Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 326, 2005 г.

А. Л. Чистов

ЭФФЕКТИВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ НЕПРИВОДИМЫХ КОМПОНЕНТ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ В НЕНУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Посвящается Анатолию Моисеевичу Вершику
с искренней признательностью и уважением

Введение

Пусть k – бесконечное поле характеристики p. Пусть $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ – n-мерное проективное пространство над алгебраическим замыканием $\overline{k}$ поля k с однородными координатами $X_0, \dots, X_n$. Пусть $W \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ – алгебраическое многообразие, определённое над k и неприводимое над k. Предположим, что размерность $\dim W$ равняется $n - s$, где $1 \leqslant s \leqslant n$ и степень $\deg W$ равняется D. Пусть многообразие W является множеством нулей однородного идеала $\mathfrak{P} \subset k[X_0, \dots, X_n]$. В [2] мы доказываем, что локальное кольцо многообразия W имеет регулярную последовательность (соответственно, если $p = 0$ – последовательность локальных параметров), состоящую из s неоднородных многочленов, произведение степеней меньших D, умноженное на константу, зависящую от n (это доказано в [2] только в случае совершенного основного поля; но отсюда очевидным образом то же самое утверждение следует в общем случае, см. ниже). Далее, см. [2], в случае, когда W является компонентой алгебраического многообразия, заданного системой однородных полиномиальных уравнений степеней меньших d, над полем нулевой характеристики, степени всех этих локальных параметров меньше d, умноженного на константу, зависящую от n. Рассматриваемые константы, зависящие от n, оцениваются в [2].

Цель настоящей статьи распространить результаты [2], относящиеся к оценкам степеней локальных параметров многообразия W, на случай ненулевой характеристики. Именно, для произвольного p мы доказываем, что W имеет последовательность локальных параметров, состоящую из s неоднородных многочленов с произведением степеней, ограниченым сверху D, умноженным на константу, зависящую только от n, см. теорему 1. В случае, когда W является неприводимой компонентой алгебраического многообразия, заданного системой однородных полиномиальных уравнений со степенями, меньшими d, и W определено над k и неприводимо над k, степени всех этих локальных параметров меньше, чем d, умноженное на константу, зависящую только от n, см. теорему 2. Эти константы, зависящие от n, оцениваются.

Обозначим через $k^{p^{-\infty}}$ совершенное замыкание поля k. Для всякого целого числа $\nu \geqslant 0$ обозначим через $k^{p^{-\nu}}$ подполе всех элементов $z \in k^{p^{-\infty}}$, таких что $z^{p^{\nu}} \in k$.

Заметим здесь, что в общем случае можно представить алгебраическое многообразие V, заданное системой однородных полиномиальных уравнений с коэффициентами из k, степеней, меньших d, только как объединение определённых над $k^{p^{-\infty}}$ и неприводимых над $k^{p^{-\infty}}$ компонент. Согласно [1] в действительности

(∗) для всякого $0 \leqslant s \leqslant n$ все неприводимые компоненты многообразия V коразмерности s, определённые над $k^{p^{-\infty}}$, определены также над $k^{p^{-\nu}}$ для некоторого целого числа $\nu \geqslant 0$, такого что $p^{\nu} \leqslant d^{2s}$.

Следовательно, если k совершенно, то многообразие V представляется как объединение определённых над k и неприводимых над k компонент. Вероятно несложно доказать, что можно заменить d^{2s} на d^{s} в (∗), но нам это не потребуется.

Теперь, используя теорему 1 и теорему 2, мы получаем аналог теоремы 2 [3]. Напомним последний результат из [3]. Рассмотрим проективное алгебраическое многообразие V, заданное как множество всех общих нулей семейства однородных многочленов степеней, меньших d, относительно $n+1$ переменных с коэффициентами из поля k нулевой характеристики. В [3] мы доказываем, что V может быть представлено как объединение самое большее $C(n)d^{n}$ (соответственно, $C(n)d^{n(n+1)/2}$) гладких квазипроективных многообразий (соответственно попарно не пересекающихся гладких квазипроективных многообразий) со степенями (степень квазипроективного алгебраического многообразия равна степени его замыкания в топологии Зарисского), ограниченными сверху $C(n)d^{n}$, где $C(n) < 2^{2^{n^{C}}}$ для абсолютной константы $C > 0$. Небольшое исправление утверждения (vi) теоремы 2 [3] см. в [4] (оно относится к оценкам длин записи коэффициентов из основного поля многочленов, задающих страты). Согласно замечанию 4 из [3], теперь результат, аналогичный теореме 2 [3], справедлив также для случая совершенного основного поля k ненулевой характеристики. В теореме 3 ниже мы рассмотрим даже случай, когда k не обязательно является совершенным.

Для всяких многочленов $g_1, \dots, g_m \in \overline{k}[X_0, \dots, X_n]$ мы будем обозначать через $\mathcal{Z}(g_1, \dots, g_m)$ множество всех общих нулей этих многочленов в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ (в дальнейшем мы будем использовать аналогичные обозначения для множеств всех общих нулей других многочленов или идеалов в проективных или аффинных пространствах). Для любого проективного алгебраического многообразия $V \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ мы будем обозначать через $\mathcal{I}(W) \subset k[X_0, \dots, X_n]$ однородный идеал, соответствующий W (аналогичные обозначения будут использоваться для идеалов аффинных алгебраических многообразий и для идеалов в кольцах многочленов с другими полями коэффициентов).

Напомним некоторые определения из [2].

Определение 1. *Пусть W и $\mathfrak{P}$ – такие же, как и выше. Пусть $0 < j \leqslant s$ – целое число. Рассмотрим последовательность однородных многочленов $f_i \in \mathfrak{P}$, $1 \leqslant i \leqslant j$. Пусть $0 \leqslant u < j$ – целое число. Обозначим через $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathfrak{P}, u)$ множество всех определённых над k и неприводимых над k компонент E алгебраического многообразия $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_u)$, таких что $E \supset W$. Предположим, что для всякого целого числа $0 \leqslant u < j$ многочлен $f_{u+1} \in \mathfrak{P}$ является многочленом g наименьшей степени, таким что для всякой неприводимой компоненты $E \in \mathcal{W}$ выполнено*

$$E \not\subset \mathcal{Z}(g).$$

Тогда любую такую последовательность $f_1, \dots, f_j$ мы будем называть $\mathfrak{P}$–последовательностью (длины j). Согласно предложению 1, см. ниже, всегда существует некоторая $\mathfrak{P}$-последовательность $f_1, \dots, f_s$.

Определение 2. *Пусть $f_1, \dots, f_s$ – $\mathfrak{P}$-последовательность. По определению положим*

$$\delta_i(\mathfrak{P}) = \deg f_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Тогда, см. [2, лемма 2 раздела 2], *целые числа $\delta_i(\mathfrak{P})$ зависят только от $\mathfrak{P}$ и не зависят от выбора $\mathfrak{P}$-последовательности. Целое число $\delta_i(\mathfrak{P})$ будем называть i-ой степенью, соответствующей $\mathfrak{P}$-последовательности.*

Заметим, что если $f_1, \dots, f_j$ является $\mathfrak{P}$-последовательностью, то для всякого $0 \leqslant u \leqslant j$ любая неприводимая компонента алгебраического многообразия $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_u)$, содержащая V, имеет размерность $n-u$. В частности, когда $j = s$, алгебраическое многообразие V является неприводимой компонентой $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_s)$. Заметим также, что в общем случае алгебраическое многообразие $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_s)$ может иметь неприводимые компоненты размерности большей, чем $n - s$.

Следующий результат, см. [2, теорема 1], доказан для произвольной характеристики.

Предложение 1. *Пусть k – бесконечное поле. Тогда существует некоторая $\mathfrak{P}$–последовательность $f_1, \dots, f_s$. Следовательно, определены $\delta_i = \delta_i(\mathfrak{P}) = \deg f_i$ для всякого $1 \leqslant i \leqslant s$. Далее, см.* [2, *теорема* 1], *для произвольного p существует константа $C \in \mathbb{R}$, такая что справедливо неравенство*

$$\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_s \leqslant n^{2^{s^C}} D. \tag{1}$$

Доказательство. Случай, когда k является совершенным, есть в точности теорема 1 [2]. В общем случае мы расширяем k до $k^{p^{-\infty}}$ и получаем $\mathfrak{P}$-последовательность $f_1, \dots, f_s$ с коэффициентами из $k^{p^{-\infty}}$. Поскольку W определено над k и неприводимо над k, то можно представить f_i в виде $f_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N_i} \lambda_{i,j} g_{i,j}$, где все $\lambda_{i,j} \in k^{p^{-\infty}}$ и $g_{i,j} \in \mathfrak{P}$ являются ненулевыми однородными многочленами (с коэффициентами из k), и $\deg g_{i,j} = \deg f_i$ для всех i, j. Следовательно, W является неприводимой компонентой алгебраического многообразия

$$\mathcal{Z}\Big(\sum_{1 \leqslant j \leqslant N_1} \mu_{1,j} g_{1,j}, \dots, \sum_{1 \leqslant j \leqslant N_s} \mu_{s,j} g_{s,j} \Big)$$

для подходящих $\mu_{i,j} \in k$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant N_i$. Это даёт требуемую $\mathfrak{P}$-последовательность с коэффициентами из k. Предложение доказано.

Замечание 1. Заметим, что доказательство того, что $\delta_i(\mathfrak{P})$ не зависит от выбора $\mathfrak{P}$-последовательности, использует бесконечность поля k. Теорема 1 [2] справедлива также для случая конечных полей (но тогда не утверждается, что δ_i не зависят от выбора $\mathfrak{P}$-последовательности). Легко видеть, что в доказательстве требуются только незначительные изменения. Однако мы не рассматриваем сейчас наиболее общую ситуацию.

