовательно, они непрерывны. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие сублинейные функции. Пусть p – непрерывная функция на V, тогда p сублинейна в точности тогда, когда

1) $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ для всех $x, y \in V$;

2) $p(cx) = cp(x)$ для всех $x \in V$, $c \in \mathbf{R}_+$.

Если p_1, p_2 – сублинейные функции, то $p_1 + p_2$ также является сублинейной функцией.

Назовем функцию $f \in \mathcal{F}(\mathbf{C}^n)$ *простой*, если ее деквантование $\widehat{f}$ существует и п.в. совпадает с некоторой сублинейной функцией. Допуская вольность речи, будем обозначать эту (однозначно определенную всюду на V) сублинейную функцию тем же символом $\widehat{f}$.

Напомним, что простые функции f и g являются функциями *в общем положении*, если $\widehat{f}(x) \ne \widehat{g}(x)$ для всех x из открытого всюду плотного множества в V. В частности, обобщенные мономы находятся в общем положении тогда и только тогда, когда они линейно независимы.

Обозначим через $\mathrm{Sim}(\mathbf{C}^n)$ множество всех простых функций, определенных на V, и обозначим через $\mathrm{Sim}_+(\mathbf{C}^n)$ множество $\mathrm{Sim}(\mathbf{C}^n) \cap \mathcal{D}_+(\mathbf{C}^n)$. Через $\mathrm{Sbl}(V)$ обозначим множество всех (непрерывных) сублинейных функций, определенных на $V = \mathbf{R}^n$, а через $\mathrm{Sbl}_+(V)$ обозначим образ $\widehat{\mathrm{Sim}_+}(\mathbf{C}^n)$ множества $\mathrm{Sim}_+(\mathbf{C}^n)$ при преобразовании деквантования.

Множество $\mathrm{Sim}_+(\mathbf{C}^n)$ является подполукольцом в $\mathcal{D}_+(\mathbf{C}^n)$, и $\mathrm{Sbl}_+(V)$ является идемпотентным подполукольцом в $\widehat{\mathcal{D}_+}(V)$. Преобразование деквантования порождает эпиморфизм полукольца $\mathrm{Sim}_+(\mathbf{C}^n)$ на $\mathrm{Sbl}_+(V)$. Множество $\mathrm{Sbl}(V)$ является идемпотентным полукольцом относительно операций $(f \oplus g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $(f \odot g)(x) = f(x) + g(x)$.

Конечно, полиномы и обобщенные полиномы являются простыми функциями.

Будем говорить, что функции $f, g \in \mathcal{D}(V)$ *асимптотически эквивалентны*, если $\widehat{f} = \widehat{g}$; простую функцию f назовем *асимптотическим мономом*, если $\widehat{f}$ – линейная функция. Простая функция f будет называться *асимптотическим полиномом*, если $\widehat{f}$ является суммой конечного числа неэквивалентных асимптотических мономов. Каждый асимптотический полином является простой функцией.

Пример. Примерами асимптотических полиномов служат обобщенные полиномы, логарифмические функции от (обобщенных) полиномов, произведения полиномов и логарифмических функций. Это следует из наших определений и формулы (11).

10.3. Субдифференциалы сублинейных функций и множества Ньютона для простых функций. Хорошо известно, что совокупность всех выпуклых компактных подмножеств в $\mathbf{R}^n$ образует идемпотентное полукольцо $\mathcal{S}$ относительно операций Минковского: для $A, B \in \mathcal{S}$ сумма $A \oplus B$ является выпуклой оболочкой объединения $A \cup B$; произведение $A \odot B$ определяется следующим образом: $A \odot B = \{\, x \mid x = a + b$, где $a \in A, b \in B\}$. На самом деле множество $\mathcal{S}$ является идемпотентным линейным пространством над $\mathbf{R}_{\max}$ (см., например, работу [110]). Разумеется, многогранники Ньютона в пространстве V образуют подполукольцо $\mathcal{N}$ в $\mathcal{S}$.

Воспользуемся некоторыми элементарными результатами из выпуклого анализа. Эти результаты можно найти, например, в книге [118].

Для любой функции $p \in \mathrm{Sbl}(V)$ положим

$$\partial p = \{\, v \in V \mid (v, x) \leqslant p(x) \ \forall x \in V \,\}.$$

Из выпуклого анализа хорошо известно, что для любой сублинейной функции p множество ∂p есть в точности *субдифференциал* от p в нулевой точке. Следующее утверждение также хорошо известно из выпуклого анализа:

Предложение 1. *Пусть $p_1, p_2 \in \mathrm{Sbl}(V)$, тогда*

$$\partial(p_1 + p_2) = \partial p_1 \odot \partial p_2 =$$

$$\{\, v \in V \mid v = v_1 + v_2, \ \textit{где}\ v_1 \in \partial p_1, v_2 \in \partial p_2 \,\};$$

$$\partial(\max\{p_1(x), p_2(x)\}) = \partial p_1 \oplus \partial p_2.$$

Пусть $p \in \mathrm{Sbl}(V)$. Тогда ∂p – непустое выпуклое компактное подмножество в V.

Следствие 2. *Отображение $p \mapsto \partial p$ является гомоморфизмом идемпотентного полукольца $\mathrm{Sbl}(V)$ в идемпотентное полукольцо $\mathcal{S}$ всех выпуклых компактных подмножеств множества V.*

Для любой простой функции $f \in \mathrm{Sim}(\mathbf{C}^n)$ обозначим через $N(f)$ множество $\partial(\widehat{f})$. Назовем $N(f)$ *множеством Ньютона* для функции f. Из приведенного утверждения следует, что для любой простой функции f ее множество Ньютона $N(f)$ является непустым выпуклым компактным подмножеством в V.

Теорема. *Пусть f и g – простые функции. Тогда*

1) $N(fg) = N(f) \odot N(g) = \{\, v \in V \mid v = v_1 + v_2,\ \textit{где}\ v_1 \in N(f),$ $v_2 \in N(g)\}$;
2) $N(f + g) = N(f) \oplus N(g)$, *если f_1 и f_2 – функции в общем положении или $f_1, f_2 \in \mathrm{Sim}_+(\mathbf{C}^n)$ (напомним, что $N(f) \oplus N(g)$ есть выпуклая оболочка множества $N(f) \cup N(g)$).*

Следствие 2. *Преобразование $f \mapsto N(f)$ порождает гомоморфизм из $\mathrm{Sim}_+(\mathbf{C}^n)$ в $\mathcal{S}$.*

Предложение 2. *Пусть* $f = m_{a,d}(x) = a\prod_{i=1}^{n} x_i^{d_i}$ *– (обобщенный) моном; здесь* $d = (d_1, \dots, d_n) \in V = \mathbf{R}^n$ *и* a *– ненулевое комплексное число. Тогда* $N(f) = \{d\}$.