Теперь мы собираемся сформулировать результаты настоящей статьи. Теорема 1 и теорема 2, см. ниже, обобщают теорему 2 и теорему 3 из [2] на случай ненулевой характеристики.

Теорема 1. *Пусть k – бесконечное поле произвольной характеристики p. Пусть $W = \mathcal{Z}(\mathfrak{P})$ и $\mathfrak{P}$ – такие же, как и выше. Тогда существуют однородные многочлены $g_1, \ldots, g_s \in \mathfrak{P}$, гладкая точка $x \in W$ и линейная форма $L \in k[X_0, \ldots, X_n]$, такие что*

- *$L(x) \neq 0$,*
- *набор $g_1/L^{\deg g_1}, \ldots, g_s/L^{\deg g_s}$ является системой локальных параметров (определение локальных параметров, см., например, в [6]) алгебраического многообразия W в точке x,*
- *$\deg g_i \leqslant n^{2^{s^C}} \delta_i(\mathfrak{P})$, $1 \leqslant i \leqslant s$, для абсолютной константы $0 < C \in \mathbb{R}$ (она не зависит от p).*

В ненулевой характеристике требуется рассматривать четыре случая в рекурсии из доказательства теоремы 1 по сравнению с только одной рекурсией для нулевой характеристики, см. замечание 2 раздела 2. Как следствие теоремы 1 и [2, лемма 5], мы получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\phi_1, \ldots, \phi_m \in k[X_0, \ldots, X_n]$, $m \geqslant 1$, – произвольные однородные многочлены. Пусть $\deg \phi_i < d$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Предположим, что существует определённая над k и неприводимая над k компонента W алгебраического многообразия*

$$\mathcal{Z}(\phi_1, \ldots, \phi_m) \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$$

всех общих нулей этих многочленов в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Пусть $\dim W = n - s$, где $1 \leqslant s \leqslant n$. Тогда существуют однородные многочлены $g_1, \ldots, g_s \in \mathfrak{P}$, гладкая точка $x \in W$ и линейная форма $L \in k[X_0, \ldots, X_n]$, такие что

- *$L(x) \neq 0$,*

- *набор* $g_1/L^{\deg g_1}, \dots, g_s/L^{\deg g_s}$ *является системой локальных параметров алгебраического многообразия* W *в точке* x,
- $\deg g_i \leqslant n^{2^{s^C}} d$, $1 \leqslant i \leqslant s$, *где* $0 < C \in \mathbb{R}$ – *абсолютная константа.*

Теперь мы собираемся сформулировать аналог теоремы 2 [3]. Но сначала нам надо напомнить некоторые определения из [3]. Пусть $f_1, \dots, f_m \in k[X_0, \dots, X_n]$, $m \geqslant 1$, – однородные многочлены (не следует путать их с многочленами из определений 1, 2 и предложения 1). Пусть $\deg f_i < d$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Положим V равным алгебраическому многообразию $\mathcal{Z}(f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ всех общих нулей многочленов $f_1, \dots, f_m$ в проективном пространстве $\mathbb{P}^n(\overline{k})$.

Определение 3. *Гладкое покрытие алгебраического многообразия* V *есть конечное семейство*

$$V_\alpha, \quad \alpha \in A, \tag{2}$$

гладких квазипроективных алгебраических многообразий $V_\alpha \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$, $\alpha \in A$, *такое что* V *представляется как объединение* $V = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$. *Далее мы требуем, чтобы все неприводимые компоненты* V_α *имели одну и ту же размерность (которая зависит только от* α*). Гладкая стратификация алгебраического многообразия* V – *это гладкое покрытие* V_α, $\alpha \in A$, *многообразия* V, *такое что* $V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} = \emptyset$ *при* $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

В [3] мы предлагаем новый метод для представления алгебраических многообразий (только в случае нулевой характеристики). Теперь мы расширяем это представление на ненулевую характеристику. В утверждении теоремы 3 ниже основное поле k является конечнопорождённым над примитивным подполем (следовательно, оно не обязательно совершенно). Именно, мы представляем k в виде $k = \mathbb{F}_p(t_1, \dots, t_l, \theta)$, $l \geqslant 0$, где $t_1, \dots, t_l$ алгебраически независимы над полем из p элементов $\mathbb{F}_p$, а θ – алгебраический сепарабельный над полем $\mathbb{F}_p(t_1, \dots, t_l)$ элемент. Дан минимальный многочлен $F \in \mathbb{F}_p(t_1, \dots, t_l)[Z]$ элемента θ над $\mathbb{F}_p(t_1, \dots, t_l)$. Старший коэффициент $\mathrm{lc}_Z F$ многочлена F относительно Z равен 1. В случае, когда k конечно, т.е., $l = 0$, мы будем требовать, чтобы k имело достаточно много элементов. Именно, число элементов $\#k$ ограничено снизу полиномом от $2^{2^{n^C}} d^{n^2}$ для подходящего $C > 0$ (где $\deg f_i < d$, см. выше). Всегда можно расширить основное поле до поля $k(t_1)$, или, другим способом, до конечного поля k' с достаточно большим числом элементов, и после этого применить теорему 3.

Мы представляем каждый многочлен $f = f_i$ в виде

$$f = \frac{1}{a_0} \sum_{i_0,\dots,i_n} \sum_{0\le j<\deg_Z F} a_{i_0,\dots,i_n,j} \theta^j X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n},$$

где $a_0, a_{i_0,\dots,i_n,j} \in \mathbb{F}_p[t_1,\dots,t_l]$, $\mathrm{GCD}_{i_0,\dots,i_n,j}(a_0, a_{i_0,\dots,i_n,j}) = 1$. Определим длину записи $l(a)$ элемента $a \in \mathbb{F}_p$ при помощи формулы $l(a) = [\log p]+1$ (*всюду в дальнейшем* $\log(x) = \log_2(x)$). Также длина записи коэффициентов $l(f)$ многочлена f определяется как $l(f) = [\log p] + 1$ и его степень как

$$\deg_{t_\gamma}(f) = \max_{i_0,\dots,i_n,j} \{\deg_{t_\gamma}(a_0), \deg_{t_\gamma}(a_{i_0,\dots,i_n,j})\},$$

где $1 \leqslant \gamma \leqslant l$. Аналогичным образом мы будем определять степени и длины записи из $\mathbb{F}_p$ других многочленов, в частности, определены $\deg_{t_\gamma} F$ и $l(F) = [\log p] + 1$.
Мы будем предполагать, что справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\deg_{X_0,\dots,X_n}(f_i) < d, \qquad && \deg_{t_\gamma}(f_i) < d_2, \\ &\deg_Z(F) < d_1, && \deg_{t_\gamma}(F) < d_1. \end{aligned}$$

Длина записи $L(f)$ многочлена f определяется как произведение $l(f)$ на число коэффициентов из $\mathbb{Z}$ многочлена f в плотном представлении. Мы имеем оценку

$$L(f_i) < \left(\left(\binom{d+n}{n} d_1 + 1\right) d_2^l ([\log p] + 1\right).$$

Аналогично $L(F) < d_1^{l+1}([\log p]+1)$. Если не оговорено противное, то в дальнейшем мы предполагаем, что l фиксировано.

Мы будем представлять точку $z \in V$ с координатами из конечного сепарабельного расширения поля k следующим образом. Известен индекс $0 \leqslant i_0 \leqslant n$, такой что $X_{i_0}(z) \neq 0$, и задан изоморфизм полей

$$k(z) = k((X_1/X_{i_0})(z), \dots, (X_n/X_{i_0})(z)) \simeq k[\eta] = k[Z]/(\Phi), \qquad (3)$$

причём $\sum_{0\leqslant i\leqslant n} c_i (X_i/X_{i_0})(z) \mapsto \eta$ под действием (3), коэффициенты $c_i \in \Lambda$ (где Λ – некоторое небольшое подкольцо поля k, см.

ниже) заданы и $\Phi \in k[Z]$ – минимальный многочлен элемента η над k со старшим коэффициентом $\mathrm{lc}_Z \Phi = 1$. Таким образом, точка z определена с точностью до сопряжения над k, и Φ – сепарабельный многочлен относительно Z. Более точно, представление (3) задаёт определённое над k и неприводимое над k алгебраическое многообразие размерности 0.

Пусть $g \in k[\eta]$ – произвольный элемент. Тогда $g = G(\eta)$ для однозначно определённого многочлена $G \in k[Z]$, такого что $\deg_Z G < \deg_Z \Phi$. Длина записи коэффициентов $\mathrm{l}(g)$, длины записи $\mathrm{L}(g)$ и степени $\deg_{t_\alpha} g$, $1 \leqslant \alpha \leqslant l$, элемента g определены формулами

$$\mathrm{l}(g) = \mathrm{l}(G), \quad \mathrm{L}(g) = \mathrm{L}(G), \quad \deg_{t_\alpha} g = \deg_{t_\alpha} G.$$

Определим длину записи $\mathrm{L}(z)$ точки z равной $\mathrm{L}(\Phi) + \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{L}(\frac{X_i}{X_{i_0}})$. Пусть теперь Ξ – произвольное конечное множество точек, определённое над k, и всякая точка из Ξ задана в виде (3). Следовательно, Ξ определяет нульмерное алгебраическое многообразие, определённое над k. Положим длину записи $\mathrm{L}(\Xi)$ множества Ξ равной сумме длин записи его неприводимых над k компонент.

Фактически, в [3] требуются только незначительные изменения. Первое из них относится к оценке степеней несепарабельности полей определения стратов. Второе связано с выбором коэффициентов линейных форм и других многочленов, см. ниже. Вместо целых коэффициентов мы выбираем коэффициенты из небольшого подкольца Λ поля k. Если степень трансцендентности поля k над примитивным подполем $\mathbb{F}_p$ из p элементов является ненулевой, то мы выбираем элемент $\lambda^{(0)} \in k$, который является трансцендентным над $\mathbb{F}_p$ (скажем, $\lambda^{(0)} = t_1$) и полагаем $\Lambda = \mathbb{F}_p[\lambda^{(0)}] \subset k$. Если степень трансцендентности поля k над $\mathbb{F}_p$ равна нулю, то положим $\Lambda = k$ (напомним, что в этом случае мы предполагаем, что k имеет достаточно много элементов, см. выше). Длина записи $\mathrm{L}(a)$ произвольного элемента $a \in \Lambda$ определена, см. выше (например, если $\Lambda = \mathbb{F}_p[\lambda^{(0)}]$, то $\mathrm{L}(a) = (\deg_{\lambda^{(0)}}(a) + 1)([\log p] + 1))$.

Пусть W – квазипроективное алгебраическое многообразие в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ и W определено над k. Тогда представим W в виде

$$W = W^{(1)} \setminus \cup_{2 \leqslant i \leqslant a} W^{(i)}, \tag{4}$$

где все $W^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant a$, являются проективными алгебраическими многообразиями в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$, определёнными над k. Всякое алгебраическое многообразие $W^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant a$, задано как объединение некоторых неприводимых компонент алгебраического многообразия $\mathcal{Z}(f_1^{(i)}, \dots, f_{m(i)}^{(i)}) \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$, где однородные многочлены $f_1^{(i)}, \dots, f_{m(i)}^{(i)} \in k[X_0, \dots, X_n]$ заданы. Для всякого $1 \leqslant s \leqslant n$ обозначим через $V_s^{(i)}$ (соответственно, $W_s^{(i)}$) объединение всех неприводимых компонент размерности $n-s$ многообразия $\mathcal{Z}(f_1^{(i)}, \dots, f_{m(i)}^{(i)})$ (соответственно, $W^{(i)}$). Следовательно, $W_s^{(i)}$ является объединением некоторых неприводимых компонент $V_s^{(i)}$. Для всякого $1 \leqslant s \leqslant n$ задано семейство линейных форм $L_{s,s+1}^{(i)}, \dots, L_{s,n}^{(i)} \in k[X_0, \dots, X_n]$ с коэффициентами из Λ, такое что

$$\# V_s^{(i)} \cap \mathcal{Z}(L_{s,s+1}^{(i)}, \dots, L_{s,n}^{(i)}) < +\infty \tag{5}$$

(число точек конечно). Всякая точка $\xi \in V_s^{(i)} \cap \mathcal{Z}(L_{s,s+1}^{(i)}, \dots, L_{s,n}^{(i)})$ является гладкой точкой алгебраического многообразия $\mathcal{Z}(f_1^{(i)}, \dots, f_{m(i)}^{(i)})$, и пересечение касательных пространств в точке ξ многообразия $V_s^{(i)}$ и $\mathcal{Z}(L_{s,s+1}^{(i)}, \dots, L_{s,n}^{(i)})$ трансверсально, т.е.

$$T_{\xi, V_s^{(i)}} \cap \mathcal{Z}(L_{s,s+1}^{(i)}, \dots, L_{s,n}^{(i)}) = \{\xi\}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что расширение $k(\xi) \supset k$ сепарабельное и, следовательно, точка ξ может быть представлена в виде (3) (с ξ вместо z). Задано множество точек

$$\Xi_s^{(i)} = W_s^{(i)} \cap \mathcal{Z}(L_{s,s+1}^{(i)}, \dots, L_{s,n}^{(i)}).$$

Следовательно, выполнено следующее свойство. Пусть $\xi \in V_s^{(i)} \cap \mathcal{Z}(L_{s,s+1}^{(i)}, \dots, L_{s,n}^{(i)})$, и V' является однозначно определённой неприводимой над k компонентой алгебраического многообразия $V_s^{(i)}$, такой что $\xi \in V'$. Тогда $\xi \in \Xi_s^{(i)}$ в том и только в том случае, если V' является компонентой многообразия $W^{(i)}$.

Таким образом, формально принятое в этой статье представление W является тройкой

$$(f, L, \Xi), \tag{7}$$

где f – семейство многочленов

$$f_j^{(i)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m(i), 1 \leqslant i \leqslant a, \tag{8}$$

L – семейство линейных форм

$$L_{s,j}^{(i)}, \quad s+1 \leqslant j \leqslant n,\, 1 \leqslant s \leqslant n,\, 1 \leqslant i \leqslant a, \tag{9}$$

и Ξ – семейство конечных множеств точек

$$\Xi_s^{(i)}, \quad 1 \leqslant s \leqslant n,\, 1 \leqslant i \leqslant a. \tag{10}$$

Введем также обозначение

$$\Xi^{(i)} = \bigcup_{1 \leqslant s \leqslant n} \Xi_s^{(i)}. \tag{11}$$

Заметим, что здесь W определено над k. Мы будем использовать это представление также для других полей определения.

Теперь мы можем сформулировать аналог теоремы 2 [3].

Теорема 3. *Пусть основное поле $k = \mathbb{F}_p(t_1, \dots, t_l, \theta)$ задано таким же образом, как и выше. Пусть однородные многочлены $f_1, \dots, f_m \in k[X_0, \dots, X_n]$ и алгебраическое многообразие $V = \mathcal{Z}(f_1, \dots, f_m)$ – такие же, как и выше. Существует гладкое покрытие (соответственно, гладкая стратификация) V_α, $\alpha \in A$, алгебраического многообразия V, такое что (соответственно, такая что) всякое квазипроективное алгебраическое многообразие V_α определено над $k^{p^{-n(\alpha)}} = k_\alpha$ для целого числа $n(\alpha) \geqslant 0$, неприводимо над k_α и представлено в описанном выше виде (с основным полем k_α вместо k). Пусть $\dim V_\alpha = n - s$, где $1 \leqslant s \leqslant n$ и $s = s(\alpha)$ зависит от α. Пусть (7) – построенное представление V_α. Положим $h_{\alpha,j} = f_j^{(1)}$, $1 \leqslant j \leqslant m(1)$, и $\Delta_\alpha = f_1^{(2)}$, если $a \geqslant 2$, см. (8). Тогда построенное представление V_α удовлетворяет следующим свойствам.*

(i) *В случае гладкого покрытия $a = 2$, если $s < n$, и $a = 1$, если $s = n$. В случае гладкой стратификации $a \leqslant 2^{2^{n^C}} d^{n(n+1)/2}$, где $0 < C \in \mathbb{R}$ – абсолютная константа.*

(ii) *$m(1) = s$ и, если $a \geqslant 2$, то $m(2) = 1$. Следовательно, если $a \geqslant 2$, то V_α является неприводимой компонентой алгебраического многообразия $\mathcal{Z}(h_{\alpha,1}, \dots, h_{\alpha,s}) \setminus \mathcal{Z}(\Delta_\alpha)$ в случае гладкого покрытия (соответственно, открытым в топологии Зарисского подмножеством последнего алгебраического многообразия в случае гладкой стратификации).*

(iii) *Существуют линейно независимые линейные формы* $Y_0, \dots, Y_n \in k[X_0, \dots, X_n]$, *такие что* $X_i = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} x_{i,j} Y_j$, *все коэффициенты* $x_{i,j} \in k$, *все* $x_{i,j}$ *являются элементами из* Λ *с длинами записи* $O(2^{n^C} + n \log d)$, *где* $0 < C \in \mathbb{R}$ – *абсолютная константа, и*

$$\Delta_\alpha = \det(\partial h_{\alpha,i}/\partial Y_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant s} = \det\Big(\sum_{0 \leqslant v \leqslant n} x_{v,j} \partial h_{\alpha,i}/\partial X_v \Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant s}.$$

Следовательно, V_α *является гладким алгебраическим многообразием по теореме о неявной функции. Кроме того, в случае гладкого покрытия можно взять* $Y_i = X_{\sigma(i)}$ *для некоторой перестановки* σ *множества* $0, \dots, n$.

(iv) *Длины записи коэффициентов из* Λ *всех линейных форм из семейства* L *равны* $O(2^{n^C} + n \log d)$, *где* $0 < C \in \mathbb{R}$ – *абсолютная константа.*

(v) *Для всех* $\alpha \in A$, $1 \leqslant j \leqslant s(\alpha)$ *степени* $\deg_{X_0, \dots, X_n} h_{\alpha,j}$ *меньше, чем* $n^{2^{s(\alpha)^C}} d$ *для абсолютной константы* $0 < C \in \mathbb{R}$. *В случае гладкой стратификации для всех* $i > 2$, j *степени* $\deg_{X_0, \dots, X_n} f_j^{(i)}$ *меньше, чем* $2^{2^{n^C}} d$.