Следствие 3. *Пусть* $f = \sum_{d\in D} m_{a_d,d}$ *– (обобщенный) полином. Тогда* $N(f)$ *– многогранник* $\oplus_{d\in D}\{d\}$*, т.е. линейная оболочка конечного множества* D.

Этот вывод следует из теоремы и предложения 2. В этом случае $N(f)$ – хорошо известный классический многогранник Ньютона полинома f. Поэтому следующее следствие очевидно:

Следствие 4. *Пусть* f *– обобщенный или асимптотический полином. Тогда его множество Ньютона* $N(f)$ *является выпуклым многогранником.*

Пример. Рассмотрим одномерный случай, т.е. $V = \mathbf{R}$, и положим $f_1 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ и $f_2 = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0$, где $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Тогда $N(f_1)$ совпадает с отрезком $[0, n]$ и $N(f_2)$ – с отрезком $[0, m]$. Поэтому преобразование $f \mapsto N(f)$ соответствует преобразованию $f \mapsto \deg(f)$, где $\deg(f)$ – степень полинома f. При этом, в соответствии с теоремой, $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ и $\deg(f+g) = \max\{\deg f, \deg g\} = \max\{n, m\}$, если $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ или если f и g находятся в общем положении.

11. Деквантование геометрии

Идемпотентная версия вещественной алгебраической геометрии была открыта О. Виро и представлена в его докладе на конгрессе в Барселоне [172]. Исходя из идемпотентного принципа соответствия, О. Виро построил кусочно-линейную геометрию многогранников специального вида в конечномерных эвклидовых пространствах как результат деквантования Маслова обычной вещественной алгебраической геометрии. Он указал на важные приложения к вещественной алгебраической геометрии (например, в рамках 16-ой проблемы Гильберта о построении вещественного алгебраического многообразия с предписанными свойствами и параметрами) и на связь с комплексной алгебраической геометрией и амебами в смысле И. М. Гельфанда, М. М. Капранова и А. В. Зелевинского (см. их книгу [61] и статью О. Виро [173]). Затем комплексная алгебраическая геометрия была деквантована Г. Михалкиным с тем же результатом;

эта новая “идемпотентная” (или асимптотическая) геометрия теперь часто называется *тропической алгебраической геометрией*, см., например, [47, 72, 126–129, 146, 155, 164, 166].

Существует естественная связь между деквантованием Маслова и амебами. Пусть $(\mathbf{C}^*)^n$ – комплексный тор , где $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\backslash\{0\}$ – группа ненулевых комплексных чисел по умножению. Для $z = (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbf{C}^*)^n$ и положительного вещественного числа h обозначим через $\mathrm{Log}_h(z) = h\log(|z|)$ элемент

$$(h\log|z_1|, h\log|z_2|, \ldots, h\log|z_n|) \in \mathbf{R}^n.$$

Рассмотрим комплексное алгебраическое многообразие $V \subset (\mathbf{C}^*)^n$; обозначим через $\mathcal{A}_h(V)$ множество $\mathrm{Log}_h(V)$. Если $h = 1$, то множество $\mathcal{A}(V) = \mathcal{A}_1(V)$ называется *амебой* в V в смысле книги [61], см. также [7, 126, 128, 129, 139, 155, 161, 173]. Амеба $\mathcal{A}(V)$ является замкнутым подмножеством в $\mathbf{R}^n$ с непустым дополнением. Отметим, что приведенная конструкция зависит от выбора системы координат.

Для простоты выберем в качестве V гиперповерхность в $(\mathbf{C}^*)^n$, определяемую полиномом f; тогда существует деформация этого полинома $h \mapsto f_h$, порожденная деквантованием Маслова, и $f_h = f$ для $h = 1$. Пусть $V_h \subset (\mathbf{C}^*)^n$ является множеством нулей полинома f_h и $\mathcal{A}_h(V_h) = \mathrm{Log}_h(V_h)$. Тогда существует тропическое многообразие $\mathrm{Tro}(V)$, такое что подмножества $\mathcal{A}_h(V_h) \subset \mathbf{R}^n$ сходятся к $\mathrm{Tro}(V)$ в метрике Хаусдорфа при $h \to 0$, см. [126, 151]. Тропическое многообразие $\mathrm{Tro}(V)$ является результатом деформации амебы $\mathcal{A}(V)$ и деквантования Маслова многообразия V. Множество $\mathrm{Tro}(V)$ получило название *скелета* амебы $\mathcal{A}(V)$.

Пример [126]. Для прямой $V = \{(x, y) \in (\mathbf{C}^*)^2 \mid x + y + 1 = 0\}$ кусочно линейный граф $\mathrm{Tro}(V)$ представляет собой тропическую прямую, см. рис. 3(a). Амеба $\mathcal{A}(V)$ показана на рис. 3(b), тогда как рис. 3(c) демонстрирует соответствующую деформацию амебы.

В важной работе [80] (см. также [47, 126, 128, 146]) тропические многообразия возникают как амебы над неархимедовыми полями.

В 2000 году М. Концевич заметил, что возможно использование неархимедовых амеб в перечислительной геометрии, см. [126, раздел 2.4, замечание 4]. Методы тропической геометрии имеют важные приложения в алгебраической перечислительной

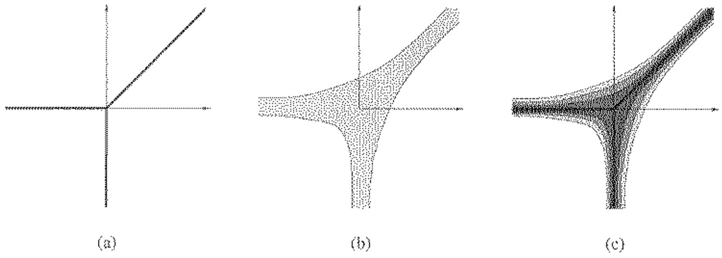

Рис. 3. Тропическая прямая и амебы.

геометрии, инвариантах Громова–Виттена и Вельшенже, см. [59, 72–75, 126–129, 155, 156]. В частности, Г. Михалкин представил и доказал в [127, 129] формулу, перечисляющую кривые произвольного рода на торической поверхности (см. также работы [60, 72, 73, 131, 155]).