(vi) *Для всех* $\alpha \in A$, $1 \leqslant j \leqslant s(\alpha)$

$$h_{\alpha,1}, \dots, h_{\alpha,s(\alpha)} \in k^{p^{-\nu(\alpha)}}[X_0, \dots, X_n], \tag{12}$$

где $p^{\nu(\alpha)} \leqslant n^{2^{s(\alpha)^C}} d^{2ns(\alpha)}$ *для абсолютной константы* $0 < C \in \mathbb{R}$. *Далее, длины записи коэффициентов многочленов* $h_{\alpha,j}^{p^{\nu(\alpha)}}$ *ограничены сверху полиномом от* $n^{2^{s(\alpha)^C}} d^{ns(\alpha)}$, d_1, d_2, M, M_1, m, *где* $0 < C \in \mathbb{R}$ – *абсолютная константа. Наконец, в случае гладкой стратификации* $p^{n(\alpha)} \leqslant 2^{2^{n^C}} d^{2n^2}$ *для абсолютной константы* $0 < C \in \mathbb{R}$; *для всех* $i > 2$, j *длины записи коэффициентов многочленов из семейства* $(f_j^{(i)})^{p^{n(\alpha)}}$, $1 \leqslant j \leqslant m(i)$, $1 \leqslant i \leqslant a$, *см.* (8), *ограничены сверху полиномом от* $2^{2^{n^C}} d^{n^2}$, d_1, d_2, M, M_1, m, *где* $0 < C \in \mathbb{R}$ – *абсолютная константа.*

(vii) *Число элементов* $\#A$ *множества* A *ограничено сверху величиной* $2^{2^{n^C}} d^n$ *в случае гладкого покрытия (соответственно,* $2^{2^{n^C}} d^{n(n+1)/2}$ *в случае гладкой стратификации) для абсолютной константы* $0 < C \in \mathbb{R}$.

Набросок доказательства. Утверждение следует из замечания 4 [3]. Именно, применяя теорему 1 и теорему 2 вместо теоремы 1 [3] (нам не требуется строить сейчас регулярные последовательности и последовательности локальных параметров, как в утверждениях (i) и (ii) последней теоремы, мы используем только их существование), читатель может повторить все конструкции из доказательства теоремы 2 [3] с небольшими модификациями и получить все утверждения теоремы 3.

Рассмотрим более подробно пункт (vi). Здесь достаточно доказать только первые два утверждения, относящиеся к многочленам $h_{\alpha,1},\dots,h_{\alpha,s(\alpha)}$. Действительно, если они доказаны для стратов всех размерностей, то последнее утверждение из (vi) немедленно следует из (ii).

Утверждения, относящиеся к многочленам $h_{\alpha,1},\dots,h_{\alpha,s(\alpha)}$, доказываются индукцией по $s(\alpha)$ при помощи конструкции из доказательства теоремы 2 [3]. Здесь следует использовать $(*)$, см. выше. Мы оставляем подробности читателю.

1. Предварительные определения и леммы

В настоящем и следующем разделах наша цель – доказать теорему 1. Мы следуем конструкции из раздела 10 [2] и расширяем её на случай ненулевой характеристики. Поскольку случай нулевой характеристики рассмотрен в [2], мы будем предполагать в дальнейшем без ограничения общности, что $p = \mathrm{char}(k) > 0$. Кроме того, как и в доказательстве предложения 1, мы будем считать без ограничения общности, что поле k является совершенным.

Пусть однородный простой идеал $\mathfrak{P}$ – тот же самый, что и во Введении, алгебраическое многообразие W есть $\mathcal{Z}(\mathfrak{P})$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ и $D = \deg W$. Пусть $s \geqslant 1$. Пусть $Y_0,\dots,Y_n \in k[X_0,\dots,X_n]$ – линейно независимы линейные формы, удовлетворяющие следующим условиям:

$$W \cap \mathcal{Z}(Y_0, Y_{s+1},\dots,Y_n) = \emptyset, \tag{13}$$

$$W \cap \mathcal{Z}(Y_0, Y_i, Y_{s+1},\dots,Y_{n-1}) = \emptyset, \quad 1 \leqslant i \leqslant s. \tag{14}$$

Рассмотрим проекции

$$\begin{aligned}&\pi : W \to \mathbb{P}^{n-s}(\overline{k}),\\ &(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (Y_0 : Y_{s+1} : \ldots : Y_n)\end{aligned}$$

и

$$\pi_i : W \to \mathbb{P}^{n-s+1}(\overline{k}),$$
$$(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (Y_0 : Y_i : Y_{s+1} : \ldots : Y_n),\ 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Все проекции π и $\pi_i : W \to \pi_i(W)$, $1 \leqslant i \leqslant s$, являются конечными согласно (13). Пусть $H_i \in k[Z_0, Z_s, Z_{s+1}, \ldots, Z_n]$ – форма, соответствующая проекции π_i многообразия W для всякого $1 \leqslant i \leqslant s$, см. определение 6 из раздела 8 в [2], т.е., это – ненулевой многочлен наименьшей степени, такой что $H_i(Y_0, Y_i, Y_{s+1}, \ldots, Y_n)$ обращается в нуль тождественно на W. Следующая лемма аналогична лемме 17 [2].

Лемма 1. *Пусть $x \in W$ – гладкая точка в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Тогда существует семейство линейно независимых линейных форм $Y_0, \ldots, Y_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$, удовлетворяющих* (13), (14) *и таких, что*

(i) $Y_0(x) \neq 0$,

(ii) $\pi^{-1}(\pi(x))$ *состоит из* $\deg W$ *различных точек,*

(iii) *число элементов* $\#(Y_i/Y_0)(\pi^{-1}(\pi(x)))$ *равно* $\#\pi^{-1}(\pi(x))$ *для всякого* $1 \leqslant i \leqslant s$.

Пусть $L \in k[X_0, \ldots, X_n]$ – линейная форма, такая что $L(x) \neq 0$. Положим

$$\varphi_i = H_i(Y_0, Y_i, Y_{s+1}, \ldots, Y_n)/L^{\deg H_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Тогда $\deg H_i = D$ для всякого $1 \leqslant i \leqslant s$, и $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ является системой локальных параметров алгебраического многообразия W в точке x (это означает, по определению, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ порождают идеал многообразия W в локальном кольце $\mathcal{O}_{x,\mathbb{P}^n(\overline{k})}$ точки x в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$).

Доказательство. Существование линейных форм $Y_0, \ldots, Y_n$, удовлетворяющих всем требованиям, следует из того, что линейные формы относительно $X_0, \ldots, X_n$ с трансцендентными коэффициентами удовлетворяют этим требованиям. Согласно (iii) и, например, замечанию перед определением 6 раздела 8 из [2], $\deg_{Z_s} H_i = \deg H_i = D = \deg W$. Следовательно, многочлен $H_i \in k(Z_0, Z_{s+1}, \ldots, Z_n)[Z_s]$ – сепарабельный. По (ii) дифференциал $d_x\pi$ проекции π в точке x является изоморфизмом. Из теоремы о неявной функции теперь следует, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ является системой локальных параметров W в точке x. Лемма доказана.

Предположим, что дана $\mathfrak{P}$-последовательность $f_1, \dots, f_s$. В этом и следующем разделах мы опишем конструкцию локальных параметров в точке алгебраического многообразия W. Мы построим многочлены $g_1, \dots, g_s$ из формулировки теоремы 1. Пусть $0 \leqslant r < s$ – целое число. Предположим, что мы уже построили, используя рекурсию по r, гладкую точку $x \in W$ и однородные многочлены

$$g_1, \dots, g_r, f_{r,r+1}, \dots, f_{r,s} \in k[X_0, \dots, X_n],$$

такие что

(a) x является гладкой точкой многообразия $\mathcal{Z}(g_1, \dots, g_r)$,

(b) W является неприводимой компонентой многообразия $\mathcal{Z}(g_1, \dots, g_r,\ f_{r,r+1}, \dots, f_{r,s})$,

(c) x является гладкой точкой многообразия $\mathcal{Z}(g_1, \dots, g_r,$ $f_{r,r+1}, \dots, f_{r,s})$,

(d) $f_{r,j} = \sum_{1 \leqslant v \leqslant j} q_{r,j,v} f_v$, где $q_{r,j,v} \in k[X_0, \dots, X_n]$ – однородные многочлены и $\deg q_{r,j,v} = \deg f_j - \deg f_v$ для всех $1 \leqslant v \leqslant j$

(так что в случае базы рекурсии $r = 0$ дана гладкая точка $x \in W$, и мы полагаем $f_{0,j} = f_j$ для всякого $1 \leqslant j \leqslant s$). Наша цель – построить многочлен g_{r+1} и однородные многочлены $f_{r+1,r+2}, \dots, f_{r+1,s}$, такие что свойства (a)–(d) удовлетворяются, если заменить r на $r+1$ (может быть, с другой точкой x).

Пусть $L = X_i$ для некоторого $0 \leqslant i \leqslant n$ и $L(x) \neq 0$. Сделав при необходимости перестановку координат, мы будем предполагать без ограничения общности, что $L = X_0$.

Положим $\psi_i = g_i / X_0^{\deg g_i}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, и $\rho_j = f_{r,j} / X_0^{\deg f_{r,j}}$, $r+1 \leqslant j \leqslant s$. Рассмотрим систему локальных параметров $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ из леммы 1. По условиям (a)–(d) существуют индексы $1 \leqslant i_{r+1} < \dots < i_s \leqslant s$, такие что система

$$\psi_1, \dots, \psi_r, \varphi_{i_{r+1}}, \dots, \varphi_{i_s}$$

является системой локальных параметров W в точке x. Мы будем предполагать без ограничения общности, что $i_j = j$ для всех $r+1 \leqslant j \leqslant s$.

Обозначим через $Z_i = X_i/X_0 - (X_i/X_0)(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, координатные функции аффинного пространства $\mathbb{A}^n(\overline{k}) = \mathbb{P}^n(\overline{k}) \setminus \mathcal{Z}(X_0)$. *В дальнейшем для многочленов $w \in \overline{k}[Z_1, \dots, Z_n]$ (соответственно,*

$w \in \overline{k}[X_0, \dots, X_n]$) степень $\deg w$ является степенью относительно $Z_1, \dots, Z_n$ (соответственно, $X_0, \dots, X_n$).

Итак, $\varphi_i, \psi_j, \rho_w \in \overline{k}[Z_1, \dots, Z_n]$ для всех i, j, w. Выберем индексы $1 \leqslant i_{s+1} < \dots < i_n \leqslant n$, такие что система

$$\psi_1, \dots, \psi_r, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_s, Z_{i_{s+1}}, \dots, Z_{i_n}$$

является системой локальных параметров алгебраического многообразия $\{x\}$, состоящего из одной точки x. Мы будем предполагать, не умаляя общности, что $i_j = j$ при $s+1 \leqslant j \leqslant n$.

Сделав при необходимости перестановку координат $Z_1, \dots, Z_s$, мы будем считать без ограничения общности, что минор матрицы Якоби в точке x ненулевой:

$$\Delta = \det\left((\partial\psi_i/\partial Z_j)(x)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant r} \neq 0. \tag{15}$$

Заметим, что $\Delta \in \overline{k}[Z_1, \dots, Z_n]$ и степень $\deg \Delta$ не превосходит $-r + \deg\psi_1 + \dots + \deg\psi_r$.

Рассмотрим кольцо формальных степенных рядов

$$\overline{k}[[\psi_1, \dots, \psi_r, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_s, Z_{s+1}, \dots, Z_n]] = \Omega_0. \tag{16}$$

Это кольцо совпадает с кольцом формальных степенных рядов от $Z_1, \dots, Z_n$ над $\overline{k}$. Следовательно, оно содержит кольцо $k[X_1/X_0, \dots, X_n/X_0]$. Каждый элемент F кольца (16) может быть представлен в виде

$$F = \sum_{i_1, \dots, i_n \geqslant 0} F_{i_1, \dots, i_n} \psi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \psi_r^{i_r} \varphi_{r+1}^{i_{r+1}} \cdot \ldots \cdot \varphi_s^{i_s} Z_{s+1}^{i_{s+1}} \cdot \ldots \cdot Z_n^{i_n}, \tag{17}$$

где все $F_{i_1, \dots, i_n}$ принадлежат $\overline{k}$. Положим

$$\Omega = \overline{k}[[\psi_1, \dots, \psi_r, Z_{s+1}, \dots, Z_n]] \subset \Omega_0.$$

Дифференцирования $\partial/\partial\psi_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, и $\partial/\partial\varphi_i$, $r+1 \leqslant j \leqslant s$, определены естественным образом на кольце Ω_0. Дифференцирования $\partial/\partial Z_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, определены естественным образом на кольце $\overline{k}[[Z_1, \dots, Z_n]]$. Мы определяем дифференцирования $\partial/\partial Z_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, на Ω_0 при помощи естественного отождествления $\Omega_0 = \overline{k}[[Z_1, \dots, Z_n]]$.

Положим

$$\widetilde{\mathfrak{P}} = (\psi_1, \dots, \psi_r, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_s) \subset \Omega_0,$$
$$\mathfrak{q} = \widetilde{\mathfrak{Q}} = (\psi_1^p, \dots, \psi_r^p, \varphi_{r+1}^p, \dots, \varphi_s^p) \subset \Omega_0,$$
$$\widetilde{\mathfrak{P}}_r = (\psi_1, \dots, \psi_r) \subset \Omega_0,$$

т.е., $\widetilde{\mathfrak{P}}$ (соответственно, $\widetilde{\mathfrak{Q}}$, $\widetilde{\mathfrak{P}}_r$) является идеалом кольца Ω_0, порождённым элементами $\psi_1, \dots, \psi_r$, $\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_s$ (соответственно, $\psi_1^p, \dots, \psi_r^p, \varphi_{r+1}^p, \dots, \varphi_s^p$ или $\psi_1, \dots, \psi_r$).

Пусть $F \in k[X_1/X_0, \dots, X_n/X_0]$. Тогда

$$F \in \widetilde{\mathfrak{P}} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \mathcal{Z}(F) \supset W \setminus \mathcal{Z}(X_0). \qquad (18)$$

Пусть выполняется (17) и $i \geqslant 0$ – целое число. Положим по определению

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}^{(i)} = \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n \,:\, i_1 + \ldots + i_s = i\},\\
&F^{(i)} = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathcal{J}^{(i)}} F_{i_1,\dots,i_n} \psi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \psi_r^{i_r} \varphi_{r+1}^{i_{r+1}} \cdot \ldots \cdot \varphi_s^{i_s} Z_{s+1}^{i_{s+1}} \cdot \ldots \cdot Z_n^{i_n},\\
&\overline{\mathcal{J}} = \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n \,:\, i_1 = \ldots = i_r = 0 \,\&\, i_{r+1}, \dots, i_n \geqslant 0\},\\
&\overline{\mathcal{J}}^{(i)} = \{(i_1, \dots, i_n) \in \overline{\mathcal{J}} \,:\, i_{r+1} + \ldots + i_s = i\},\\
&\overline{F} = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\overline{\mathcal{J}}} F_{i_1,\dots,i_n} \varphi_{r+1}^{i_{r+1}} \cdot \ldots \cdot \varphi_s^{i_s} Z_{s+1}^{i_{s+1}} \cdot \ldots \cdot Z_n^{i_n},\\
&\overline{F}^{(i)} = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\overline{\mathcal{J}}^{(i)}} F_{i_1,\dots,i_n} \varphi_{r+1}^{i_{r+1}} \cdot \ldots \cdot \varphi_s^{i_s} Z_{s+1}^{i_{s+1}} \cdot \ldots \cdot Z_n^{i_n}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\overline{F}$ получается подстановкой 0 вместо $\psi_1, \dots, \psi_r$ в F, и $\overline{F} = \sum_{i\geqslant 0} \overline{F}^{(i)}$, $F = \sum_{i \geqslant 0} F^{(i)}$. Далее, положим

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ord}_{1,n} F = \min\{i_1 + \ldots + i_n \,:\, F_{i_1,\dots,i_n} \neq 0\},\\
&\mathrm{ord}_{1,s} F = \min\{i \,:\, F^{(i)} \neq 0\},\\
&\mathrm{ord}_{1,s,\Omega} F = \min\{i \,:\, F^{(i)} \notin \Omega\},\\
&\mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}} F = \min\{i \,:\, F^{(i)} \notin \mathfrak{q}\},\\
&\mathrm{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}} F = \min\{i \,:\, F^{(i)} \notin \Omega + \mathfrak{q}\},\\
&\mathrm{ord}_{r+1,s} F = \min\{i \,:\, \overline{F}^{(i)} \neq 0\},\\
&\mathrm{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}} F = \min\{i \,:\, \overline{F}^{(i)} \notin \mathfrak{q}\}.
\end{aligned}$$

Заметим здесь, что $\Omega + \mathfrak{q} \subset \Omega_0$ является линейным подпространством. Следовательно, $\mathrm{ord}_{1,n} F$ (соответственно, $\mathrm{ord}_{1,s} F$, $\mathrm{ord}_{1,s,\Omega} F$, $\mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}} F$, $\mathrm{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}} F$, $\mathrm{ord}_{r+1,s} F$, $\mathrm{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}} F$) является неотрицательным целым числом или $+\infty$. Очевидно, что

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ord}_{1,n}F \leqslant \operatorname{ord}_{1,s}F \leqslant \operatorname{ord}_{1,s,\Omega}F \leqslant \operatorname{ord}_{r+1,s}F \leqslant \operatorname{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}F,\\
&\operatorname{ord}_{1,s}F \leqslant \operatorname{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}F \leqslant \operatorname{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}}F \leqslant \operatorname{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}F.
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\operatorname{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}F \neq +\infty \quad \text{влечёт, что} \quad \operatorname{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}F \leqslant (s-r)(p-1), \tag{19}$$

$$\operatorname{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}F \neq +\infty \quad \text{влечёт, что} \quad \operatorname{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}F \leqslant s(p-1), \tag{20}$$

$$\operatorname{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}}F \neq +\infty \quad \text{влечёт, что} \quad \operatorname{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}}F \leqslant s(p-1). \tag{21}$$

Пусть j равно $\operatorname{ord}_{1,s}F$ (соответственно, $\operatorname{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}F$, $\operatorname{ord}_{1,s,\Omega}F$, $\operatorname{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}}F$, $\operatorname{ord}_{r+1,s}F$, $\operatorname{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}F$). Если $j=+\infty$, то, по определению, $F^{(j)}=0$ (соответственно, $F^{(j)}_{\mathfrak{q}}=0$, $F^{(j)}_{\Omega}=0$, $F^{(j)}_{\Omega+\mathfrak{q}}=0$, $\overline{F}^{(j)}=0$, $\overline{F}^{(j)}_{\mathfrak{q}}=0$). Далее, положим

$$\begin{aligned}
F^{*} &= F^{(j_0)}, && \text{где} \quad j_0 = \operatorname{ord}_{1,s}F,\\
F^{*}_{\mathfrak{q}} &= F^{(j_1)}, && \text{где} \quad j_1 = \operatorname{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}F,\\
F^{*}_{\Omega} &= F^{(j_2)}, && \text{где} \quad j_2 = \operatorname{ord}_{1,s,\Omega}F,\\
F^{*}_{\Omega+\mathfrak{q}} &= F^{(j_3)}, && \text{где} \quad j_3 = \operatorname{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}}F,\\
\overline{F}^{*} &= \overline{F}^{(j_4)}, && \text{где} \quad j_4 = \operatorname{ord}_{r+1,s}F,\\
\overline{F}^{*}_{\mathfrak{q}} &= \overline{F}^{(j_5)}, && \text{где} \quad j_5 = \operatorname{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}F.
\end{aligned}$$

Определим также ведущую форму элемента F, см. (17), относительно $\psi_1,\dots,\psi_r$, $\varphi_{r+1},\dots,\varphi_s$, $Z_{s+1},\dots,Z_n$ по формуле

$$\operatorname{lf}(F) = \sum_{i_1+\dots+i_n=\operatorname{ord}_{1,n}F} F_{i_1,\dots,i_n}\psi_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot\psi_r^{i_r}\varphi_{r+1}^{i_{r+1}}\cdot\ldots\cdot\varphi_s^{i_s}Z_{s+1}^{i_{s+1}}\cdot\ldots\cdot Z_n^{i_n}.$$

Положим

$$\mathcal{I} = \{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{Z}^n : 0\leqslant i_1,\dots,i_n<p\}, \tag{22}$$

и для всякого $I=(i_1,\dots,i_n)\in\mathcal{I}$ определим $Z^I = Z_1^{i_1}\cdots Z_n^{i_n}$. Можно представить произвольный элемент $F\in\overline{k}[[Z_1,\dots,Z_n]]$ в виде

$$F = \sum_{I\in\mathcal{I}} F_I Z^I, \tag{23}$$

где все $F_I = F_{(i_1,\dots,i_n)} \in \overline{k}[[Z_1^p,\dots,Z_n^p]]$ однозначно определены. Если $F \in k[Z_1,\dots, Z_n]$, то $F_I \in k[Z_1^p,\dots,Z_n^p]$ и $\deg_{Z_1,\dots,Z_n} F_I \leqslant \deg_{Z_1,\dots,Z_n} F$ для всех $I \in \mathcal{I}$.