В последнее время появилось много других работ по тропической алгебраической геометрии и ее приложениям к обычной (например, комплексной) алгебраической геометрии, а также к другим областям, см., например, [7, 55, 56, 76, 131, 134, 135, 168, 169, 171]. Дело в том, что некоторые трудные традиционные задачи могут быть сведены к их тропическим версиям, которые, как можно надеяться, не так трудны.

Заметим, что тропическая геометрия тесно связана с известной программой М. Концевича и Я. Сойбельмана, см., например, [98, 99].

Введение в тропическую алгебраическую геометрию изложено в работе [146] (см. также [166]). Тем не менее, в целом сделаны лишь первые шаги в тропической/идемпотентной геометрии, и задача систематического построения идемпотентных версий алгебраической и аналитической геометрии остается открытой.

12. Принцип соответствия для алгоритмов и их компьютерная реализация

В идемпотентной математике имеется большое количество важных прикладных алгоритмов, см., например, [9, 18, 21, 30, 31, 49, 52, 53, 67–69, 72, 84, 87, 93, 96, 102, 104, 106, 107, 114–116, 127, 129, 146, 150, 166, 174–176, 179, 186, 187]. Идемпотентный принцип соответствия справедлив как для алгоритмов, так и для их программной и аппаратной реализации [102–104, 106, 107]. В частности, благодаря принципу суперпозиции, особую важность приобретают алгоритмы линейной алгебры. Хорошо известно, что алгоритмы линейной алгебры удобны для параллельных вычислений; их идемпотентные аналоги также допускают распараллеливание. Поэтому имеется регулярный способ использовать параллельные вычисления для решения многих задач, включая основные задачи оптимизации. При этом удобно использовать универсальные алгоритмы, не зависящие от конкретного полукольца и от его конкретной компьютерной модели. Программная реализация полукольцевых универсальных алгоритмов строится на объектно-ориентированном и обобщенном (generic) программировании; программные модули имеют дело с абстрактными (переменными) операциями и типами данных, см. [102, 104, 106, 107, 116].

Наиболее важные и стандартные алгоритмы имеют много аппаратных реализаций в виде технических устройств или специальных процессоров. Такие устройства могут стать прототипами новых аппаратных устройств, порожденных заменой традиционных арифметических операций на их полукольцевые аналоги, см. [102, 104, 107]. Удачные и эффективные технические идеи и решения могут быть перенесены из прототипов в новые аппаратные устройства. Таким образом, принцип соответствия порождает регулярный эвристический метод для конструирования многочисленных устройств.

13. Идемпотентный интервальный анализ

Идемпотентная версия традиционного интервального анализа изложена в работах [114, 115]. Пусть S – идемпотентное полукольцо, наделенное стандартным порядком. *Замкнутым интервалом* в S назовем множество вида $\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}] = \{x \in S \mid \underline{\mathbf{x}} \preceq x \preceq \bar{\mathbf{x}}\}$, где элементы $\underline{\mathbf{x}} \preceq \bar{\mathbf{x}}$ называются *нижней* и *верхней границами* интервала $\mathbf{x}$. *Слабым интервальным расширением* $I(S)$ полукольца S назовем множество всех замкнутых интервалов S с операциями $\oplus$ и $\odot$, определенными следующим образом: $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} \oplus \underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} \oplus \bar{\mathbf{y}}]$, $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = [\underline{\mathbf{x}} \odot \underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}} \odot \bar{\mathbf{y}}]$. Множество $I(S)$ является новым идемпотентным полукольцом относительно этих операций. Доказано, что основные интервальные задачи идемпотентной линейной алгебры имеют полиномиальную сложность, тогда как в обычном интервальном анализе задачи такого типа в общем случае имеют NP-сложность. Точные интервальные решения для дискретного стационарного уравнения Беллмана (см. матричные уравнения, рассмотренные выше, в разделе 6) и для соответствующих оптимизационных задач построены Г. Л. Литвиновым и А. Н. Соболевским [114, 115]. Близкие результаты были получены в работе [22].

14. Связь с КАМ теорией и оптимальным транспортом

Предмет теории Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ) можно формулировать как изучение инвариантных подмножеств в фазовых пространствах неинтегрируемых гамильтоновых динамических систем, имеющих ту же динамику и ту же степень регулярности, что и интегрируемые системы (квазипериодическое поведение). В последнее время заметный прогресс был достигнут благодаря вариационному подходу, в котором динамика задается не гамильтонианом, а лагранжианом. Соответствующая теория была инициирована работами С. Обри (S. Aubry) и Дж. Н. Мезера (J. N. Mather) и недавно названа *слабой КАМ теорией* в работах А. Фати (A. Fathi) (готовится к выходу его монография “Weak KAM Theorems in Lagrangian Dynamics”, см., также работы [82, 83, 159, 160]). Минимизация некоторого функционала вдоль траекторий движущихся частиц является центральным пунктом другой теории, а именно, теории оптимального транспорта, которая интенсивно развивается. Эта теория восходит к работе Г. Монжа “О выемках и насыпях” (1781). Современная версия теории носит название *теория оптимального транспорта Монжа–Ампера–Канторовича (МАК)* (название возникло после работы Л. В. Канторовича [79]). Имеется сходство между этими двумя теориями и имеются взаимосвязи с задачами идемпотентного функционального анализа (например, с задачей о собственных функциях “идемпотентных” интегральных операторов, см. [159]). Приложения теории оптимального транспорта к теории обработки данных в космологии рассматриваются, например, в работах [15, 58].

15. Связь с логикой, нечеткими множествами и теорией возможностей

Пусть S – идемпотентное полукольцо с нейтральными элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ (напомним, что $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$, см. разд. 2). Тогда булева алгебра $\mathbf{B} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ является естественным подполукольцом в S. Поэтому S может рассматриваться как обобщенная (расширенная) логика с логическими операциями $\oplus$ (дизъюнкция) и $\odot$ (конъюнкция). Идеи такого рода обсуждаются во многих статьях и монографиях, посвященных обобщенным версиям классической и, особенно, квантовой логики, см., например, [42, 64, 90, 147, 148].