Введём операторы $\mathcal{D}_j$, $r+1 \leqslant j \leqslant s$, дифференцирования на кольце (16) при помощи формул

$$\mathcal{D}_j(F) = \det\begin{pmatrix} \partial\psi_1/\partial Z_1 & \dots & \partial\psi_1/\partial Z_r & \partial\psi_1/\partial Z_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial\psi_r/\partial Z_1 & \dots & \partial\psi_r/\partial Z_r & \partial\psi_r/\partial Z_j \\ \partial F/\partial Z_1 & \dots & \partial F/\partial Z_r & \partial F/\partial Z_j \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что если $F \in \widetilde{\mathfrak{P}}$ и $\mathrm{ord}_{r+1,s} F > 1$, то $\mathcal{D}_i(F) \in \widetilde{\mathfrak{P}}$ для всякого $r+1 \leqslant i \leqslant s$. Мы имеем

$$\mathcal{D}_i(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{q}, \quad \mathcal{D}_i(\mathfrak{P}_r) \subset \mathfrak{P}_r, \quad \mathcal{D}_i(\Omega) = \{0\}, \quad r+1 \leqslant i \leqslant s. \tag{24}$$

Если $F \in \overline{k}[Z_1,\dots,Z_n]$, то для степени относительно $Z_1,\dots,Z_n$ верна оценка

$$\deg \mathcal{D}_i(F) \leqslant \deg F + \deg g_1 + \dots + \deg g_r - r - 1. \tag{25}$$

Если $F \in k[X_1/X_0,\dots,X_n/X_0]$, то $\mathcal{D}_i(F) \in k[X_1/X_0,\dots,X_n/X_0]$ для всякого $r+1 \leqslant i \leqslant s$.

Лемма 2. *Пусть $F \in \mathfrak{q}$. Тогда, см.* (23), *также $F_I \in \mathfrak{q}$ для всякого $I \in \mathcal{I}$.*

Доказательство. Представим F в виде $F = \sum_{1\leqslant i\leqslant r} a_i\psi_i^p + \sum_{r+1\leqslant j\leqslant s} b_j\varphi_j^p$, где все a_i, b_j из кольца (16). Согласно (23), мы имеем $a_i = \sum_{I\in\mathcal{I}} a_{i,I}Z^I$, $b_j = \sum_{I\in\mathcal{I}} b_{j,I}Z^I$, где все $a_{i,I}, b_{j,I} \in \overline{k}[[Z_1^p,\dots,Z_n^p]]$. Тогда, очевидно, $F_I = \sum_{1\leqslant i\leqslant r} a_{i,I}\psi_i^p + \sum_{r+1\leqslant j\leqslant s} b_{j,I}\varphi_j^p$ для всякого $I \in \mathcal{I}$. Следовательно, $F_I \in \mathfrak{q}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $F \in \widetilde{\mathfrak{P}} \cap \overline{k}[Z_1,\dots,Z_n]$ и $\nu = \mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}} F < \mathrm{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}} F$. Напомним, что Δ определено согласно* (15). *Положим*

$$\mathcal{I}_\nu = \{(i_1,\dots,i_r) \in \mathbb{Z}^r : 0 \leqslant i_1,\dots,i_r \leqslant p-1 \,\&\, i_1+\dots+i_r = \nu\}.$$

Тогда существуют многочлены $\Delta_{i_1,\dots,i_r} \in \overline{k}[Z_1,\dots,Z_n]$ для всякого $(i_1,\dots, i_r) \in \mathcal{I}_\nu$ и многочлен $\widetilde{F} \in \overline{k}[Z_1,\dots,Z_n]$ такие, что

$$\Delta^\nu F = \widetilde{F} + \sum_{(i_1,\dots,i_r)\in\mathcal{I}_\nu} \Delta_{i_1,\dots,i_r}\psi_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot\psi_r^{i_r}, \tag{26}$$

где при всех $(i_1, \dots, i_r) \in \mathcal{I}_\nu$ *для степени относительно* $Z_1, \dots, Z_n$ *верна оценка*

$$\deg(\Delta_{i_1,\dots,i_r}\psi_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot\psi_r^{i_r}) \leqslant \\ \deg(F) + \nu(-r + \deg\psi_1 + \ldots + \deg\psi_r), \quad (27)$$

и

$$\operatorname{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}\widetilde{F} > \operatorname{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}F, \quad \operatorname{ord}_{r+1,s}\widetilde{F} = \operatorname{ord}_{r+1,s}F. \quad (28)$$

Доказательство. Мы имеем

$$F_{\mathfrak{q}}^* = \sum_{(i_1,\dots,i_r)\in\mathcal{I}_\nu} \alpha_{i_1,\dots,i_r}\psi_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot\psi_r^{i_r} + Q,$$

где все $\alpha_{i_1,\dots,i_r} \in \overline{k}[[Z_{s+1}, \dots, Z_n]]$ и $Q \in \mathfrak{q}$. Покажем, что для всякого $(i_1, \dots, i_r) \in \mathcal{I}_\nu$ существуют многочлен $\Delta_{i_1,\dots,i_r} \in \overline{k}[Z_1, \dots, Z_n]$ и элемент $\widetilde{\alpha}_{i_1,\dots,i_r} \in \overline{k}[[Z_{s+1}, \dots, Z_n]]$, такие что

$$\Delta^\nu\alpha_{i_1,\dots,i_r} = \Delta_{i_1,\dots,i_r} + \widetilde{\alpha}_{i_1,\dots,i_r}, \quad (29)$$

$$\operatorname{ord}_{1,s}\widetilde{\alpha}_{i_1,\dots,i_r} > 0 \quad (30)$$

и выполняется (27). Очевидно, отсюда следует утверждение леммы.

Мы будем предполагать без ограничения общности, что $i_1 > 0$ и $\operatorname{ord}_{1,s}\alpha_{i_1,\dots,i_r} = 0$. Теперь

$$\frac{\partial F}{\partial Z_j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant r} \frac{\partial F}{\partial\psi_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial Z_j} + Q_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant r,$$

где $Q_j \in \overline{k}[[Z_1, \dots, Z_n]]$ и $\operatorname{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}Q_j \geqslant \operatorname{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}F$. Следовательно, по правилу Крамера

$$\Delta\frac{\partial F}{\partial\psi_1} = \sum_{1\leqslant j\leqslant r} \Delta_{1,j}\frac{\partial F}{\partial Z_j} + Q', \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \quad (31)$$

где $\Delta_{1,j} \in \overline{k}[Z_1, \dots, Z_n]$, $1 \leqslant j \leqslant r$; $Q' \in \overline{k}[[Z_1, \dots, Z_n]]$; $\operatorname{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}Q' \geqslant \operatorname{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}F$ и

$$\deg\Big(\Delta_{1,j}\,\frac{\partial F}{\partial Z_j}\Big) \leqslant -r + \deg(F) + \sum_{2\leqslant i\leqslant r}\deg\psi_i \quad (32)$$

для всякого $1 \leqslant j \leqslant r$. Положим $H = \sum_{1\leqslant j\leqslant r}(\Delta_{1,j}\partial F/\partial Z_j)$. Теперь

$$\nu - 1 = \mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}} H < \mathrm{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}} H$$

согласно (31) и поскольку $\mathrm{ord}_{1,s}\alpha_{i_1,\dots,i_n} = 0$. Далее,

$$H^*_{\mathfrak{q}} = \Delta(x) \sum_{(i_1,\dots,i_r)\in\mathcal{I}_\nu,\, i_1>0} i_1\alpha_{i_1,\dots,i_r}\psi_1^{i_1-1}\psi_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot\psi_r^{i_r} + Q'', \qquad (33)$$

где $Q'' \in \overline{k}[[Z_1,\dots,Z_n]]$ и $\mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}Q'' \geqslant \mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}F$. Если $\nu = 1$, то из (33) и (32) следуют (29) и (30). Если $\nu > 1$, то мы используем индукцию по ν. Применяя индукционное предположение для H, мы получаем

$$\Delta^{\nu-1}(\Delta i_1\alpha_{i_1,\dots,i_r}) = \Delta'_{i_1-1,i_2,\dots,i_r} + \alpha'_{i_1-1,i_2\dots,i_r},$$

где $\mathrm{ord}_{1,s}\alpha'_{i_1-1,i_2\dots,i_r} > 0$ и, согласно (27) (с $\nu-1$ вместо ν),

$$\begin{aligned}
&\deg(\Delta'_{i_1-1,i_2,\dots,i_r}\psi_1^{i_1-1}\psi_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot\psi_r^{i_r}) \leqslant\\
&\deg(H) + (\nu-1)(-r + \deg\psi_1 + \ldots + \deg\psi_r) \leqslant\\
&\deg(F) - \deg\psi_1 + \nu(-r + \deg\psi_1 + \ldots + \deg\psi_r).
\end{aligned}$$

Положим $\Delta_{i_1,\dots i_r} = i_1^{-1}\Delta'_{i_1-1,i_2,\dots,i_r}$. Тогда выполняются соотношения (29), (30). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $0 \neq F \in \widetilde{\mathfrak{P}}$ *и*

$$0 < \nu = \mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}F = \mathrm{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}}F < \mathrm{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}F.$$

Тогда существует целое число $1 \leqslant j \leqslant r$, *такое что*

$$\mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}\Big(\frac{\partial F}{\partial Z_j}\Big) = \mathrm{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}}\Big(\frac{\partial F}{\partial Z_j}\Big) = \nu - 1, \qquad (34)$$

где $\partial/\partial Z_j$ *является дифференцированием кольца* $k[[Z_1,\dots,Z_n]] = \Omega_0$.