Пусть Ω является так называемым универсумом, состоящим из "элементарных событий". Обозначим через $\mathcal{F}(S)$ множество функций, заданных на Ω и принимающих значения в S; тогда $\mathcal{F}(S)$ представляет собой идемпотентное полукольцо относительно поточечного сложения и умножения функций. Назовем элементы из $\mathcal{F}(S)$ *обобщенными нечеткими множествами*, см. работы [64, 100]. Если $S = \mathbf{P}$, где $\mathbf{P}$ – отрезок $[0, 1]$ с операциями $\oplus = \max$ и $\odot = \min$, то мы получим классическое определение нечеткого множества (Л. А. Заде [180]). Разумеется, функции из $\mathcal{F}(\mathbf{P})$, принимающие значения в булевой алгебре $\mathbf{B} = \{0, 1\} \subset \mathbf{P}$, соответствуют обычным множествам из Ω, а полукольцевые операции отвечают стандартным операциям над множествами. В общем случае функции из $\mathcal{F}(S)$, принимающие значения в $\mathbf{B} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \subset S$, могут рассматриваться как подмножества в Ω. Если S – решетка (т.е. $x \odot y = \inf\{x, y\}$ и $x \oplus y = \sup\{x, y\}$), то обобщенные нечеткие множества совпадают с L-нечеткими множествами в смысле Дж. А. Гогена [63]. Множество интервалов $I(S)$ является идемпотентным полукольцом (см. раздел. 11), поэтому элементы из $\mathcal{F}(I(S))$ могут рассматриваться как интервальные (обобщенные) нечеткие множества.

Как хорошо известно, классическая теория нечетких множеств лежит в основе теории возможностей [43, 181]. Разумеется, исходя из обобщенной теории нечетких множеств, можно аналогичным образом развить обобщенную теорию возможностей (см., например, [43, 90, 100]. Обобщенные теории могут быть некоммутативными; они выглядят более качественными и менее количественными по сравнению с обычной теорией, представленной в работах [180, 181]. Мы видим, что идемпотентный анализ и теория (обобщенных) нечетких множеств имеют дело с одними и теми же объектами, а именно с функциями, принимающими значения в полукольцах. Тем не менее, основные задачи и методы для обеих теорий могут отличаться (как это происходит с теорией меры и теорией вероятностей).

16. Приложения к другим областям и к смежным наукам

Выше обсуждались некоторые приложения идемпотентной математики к различным теоретическим и прикладным областям математической науки и взаимосвязи идемпотентной математики с другими областями. Разумеется, очень естественной областью для приложений идей и методов идемпотентной математики являются теория оптимизации и теория оптимального управления. По этой теме имеется очень хорошая обзорная статья В. Н. Колокольцова [93]; см. также работы [9, 18, 21, 25, 28–31, 35, 37, 38, 50–53, 67–69, 102, 104, 114, 115, 117, 119–124, 144, 174–176, 179, 186, 187].

Существует много интересных приложений к дифференциальным уравнениям и к стохастическим дифференциальным уравнениям, см., например, [50–53, 69, 91, 92, 94, 96, 119–123, 138, 159, 160].

Приложения к теории игр обсуждаются, например, в [95, 96, 122]. Существуют интересные приложения в биологии (биоинформатике), см., например, [49, 135, 150]. Связь с математической морфологией и возможные приложения рассматриваются в статье П. Дел Морала и М. Дуази [38] и особенно в расширенной препринтной версии этой работы. Имеется много интересных взаимосвязей с физикой и соответствующих приложений (квантовая и классическая физика, статистическая физика, космология и т.д.) см., например, раздел 6 выше и работы [23, 92, 96, 110, 111, 117, 133, 145].

Ряд важных взаимосвязей и приложений относится и к чисто математическим областям. Так называемая тропическая комбинаторика обсуждается в большой обзорной статье А. Н. Кириллова [87], см. также [18, 187]. Интересные приложения тропических полуколец к традиционной теории представлений рассматриваются в работах [11, 12, 87]. Тропическая математика тесно связана с весьма популярной теорией кластерных алгебр, основанной С. Фоминым и А. Зелевинским, см. их обзорную работу

[57]. В обоих случаях прослеживается связь с традиционной теорией представлений групп Ли и с близкими задачами. Имеются важные связи с выпуклым анализом и с дискретным выпуклым анализом, см., например, [2, 27, 30, 32, 40, 113, 118, 123, 157, 183–185]. Некоторые результаты по сложности идемпотентных и тропических вычислений могут быть найдены в работах [86, 114, 115, 170]. Интересные приложения тропической алгебры к теории кос и к преобразованиям Янга–Бакстера (в смысле [16]) можно найти в работах [34, 45, 46].

Начиная с Н. Н. Воробьева [174–176], многие авторы используют, явно или неявно, конструкции и результаты идемпотентной математики в математической экономике, см., например, [33, 95, 123, 182, 187].

Литература

1. M. Akian, *Densities of idempotent measures and large deviations.* — Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 4515–4543.
2. M. Akian and S. Gaubert, *Spectral theorem for convex monotone homogeneous maps and ergodic control.* — Nonlinear Analysis **52** (2003), 637–679. See also `arXiv:math.SP/0110108`.
3. M. Akian, S. Gaubert, and V. Kolokoltsov, *Set coverings and invertibility of functional Galois connections.* — In [105], 19–52.
4. M. Akian, S. Gaubert, and C. Walsh, *The max-plus Martin boundary*; `arXiv:math.MG/0412408` (2004).
5. M. Akian, S. Gaubert, and C. Walsh, *Discrete max-plus spectral theory.* — In [105], 53–78.
6. M. Akian, J. P. Quadrat, and M. Viot, *Duality between probability and optimization.* — In [69], 331–353.
7. D. Alessandrini, *Amoebas, tropical varieties and compactification of Teichmüller spaces;* `arXiv:math.AG/0505269` (2005).
8. S. M. Avdoshin, V. V. Belov, V. P. Maslov, and A. M. Chebotarev. *Design of computational media: mathematical aspects.* — In: [124], 9–145.
9. F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, and J.-P. Quadrat, *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems.* — John Wiley & Sons Publishers, New York (1992).
10. M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations.* — Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin (1997).
11. A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, *Parametrizations of canonical bases and totally positive matrices.* — Adv. Math. **122** (1996), 49–149.
12. A. Berenstein and A. Zelevinsky, *Tenzor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties.* — Invent. Math. **143** (2001), 77–128.
13. P. Bernhard, *Minimax versus stochastic partial information control.* — In: Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL,

December 1994, IEEE (1994), pp. 2572–2577.
14. F. Block and J. Yu, *Tropical convexity via cellular resolutions*; **arXiv:math.MG/0503279** (2005).
15. Y. Brenier, U. Frisch, M. Hénon, G. Loeper, S. Matarrese, R. Mohayaee, and A. Sobolevskiĭ, *Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem.* — Mon. Nat. R. Astron. Soc. **346** (2003), 501–524.
16. В. М. Бухштабер, *Отображения Янга–Бакстера.* — Успехи мат. наук **53** (1998), no. 6, 241–242.
17. P. Butkovič, *Strong regularity of matrices – a survey of results.* — Discrete Applied Math. **48** (1994), 45–68.
18. P. Butkovič, *On the combinatorial aspects of max-algebra.* — In [105], 93–104.
19. I. Capuzzo Dolcetta, P.-L. Lions (Eds.), *Viscosity solutions and applications.* — Lectures given at the 2nd Session of the C.I.M.E. held in Montecatini Terme, Italy, June 12–20, 1995. Lecture Notes in Mathematics **1660**, 1997.
20. B. A. Carré, *An algebra for network routing problems.* — J. Inst. Appl. **7** (1971), 273–294.
21. B. A. Carré, *Graphs and Networks.* — The Clarendon Press/Oxford University Press, Oxford (1979).
22. K. Cechlárová and R. A. Cuninghame-Green, *Interval systems of max-separable linear equations.* — Linear Algebra and its Applications **340** (2002), 215–224.
23. Weiren Chou and R. J. Duffin, *An additive eigenvalue problem of physics related HJB equation to linear programming.* — Adv. in Applied Mathematics **8** (1987), 486–498.
24. G. Choquet, *Theory of capacities.* — Ann. Inst. Fourier **5** (1955), 131–295.
25. G. Cohen, S. Gaubert, and J. P. Quadrat, *Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now.* — Annual Reviews in Control **23** (1999), 207–219.
26. G. Cohen, S. Gaubert, and J.-P. Quadrat, *Duality and separation theorems in idempotent semimodules.* — Linear Algebra and its Applications **379** (2004), 395–422. Also see **arXiv:math.FA/0212294**.
27. G. Cohen, S. Gaubert, J.-P. Quadrat, and I. Singer, *Max-plus convex sets and functions.* — In [105], 105–130.
28. G. Cohen and J.-P. Quadrat (Eds.), *11th International Conference on Analysis and Optimization Systems.* — Springer Lect. Notes on Control and Information Systems **199** (1994).
29. R. A. Cuninghame-Green, *Minimax algebra.* — Springer Lect. Notes in Economics and Mathematical Systems **166**, Berlin (1979).
30. R. A. Cuninghame-Green, *Minimax algebra and applications.* — Advances in Imaging and Electron Physics **90** (1995), 1–121. (Academic Press, New York).
31. R. Cuninghame-Green and P. Meijer, *An algebra for piecewise-linear minimax problems*, Dicsrete Appl. Math. **2** (1980), 267–294.
32. В. И. Данилов, Г. А. Кошевой, *Дискретная выпуклость.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **312** (2004), 86–93.
33. V. Danilov, G. Koshevoi, and K. Murota, *Discrete convexity and equilibria in economics with indivisible goods and money.* — Math. Soc. Sci. **11** (2001), 251–273.

34. P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, and B. Wiest, *Why are braids orderable?* — Panoramas et Synthèses 14, SMF (2002).
35. P. Del Moral, *A survey of Maslov optimization theory.* — In: V. N. Kolokoltsov and V. P. Maslov, *Idempotent Analysis and Applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1997), 243–302 (Appendix).
36. P. Del Moral, *Feynman–Kac formulae. Genealogical and interacting particle systems with applications*, — Springer, New York (2004).
37. P. Del Moral and M. Doisy, *Maslov idempotent probability calculus, I, II.* — Theory of Probability and its Applications **43** (1998), no. 4, 735–751 and **44** (1999), no. 2, 384–400.
38. P. Del Moral and M. Doisy, *On the applications of Maslov optimization theory.* — Mathematical Notes **69** (2001), no. 2, 232–244.
39. M. Develin, *The moduli space of n tropically collinear points in* R^d; `arXiv:math.CO/0401224` (2004).
40. M. Develin and B. Sturmfels, *Tropical covexity*; `arXiv:math.MG/0308254` (2003).
41. M. Develin, F. Santos, and B. Sturmfels, *On the rank of a tropical matrix*; `arXiv:math.CO/0312114v2` (2003).
42. A. Di Nola, B. Gerla, *Algebras of Lukasiewicz's logic and their semiring reducts.* — In [105], 131–144.
43. D. Dubois, H. Prade, and R. Sabbadin, *Decision-theory foundations of qualitative possibility theory.* — European Journal of Operational Research **128** (2001), 459–478.
44. П. С. Дудников и С. Н. Самборский, *Эндоморфизмы полумодулей над полукольцами с идемпотентной операцией.* — Препринт Математического института АН УССР, Киев, 1987; Изв. АН СССР, сер. мат. **55** (1991), no. 1, 93–109.
45. И. А. Дынников, *Об отображениях Янга–Бакстера и упорядочении Деорнуа.* — Усп. мат. наук **57** (2002), no. 3, 151–152.
46. I. A. Dynnikov and B. Wiest, *On the complexity of braids*; `arXiv: math.GT/0403177` (2004).
47. M. Einsiedler, M. Kapranov, and D. Lind, *Non-archimedean amoebas and tropical varieties*; `arXiv:math.AG/0408311` (2004).
48. R. Feynman and A. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals.* — McGraw-Hill, New York (1965).
49. A. V. Finkelstein and M. A. Roytberg, *Computation of biopolymers: a general approach to different problems.* — BioSystems **30** (1993), 1–20.
50. W. H. Fleming, *Max-Plus Stochastic Control.* — In: B. Pasik-Duncan, Ed., *Stochastic Theory and Control*, Lect. Notes in Control and Information Science **280** (2002), 111–119.
51. W. H. Fleming, *Max-plus stochastic processes*, Applied Math. and Optim. **48** (2004), 159–181.
52. W. H. Fleming and W. M. McEneaney, *A max-plus-basedalgorithm for a Hamilton–Jacobi–Bellman equation of nonlinear filtering.* — SIAM J. Control Optim. **38** (2000), no. 3, 683–710.
53. W. H. Fleming and W. M. McEneaney, *Max-plus approaches to continuous space control and dynamic programming.* — In [105], 145–160.