Доказательство. Существует $(i_1,\dots,i_n) \in \mathcal{I}$, см. (22), такое что $F_{i_1,\dots,i_n} \neq 0$, $i_1+\ldots+i_s = \nu$, $i_1+\ldots+i_r < \nu$ и сумма $i_1+\ldots+i_r = \nu_1$ максимально возможная. Тогда $\nu_1 > 0$, поскольку $\mathrm{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}}F < \mathrm{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}F$. Для всех целых чисел $a \geqslant b \geqslant 0$ положим

$$J_{a,b} = \{(i_1,\dots,i_n) \in \mathbb{Z}^n : i_1+\ldots+i_s = a \,\&\, i_1+\ldots+i_r = b\},$$

$$Q = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in J_{\nu,\nu_1}} F_{i_1,\dots,i_n}\psi_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot\psi_r^{i_r}\varphi_{r+1}^{i_{r+1}}\cdot\ldots\cdot\varphi_s^{i_s}Z_{s+1}^{i_{s+1}}\cdot\ldots\cdot Z_n^{i_n}.$$

Представим $\frac{\partial Q}{\partial Z_j}$ в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial Z_j} = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{Z}^n} Q_{j,i_1,\dots,i_n}\psi_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot\psi_r^{i_r}\varphi_{r+1}^{i_{r+1}}\cdot\ldots\cdot\varphi_s^{i_s}Z_{s+1}^{i_{s+1}}\cdot\ldots\cdot Z_n^{i_n},$$

где все коэффициенты $Q_{j,i_1,\dots,i_n}\in\overline{k}$. Мы имеем $\mathrm{ord}_{1,s}(\partial F^{(i)}/\partial Z_j)\geqslant i-1$ для всякого $i\geqslant 1$ и $1\leqslant j\leqslant r$, и

$$\Big(\frac{\partial}{\partial Z_j}\Big)(\mathfrak{q})\subset\mathfrak{q} \tag{35}$$

для всякого $1\leqslant j\leqslant r$. Следовательно, для всякого $(i_1,\dots,i_n)\in J_{\nu-1,\nu_1-1}$ коэффициент производной $\partial F/\partial Z_j$ при $\psi_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot\psi_r^{i_r}\varphi_{r+1}^{i_{r+1}}\cdot\ldots\cdot\varphi_s^{i_s}Z_{s+1}^{i_{s+1}}\cdot\ldots\cdot Z_n^{i_n}$ равен $Q_{j,i_1,\dots,i_n}$. Поэтому достаточно доказать, что $Q_{j,i_1,\dots,i_n}\neq 0$ для некоторого $1\leqslant j\leqslant r$ и $(i_1,\dots,i_n)\in J_{\nu-1,\nu_1-1}$.

Напомним, что $\partial/\partial\psi_i$, $1\leqslant i\leqslant r$, является естественным дифференцированием кольца Ω_0. Существует $1\leqslant i\leqslant r$, такое что $\partial Q/\partial\psi_i\neq 0$. Положим

$$\begin{aligned}&\mu=\min\{\mathrm{ord}_{1,n}(\partial Q/\partial\psi_i)\,:\,1\leqslant i\leqslant r\},\\&I=\{i\,:\,\mathrm{ord}_{1,n}(\partial Q/\partial\psi_i)=\mu\,\&\,1\leqslant i\leqslant r\},\\&I_j=\{i\,:\,(\partial\psi_i/\partial Z_j)(x)\neq 0\,\&\,1\leqslant i\leqslant r\},\quad 1\leqslant j\leqslant r.\end{aligned}$$

Мы имеем:

$$\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in J_{\nu-1,\nu_1-1}} Q_{j,i_1,\dots,i_n}\psi_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot\psi_r^{i_r}\varphi_{r+1}^{i_{r+1}}\cdot\ldots\cdot\varphi_s^{i_s}Z_{s+1}^{i_{s+1}}\cdot\ldots\cdot Z_n^{i_n}=$$
$$\sum_{i\in I_j}\frac{\partial Q}{\partial\psi_i}\Big(\frac{\partial\psi_i}{\partial Z_j}\Big)^*. \tag{36}$$

Далее,

$$\mathrm{lf}\Big(\sum_{i\in I_j}\frac{\partial Q}{\partial\psi_i}\Big(\frac{\partial\psi_i}{\partial Z_j}\Big)^*\Big)=\sum_{i\in I}\mathrm{lf}\Big(\frac{\partial Q}{\partial\psi_i}\Big)\Big(\frac{\partial\psi_i}{\partial Z_j}\Big)(x). \tag{37}$$

Согласно (15) существует $1\leqslant j\leqslant r$, такое что сумма в правой части (37) – ненулевая. Тогда согласно (37) сумма в правой части (36) – ненулевая. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $F \in \widetilde{\mathfrak{P}}$ *и* $\mathrm{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}} F < +\infty$. *Тогда существует* i, $r+1 \leqslant i \leqslant s$, *такое что*

$$\mathrm{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}(\mathcal{D}_i(F)) = \mathrm{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}(F) - 1. \tag{38}$$

Доказательство. Напомним, что $\partial/\partial\varphi_j$, $r+1 \leqslant j \leqslant s$, является естественным дифференцированием кольца (16). Положим $\nu_0 = \mathrm{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}} F$. Поскольку $\nu_0 < +\infty$, то существует $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}^{(\nu_0)}$, такое что коэффициент $F_{i_1,\ldots,i_n}$ отличен от нуля, см. (17). Следовательно, существует j_0, $r+1 \leqslant j_0 \leqslant s$, такое что $\partial\overline{F}^*/\partial\varphi_{j_0} \neq 0$.

Учитывая определение операторов $\mathcal{D}_i$, (15) и тот факт, что любая линейная комбинация элементов $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_s$ (с по крайней мере одним ненулевым коэффициентом) является локальным параметром в точке x, убеждаемся, что векторы

$$(\mathcal{D}_{r+1}(\varphi_i)(x), \ldots, \mathcal{D}_s(\varphi_i)(x)) \in (\overline{k})^{s-r}, \quad r+1 \leqslant i \leqslant s,$$

линейно независимы над $\overline{k}$.

Положим $\nu_1 = \min\{\mathrm{ord}_{1,n}(\,\partial\overline{F}^*_{\mathfrak{q}}/\partial\varphi_j\,) \colon r+1 \leqslant j \leqslant s\}$ и

$$J = \{j \colon \mathrm{ord}_{1,n}(\,\partial\overline{F}^*_{\mathfrak{q}}/\partial\varphi_j\,) = \nu_1 \,\&\, r+1 \leqslant j \leqslant s\}.$$

Тогда существует i, $r+1 \leqslant i \leqslant s$, такое что

$$\sum_{j \in J} \mathrm{lf}\Big(\frac{\partial\overline{F}^*_{\mathfrak{q}}}{\partial\varphi_j}\Big)\, \mathcal{D}_i(\varphi_j)(x) \neq 0.$$

Положим

$$J' = \{j \,:\, \mathcal{D}_i(\varphi_j)(x) \neq 0 \,\&\, r+1 \leqslant j \leqslant s\}.$$

Но в этом случае

$$\sum_{j \in J} \mathrm{lf}\Big(\frac{\partial\overline{F}^*_{\mathfrak{q}}}{\partial\varphi_j}\Big)\, \mathcal{D}_i(\varphi_j)(x) = \mathrm{lf}\Big(\sum_{j \in J'} \frac{\partial\overline{F}^*_{\mathfrak{q}}}{\partial\varphi_j}\, \overline{\mathcal{D}_i(\varphi_j)}^*\Big) \neq 0.$$

Поэтому также $\sum_{j \in J'}(\partial\overline{F}^*_{\mathfrak{q}}/\partial\varphi_j)\,\overline{\mathcal{D}_i(\varphi_j)}^* \neq 0$. Отсюда вытекает, что

$$\overline{(\mathcal{D}_i(F))}^*_{\mathfrak{q}} = \sum_{j \in J'} \frac{\partial\overline{F}^*_{\mathfrak{q}}}{\partial\varphi_j}\, \overline{\mathcal{D}_i(\varphi_j)}^*.$$

Следовательно, справедливо (38). Лемма доказана.

Определим δ как наименьшее целое число, такое что

$$\delta \geqslant \frac{\deg g_1 \cdot \ldots \cdot \deg g_r \deg f_{r+1} \cdot \ldots \cdot \deg f_s}{\deg W}.$$

Следующая лемма аналогична лемме 18 раздела 10 из [2]. Всё же из-за её важности мы повторяем доказательство.