54. W. H. Fleming and H. M. Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions.* — Springer, New York (1993).
55. V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmuller theory*; `arXiv:math.AG/0311149` (2003).
56. V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*; `arXiv:math.AG/0311245` (2003).
57. S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras: Notes for the CDM-03 Conference.* — Conf. "Current Developments in Mathematics 2003" held at Harvard University on November 21–22 (2003); `arXiv:math.RT/0311493`, v. 2 (2003).
58. U. Frisch, S. Matarrese, R. Mohayaee, and A. Sobolevskiĭ, *A reconstruction of the initial conditions of the Universe by optimal mass transportation.* — Nature, **417** (May 2002), 260–262.
59. A. Gathmann and H. Markwig, *The Caporaso-Harris formula and plane relative Gromov-Witten invariants in tropical geometry*; `arXiv:math.AG/0504392` (2005).
60. A. Gathmann and H. Markwig, *The numbers of tropical plane curves through points in general position*; `arXiv:math.AG/0406099` (2004).
61. I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants.* — Birkhäuser, Boston (1994).
62. K. Glazek, *A Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Information Sciences: with Complete Bibliography.* — Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2002).
63. J. A. Goguen, *L-fuzzy sets.* — J. of Math. Anal. Appl. **18** (1967), no. 1, 145–174.
64. J. S. Golan, *Semirings and Their Applications.* — Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
65. J. S. Golan, *Power Algebras over Semirings.* — Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
66. J. S. Golan, *Semirings and Affine Equations over Them: Theory and Applications.* — Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2003).
67. M. Gondran and M. Minoux, *Graphes et Algorithmes.* — Editions Eyrolles, Paris, (1979, 1988).
68. M. Gondran and M. Minoux, *Graphes, Dioïdes et Semi-anneaux.* — Editions TEC&DOC, Paris (2001).
69. J. Gunawardena (Ed.), *Idempotency.* — Publ. of the Newton Institute, Vol. **11**, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
70. J. Gunawardena, *An introduction to idempotency.* — In [69], 1–49.
71. E. Hopf, *The partial differential equation* $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. — Comm. Pure Appl. Math. **3** (1950), 201–230.
72. I. Itenberg, V. Kharlamov, and E. Shustin, *Welschinger invariant and enumeration of real rational curves.* — International Mathematics Research Notices **49** (2003), 26–39.
73. I. Itenberg, V. Kharlamov, E. Shustin, *Appendix to "Welschinger invariants and enumeration of real rational curves"*; `arXiv:math.AG/0312142v2` (2003).
74. И. В. Итенберг, В. М. Харламов, и Е. И. Шустин, *Логарифмическая эквивалентность инвариантов Вельшенже и Громова–Виттена.* — Усп. мат. наук **59** (2004) no. 6, 85–110.
75. I. Itenberg, V. Kharlamov, E. Shustin, *Logarithmic asymptotics of the genus zero Gromov-Witten invariants of the blown up plane.* — Geometry & Topology

9 (2005), 483–491; see also `arXiv:math.AG/0412533` (2004).

76. Z. Izhakian, *Duality of tropical curves*; `arXiv:math.AG/0503691` (2005).
77. Z. Izhakian, *Tropical arithmetic and algebra of tropical matrices*; `arXiv:math.AG/0505458` (2005).
78. M. Joswig, *Tropical halfspaces*; `arXiv:math.CO/0312068` (2004).
79. Л. В. Канторович, *О перемещении масс.* — Докл. АН СССР **37** (1942), 227–229.
80. M. M. Kapranov, *Amoebas over non-Archimedian fields.* — Preprint (2000).
81. Y. Katsov, *On flat semimodules over semirings.* — Algebra Universalis **51** (2004), 287–299.
82. K. Khanin, D. Khmelëv, and A. Sobolevskiĭ, *A blow-up phenomenon in the Hamilton–Jacobi equation in an unbounded domain.* — In [105], 161–180.
83. K. Khanin, D. Khmelëv, and A. Sobolevskiĭ, *On velocities of Lagrangian minimizers.* — Moscow Math. J. (2005) (in print).
84. K. H. Kim and F. W. Roush, *Inclines and incline matrices: a survey.* — Linear Algebra and its Applications **379** (2004), 457–473.
85. K. H. Kim and F. W. Roush, *Kapranov rank vs. tropical rank*; `arXiv:math.CO/0503044` (2005).
86. K. H. Kim, F. W. Roush, *Factorization of polynomials in one variable over the tropical semiring*; `arXiv:math.CO/0501167` (2005).
87. A. N. Kirillov, *Introduction to tropical combinatorics.* — In: A. N. Kirillov and N. Liskova (Eds.), *Physics and Combinatorics 2000*, Proc. of the Nagoya 2000 Intern. Workshop, World Scientific, (2001), pp. 82–150.
88. S. C. Kleene, *Representation of events in nerve sets and finite automata.* — In: J. McCarthy and C. Shannon (Eds), Automata Studies, Princeton University Press, Princeton, 1956, pp. 3–40.
89. E. P. Klement, R. Mesiar, and E.Pap, *Triangular Norms.* — Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2000).
90. E. P. Klement and E. Pap (Eds.), *Mathematics of fuzzy systems.* — In: 25th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory, Linz, Austria, Feb. 3–7, 2004. Abstracts. J. Kepler Univ., Linz (2004).
91. V. N. Kolokoltsov, *Stochastic Hamilton–Jacobi–Bellman equations and stochastic Hamiltonian systems.* — J. of Control and Dynamic Systems **2** (1996), no. 3, 299–319.
92. V. N. Kolokoltsov, *Semiclassical analysis for diffusions and stochastic processes.* — Springer Lect Notes in Math. **1724** (2000).
93. V. N. Kolokoltsov, *Idempotency structures in optimization.* — J. Math. Sci. **104** (2001), no. 1, 847–880.
94. V. N. Kolokoltsov, *Small diffusion and fast dying out asymptotics for superprocesses as non-Hamiltonian quasiclassics for evalution equations.* — Electr. J. of Probab. **6** (2001), 21; (see `http://www.math.washington.edu/~ ejpecp/)`.
95. V. N. Kolokoltsov and O. A. Malafeyev, *A turnpike theorem in conflict-control processes with many participants.* — In: O. Malafeyev (Ed.), *Conflict Models in Economics and Finance*, St. Petersburg Univ. Press (1997).
96. V. Kolokoltsov and V. Maslov, *Idempotent Analysis and Applications.* — Kluwer Acad. Publ. (1997).

97. V. Kolokoltsov and A. Tyukov, *Small time and semiclassical asymptotics for stochastic heat equation driven by Levi noise.* — Stochastics and Stochastics Reports **75** (2003), no. 1–2, 1–38.
98. M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Homological mirror symmetry and torus fibration.* — In: Symplectic Geometry and Mirror Symmetry (Seoul, 2000), World Sci. Publ., River Edge, N.J. (2001), pp. 203–263.
99. M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Affine structures and non-Archimedean analytic spaces*; `arXiv:math.AG/0406564` (2004).
100. G. L. Litvinov, *Dequantization of mathematics, idempotent semirings and fuzzy sets.* — In [90], 113–117.
101. G. L. Litvinov, *The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: a very brief introduction.* — In [105], 1–17.
102. G. L. Litvinov and V. P. Maslov, *Correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications*, (IHES/M/95/33). — Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette (1995). Also see `arXiv:math.GM/0101021`.
103. G. L. Litvinov and V. P. Maslov, *Idempotent mathematics: correspondence principle and applications.* — Russian Mathematical Surveys **51** (1996), no. 6, 1210–1211.
104. G. L. Litvinov and V. P. Maslov, *The correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications.* — In [69], 420–443.
105 G. L. Litvinov and V. P. Maslov (Eds.), *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics.* — Contemporary Mathematics **377**, AMS, Providence, RI (2005).
106. G. L. Litvinov and E. V. Maslova, *Universal numerical algorithms and their software implementation.* — Programming and Computer Software **26** (2000), no. 5, 275–280. Also see `arXiv:math.SC/0102114`.
107. G. L. Litvinov, V. P. Maslov, and A. Ya. Rodionov, *A unifying approach to software and hardware design for scientific calculations and idempotent mathematics.* — International Sophus Lie Centre, Moscow (2000). Also `arXiv:math.SC/0101069`.
108. Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Г. Б. Шпиз, *Линейные функционалы на идемпотентных пространствах. Алгебраический подход.* — Докл. АН СССР **363** (1998), no. 3, 298–300.
109. Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Г. Б. Шпиз, *Тензорные произведения идемпотентных полумодулей. Алгебраический подход.* — Мат. заметки **65** (1999), no. 4, 572–585.
110. Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Г. Б. Шпиз, *Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход.* — Мат. заметки **69** (2001), no. 5, 758–797.
111. G. L. Litvinov, V. P. Maslov, and G. B. Shpiz, *Idempotent (asymptotic) analysis and the representation theory.* — In: V. A. Malyshev and A. M. Vershik (Eds.), Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics. Kluwer Academic Publ., Dordrecht (2002), p. 267–278. Also `arXiv:math.RT/0206025`.
112. Г. Л. Литвинов, Г. Б. Шпиз, *Ядерные полумодули и теоремы о ядре. Алгебраический подход.* — Докл. АН СССР **386** (2002), no. 3, 300–303.
113. G. L. Litvinov, G. B. Shpiz, *The dequantization transform and generalized Newton polytopes.* — In [105], 181–186.

114. Г. Л. Литвинов, А. Н. Соболевский, *Точные интервальные решения дискретного уравнения Беллмана и полиномиальная сложность задач интервальной идемпотентной линейной алгебры.* — Докл. РАН **374** (2000), no. 2, 304–306.
115. G. L. Litvinov and A. N. Sobolevskiĭ, *Idempotent interval analysis and optimization problems.* — Reliable Computing **7** (2001), no. 5, 353–377. Also `arXiv:math.SC/0101080`.
116. P. Loreti and M. Pedicini, *An object-oriented approach to idempotent analysis: integral equations as optimal control problems.* — In [105], p. 187–208.
117. P. Lotito, J.-P. Quadrat, and E. Mancinelli, *Traffic assignment and Gibbs–Maslov semirings.* — In [105], p. 209-220.
118. G. G. Magaril-Il'yaev and V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications.* — Translations of Mathematical Monographs, vol. **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2003).
119. V. P. Maslov, *New superposition principle for optimization problems.* — In: Seminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles 1985/86, Centre Math. De l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (1986), exposé 24.
120. В. П. Маслов, *О новом принципе суперпозиции для оптимизационных задач.* — Усп. мат. наук, **42** (1987), no. 3, 39–48.
121. В. П. Маслов, *Операторные методы.* — Мир., М. (1973).
122. В. П. Маслов, В. Н. Колокольцов, *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении.* — Наука, М. (1994).
123. V. P. Maslov and S. N. Samborskiĭ (Eds), *Idempotent analysis.* — Adv. in Sov. Math., vol. **13**, AMS, RI (1992).
124. V. P. Maslov and K. A. Volosov (Eds.), *Mathematical aspects of computer engineering.* Mir, Moscow (1988).
125. D. McCaffrey, *Viscosity solutions on Lagrangian manifolds and connections with tunneling operators.* — In [105], 221–238.
126. G. Mikhalkin, *Amoebas of algebraic varieties.* Notes for the Real Algebraic and Analytic Geometry Congress, June 11–15, 2001, Rennes, France. Also `arXiv:math.AG/0108225` (2001).
127. G. Mikhalkin, *Counting curves via lattice path in polygons.* — C.R. Acad. Sci. Paris **336** (2003), no. 8, 629–634.
128. G. Mikhalkin, *Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry.* — to be published in volume "Different Faces in Geometry." Also `arXiv:math.AG/0403015` (2004).
129. G. Mikhalkin, *Enumerative tropical algebraic geometry in* $\mathbf{R}^2$. — J ACM (2005) (in press). Also `arXiv:math.AG/0312530`.
130. E. Nelson, *Probability theory and Euclidean field theory.* — Constructive Quantum Field Theory, vol. **25**, Springer, Berlin (1973).
131. T. Nishinou and B. Siebert, *Toric degenerations of toric varieties and tropical curves*; `arXiv:math.AG/0409060` (2004).
132. M. Noumi, Y. Yamada, *Tropical Robinson–Schensted–Knuth correspondence and birational Weyl group actions.* `arXiv:math-ph/0203030` (2002).
133. R. D. Nussbaum, *Convergence of iterates of a nonlinear operator arising in statistical mechanics.* — Nonlinearity **4** (1991), 1223–1240.

134. L. Pachter and B. Sturmfels, *Tropical geometry of statistical models.* **arXiv:q-bio.QM/0311009v2** (2003).
135. L. Pachter and B. Sturmfels, *The mathematics of phylogenomics*; **arXiv:math.ST/0409132** (2004).
136. S. N. N. Pandit, *A new matrix calculus.* — SIAM J. Appl. Math. **9** (1961), 632–639.
137. E. Pap, *Pseudo-additive measures and their applications.* — In: E. Pap, ed., *Handbook of Measure Theory*, Elsevier, Amsterdam (2002), pp. 1403–1465.
138. E. Pap, *Applications of the generated pseudo-analysis to nonlinear partial differential equations.* — In [105], 239–260.
139. M. Passare and A. Tsikh, *Amoebas: their spines and their contours.* — In [105], 275–288.
140. J. E. Pin, *Tropical semirings.* — In [69], 50–60.
141. A. A. Puhalskii, *Large Deviations and Idempotent Probability.* — Chapman and Hall/CRC Press, London/Boka Raton, FL. (2001).
142. A. A. Puhalskii, *On large deviations convergence of invariant measures.* — J. Theor. Probab. **16** (2003), 689–724.
143 J.-P. Quadrat, *Théorèmes asymptotiques en programmation dynamique.* — Comptes Rendus Acad. Sci., Paris **311**, (1990), 745–748.
144. J.-P. Quadrat and Max-Plus working group, *Max-plus algebra and applications to system theory and optimal control.* — In: *Proc. of the Internat. Congress of Mathematicians*, Zürich (1994).
145. J.-P. Quadrat and Max-Plus working group, *Min-plus linearity and statistical mechanics.* — Markov Processes and Related Fields **3** (1997), no. 4, 565–587.
146. J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, and T. Theobald, *First steps in tropical geometry.* — In [105], 289–318. Also **arXiv:math.AG/0306366**.
147. K. I. Rosenthal, *Quantales and Their Applications.* — Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Sci.& Tech. (1990).
148. K. I. Rosenthal, *The Theory of Quantaloids.* — Pitman Research Notes in Mathematics Series **348**, LongmanHarlow (1996).
149. I. V. Roublev, *On minimax and idempotent generalized weak solutions to the Hamilton–Jacobi equation.* — In [105], 319–338.
150. M. A. Roytberg, *Fast algorithm for optimal aligning of symbol sequences.* — DIMACS Series in Mathematics and Theoretical Computer Science, **8** (1992), 113–126.
151. H. Rullgård, *Polynomial amoebas and convexity.* — Preprint, Stokholm University (2001).
152 S. N. Samborskiǐ, A.A. Tarashchan, *The Fourier transform and semirings of Pareto sets.* — In: [123], 139–150.
153. E. Schrödinger, *Quantization as an eigenvalue problem.* — Annalen der Physik **364** (1926), 361–376 [in German].
154. Г. Б. Шпиз, *Решение алгебраических уравнений в идемпотентных полуполях.* — Усп. мат. наук **55** (2000), no. 5, 185–186.
155. E. Shustin, *Patchworking singular algebraic curves, non-Archimedian amoebas and enumerative geometry*; **arXiv:math.AG/0211278**.
156. E. Shustin, *A tropical calculation of the Welschinger invariants of real toric Del Pezzo surfaces*; **arXiv:math.AG/0504390** (2005).

157. I. Singer, *Abstract convex analysis.* — John Wiley&Sons Inc., New York (1997).
158. I. Singer, *Some relations between linear mappings and conjugations in idempotent analysis.* — J. Math. Sci. **115** (2003), no. 5, 2610–2630.
159. A. N. Sobolevskiĭ, *Aubry-Mather theory and idempotent eigenfunctions of Bellman operator.* — Commun. Contemp. Math. **1** (1999), no. 4, 517–533.
160. A. N. Sobolevskiĭ, *Periodic solutions of the Hamilton-Jacobi equation with a periodic nonhomogeneity, and the Aubry-Mather theory.* — Mat. Sb. **190** (1999), no. 10, 87–104.
161. F. Sottile, *Tropical interpolation*; `arXiv:math.AG/0501146` (2005).
162. D. E. Speyer, *Tropical linear spaces*; `arXiv:math.CO/0410455` (2004).
163. D. Speyer, B. Sturmfels, *The tropical Grassmannian*; `arXiv:math.AG/0304218` (2003).
164. D. Speyer and B. Sturmfels, *Tropical mathematics*; `arXiv:math.CO/0408099` (2004).
165. D. Speyer, L. K. Williams, *The tropical totally positive Grassmannian*; `arXiv:math.CO/0312297` (2003).
166. B. Sturmfels, *Solving systems of polynomial equations.* — CBMS Regional Conference Series in Mathematics, AMS, Providence, RI (2002).
167. A. I. Subbotin, *Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamic Optimization Perspective.* — Birkhäuser, Boston (1996).
168. A. Szenes and M. Vergne, *Mixed toric residues and tropical degenerations*; `arXiv:math.AG/0410064` (2004).
169. J. Tevelev, *Tropical compactifications*; `arXiv:math.AG/0412329` (2004).
170. T. Theobald, *On the frontiers of polynomial computations in tropical geometry*; `arXiv:math.CO/0411012` (2004).
171. M. D. Vigeland, *The group law on a tropical elliptic curve*; `arXiv:math.AG/0411485` (2004).
172. O. Viro, *Dequantization of real algebraic geometry on a logarithmic paper.* — In: 3rd European Congress of Mathematics, Barcelona (2000). Also `arXiv:math/0005163`.
173. O. Viro, *What is an amoeba?* — Notices of the Amer. Math, Soc. **49** (2002), 916–917.
174. Н. Н. Воробьев, *Экстремальная матричная алгебра.* — Докл АН **152** (1963), no. 1, 1220–1223.
175. Н. Н. Воробьев, *Экстремальная алгебра положительных матриц.* — Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik **3** (1967), 39–57.
176. Н. Н. Воробьев, *Экстремальная алгебра неотрицательных матриц.* — Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik **6** (1970), 302–312.
177. E. Wagneur, *Dequantization: semi-direct sums of idempotent semimodules.* — In [105], 339–357.
178. C. Walsh, *Minimum representing measures in idempotent analysis*; `arXiv:math.MG/0503716` (2005).
179. J. van der Woude and G. J. Olsder, *On* $(\min, \max, +)$*-inequalities.* — In [105], 358–363.
180. L. A. Zadeh, *Fuzzy sets.* — Information and Control **8** (1965), 338–353.
181. L. A. Zadeh, *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility.* — Fuzzy Sets and Systems, **1** (1978), 3–28.

182. K. Zimmermann, *Extremální Algebra.* — Ekonomický ùstav ČSAV, Praha **46** (1976). (in Czech).
183. K. Zimmermann, *A general separation theorem in extremal algebras.* — Ekonom.-Mat. Obzor **13** (1977), no. 2, 179–210.
184. K. Zimmermann, *Extremally convex functions.* — Wiss. Z. Päd. Hochschule "N. K. Krupskaya" **17** (1979), 147–158.
185. K. Zimmermann, *A generalization of convex functions.* — Ekonom.-Mat. Obzor **15** (1979), no. 2, 147–158.
186. K. Zimmermann, *Solution of some max-separable optimization problems with inequality constraints.* — In [105], 363–370.
187. U. Zimmermann, *Linear and combinatorial optimization in ordered algebraic structures.* — Ann. Discrete Math., **10** (1981), 1–380.

Litvinov G. L. The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: a brief introduction.

This paper is a brief introduction to idempotent and tropical mathematics. Tropical mathematics can be treated as a result of the so-called Maslov dequantization of the traditional mathematics over numerical fields as the Planck constant $\hbar$ tends to zero taking imaginary values.

Независимый Московский Университет
Поступило 19 июня 2005 г.
E-mail: islc@dol.ru