Лемма 6. *Справедливо неравенство* $\mathrm{ord}_{r+1,s}\rho_{r+1} \leqslant \delta$.

Доказательство. Предположим противное. Обозначим через $\psi_{i,1}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $\varphi_{j,1}$, $r+1 \leqslant j \leqslant s$ формы наименьшей степени (или, что то же самое, ненулевые однородные относительно $Z_1, \ldots, Z_n$ компоненты наименьшей степени) в кольце $\overline{k}[Z_1, \ldots, Z_n]$ многочленов ψ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, φ_j, $r+1 \leqslant j \leqslant s$ соответственно.

По лемме 16 [2] (она справедлива в произвольной характеристике) и (13), (14) для всякого $r+1 \leqslant j \leqslant s$ существуют многочлены q, $h_1, \ldots, h_s \in \overline{k}[Z_1, \ldots, Z_n]$, такие что

$$h_1\psi_1 + \ldots + h_r\psi_r + h_{r+1}\rho_{r+1} + \ldots + h_s\rho_s = q\varphi_j^{\delta}$$

и многочлен q не обращается в нуль тождественно на $V \setminus \mathcal{Z}(X_0)$. Заменяя, если необходимо, точку x на точку $x_1 \in V$ из достаточно малой окрестности в топологии Зарисского точки x (это сводится к линейному автоморфизму $X_i \mapsto X_i + \lambda_i X_0$, $\lambda_i \in \overline{k}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, многообразия $\mathbb{P}^n(\overline{k})$), мы можем предполагать без ограничения общности, что $q(x) \neq 0$. Так что q является обратимым элементом кольца формальных степенных рядов (16). Следовательно, существуют многочлены $\widetilde{h}_i \in \overline{k}[Z_1, \ldots, Z_n]$, которые являются аппроксимациями элементов h_i/q из кольца (16), такие что

$$\widetilde{h}_1\psi_1 + \ldots + \widetilde{h}_r\psi_r + \widetilde{h}_{r+1}\rho_{r+1} + \ldots + \widetilde{h}_s\rho_s = \Phi_j$$

где $\Phi_j \in \overline{k}[Z_1, \ldots, Z_n]$ – многочлен с формой наименьшей степени в кольце (16), равной φ_j^{δ}. Следовательно, форма наименьшей степени многочлена Φ_j в кольце $\overline{k}[Z_1, \ldots, Z_n]$ есть $\varphi_{j,1}^{\delta}$.

По нашему предположению и (18), применённому к $F = \rho_{r+1}$, все однородные компоненты степени меньшей, чем $\delta+1$, произведения $\widetilde{h}_{r+1}\rho_{r+1}$ принадлежит идеалу $\mathfrak{P}_r$, см. выше. Следовательно, мы можем предполагать без ограничения общности, что $\widetilde{h}_{r+1} = 0$.

Поэтому линейные формы $\psi_{i,1}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $\varphi_{j,1}$, $r+1 \leqslant j \leqslant s$ принадлежат радикалу идеала, порождённого формами наименьшей степени элементов идеала

$$(\psi_1, \ldots, \psi_r, \rho_{r+2}, \ldots, \rho_s) \subset \overline{k}[Z_1, \ldots, Z_n].$$

Но этот радикал, по определению, является идеалом касательного конуса алгебраического многообразия $W = \mathcal{Z}(\psi_1, \ldots, \psi_r, \rho_{r+2}, \ldots, \rho_s)$ в точке x. Обозначим этот касательный конус через $\mathrm{con}(x, W)$. Известно, что $\dim \mathrm{con}(x, W) = \dim_x W$, где $\dim_x W$ – максимум размерностей неприводимых компонент W, содержащих точку x (непосредственное доказательство этого факта можно найти в [5]).

В силу условий (a)–(d), $\dim_x W = n - s + 1$. С другой стороны, существуют s линейно независимых линейных форм из идеала многообразия $\mathrm{con}(x, W)$. Следовательно, $\dim \mathrm{con}(x, W) \leqslant n - s < \dim_x W$. Полученное противоречие доказывает лемму.

2. Описание основной рекурсии

Положим $\rho = \rho_{r+1}$. Теперь мы готовы описать новую рекурсию по ρ. В конце этой рекурсии при помощи полученного элемента ρ мы построим g_{r+1} и однородные многочлены $f_{r+1,r+2}, \ldots, f_{r+1,s}$, см. раздел 1. База этой рекурсии есть $\rho = \rho_{r+1}$. Рекурсия начинается с первого шага. В начале каждого шага $\mathrm{ord}_{r+1,s}\rho > 1$ и $\mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho) < +\infty$. В конце рекурсии мы получаем элемент ρ, такой что $\mathrm{ord}_{r+1,s}\rho = 1$ (если $\mathrm{ord}_{r+1,s}\rho_{r+1} = 1$, то этой рекурсии не требуется).

Опишем общий шаг этой рекурсии. Очевидно, выполняется один и только один из следующих случаев:

1) $\mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}(\rho) = +\infty$,
2) $\mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}(\rho) < \mathrm{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}}(\rho) \leqslant \mathrm{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}(\rho) = +\infty$,
3) $\mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}(\rho) = \mathrm{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}}(\rho) < \mathrm{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}(\rho) = +\infty$,
4) $\mathrm{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}(\rho) < +\infty$.

Если справедливо 1) *(соответственно,* 2), 3), 4)*) в начале рекурсивного шага, то мы будем говорить для краткости, что – это шаг типа* 1) *(соответственно,* 2), 3), 4)*).*

Предположим, что выполнено 1). Тогда $\rho \in \mathfrak{q}$. Представим его в виде $\rho = \sum_{I \in \mathcal{I}} \rho_I Z^I$, где все $\rho_I \in \overline{k}[Z_1^p, \ldots, Z_n^p]$. Тогда, согласно лемме 2, все $\rho_I \in \mathfrak{q}$. Следовательно, $\rho_I^{1/p} \in \overline{k}[Z_1, \ldots, Z_n] \cap \widetilde{\mathfrak{P}}$, поскольку $\widetilde{\mathfrak{P}}$ – простой идеал. Существует $I_0 \in \mathcal{I}$, такое что $\mathrm{ord}_{r+1,s}\rho_{I_0} \leqslant \mathrm{ord}_{r+1,s}\rho$. Положим $\rho' = \rho_{I_0}^{1/p}$. Теперь

$$0 < \mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho') \leqslant \Big(\frac{1}{p}\Big)\mathrm{ord}_{r+1,s}\rho,$$
$$\deg\rho' \leqslant \Big(\frac{1}{p}\Big)\deg\rho. \tag{39}$$

Если $\mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho') = 1$, то этот шаг является заключительным. Мы заменяем ρ на ρ'. Если $\mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho') > 1$, то мы переходим к следующему шагу рекурсии.

Предположим, что выполнено 2). Тогда положим $F = \rho$ в утверждении леммы 3. Применяя эту лемму, мы получаем многочлен $\widetilde{F}$. Положим $\rho' = \widetilde{F}$. Тогда

$$\mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}\rho' > \mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}\rho, \quad \mathrm{ord}_{r+1,s}\rho' = \mathrm{ord}_{r+1,s}\rho \tag{40}$$

и, согласно (26) и (27), справедливо неравенство

$$\deg\rho' \leqslant \deg(F) + \mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}(\rho)(-r + \deg\psi_1 + \ldots + \deg\psi_r). \tag{41}$$

Мы заменяем ρ на ρ' и переходим к следующему шагу рекурсии.

Предположим, что выполнено 3). Тогда мы полагаем $F = \rho$ в утверждении леммы 4. Применяя эту лемму, мы получаем индекс $1 \leqslant j \leqslant r$, такой что выполняется (34). Положим $\rho' = \partial F/\partial Z_j$. Тогда, согласно (34),

$$\deg\rho' \leqslant -1 + \deg\rho, \quad \mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}\rho' = -1 + \mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}\rho, \tag{42}$$
$$\mathrm{ord}_{1,s,\mathfrak{q}}(\rho') = \mathrm{ord}_{1,s,\Omega+\mathfrak{q}}(\rho'). \tag{43}$$

Если $\mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho') = 1$, то этот шаг является заключительным. Мы заменяем ρ на ρ'. Если $\mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho') > 1$, то мы переходим к следующему шагу рекурсии. Заметим, что сейчас на следующем шаге выполняется 3) или 4).

Предположим, что выполнено 4). Тогда мы полагаем $F = \rho$ в утверждении леммы 5. Применяя эту лемму, мы получаем индекс $1 \leqslant i \leqslant r$, такой что справедливо (38). Положим $\rho' = \mathcal{D}_i(F)$. Тогда, согласно (34),

$$\mathrm{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}(\rho') = \mathrm{ord}_{r+1,s,\mathfrak{q}}(\rho') - 1, \tag{44}$$

$$\deg(\rho') \leqslant \deg(F) + \deg(\psi_1) + \ldots + \deg(\psi_r) - r - 1. \tag{45}$$

Если $\mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho') = 1$, то этот шаг является заключительным. Мы заменяем ρ на ρ'. Если $\mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho') > 1$, то мы переходим к следующему шагу рекурсии. Заметим, что сейчас на следующем шаге снова выполняется 4).

Рекурсия описана полностью. В следующей лемме мы показываем, что она завершается после конечного числа шагов. Заметим, что для всякого шага рекурсии, если $\rho \in k[X_1/X_0, \dots, X_n/X_0]$ в начале шага, то $\rho' \in k[X_1/X_0, \dots, X_n/X_0]$ в конце этого шага (для шага типа 1) это следует из того, что поле k является совершенным). Мы имеем $\rho_{r+1} \in k[X_1/X_0, \dots, X_n/X_0]$. Следовательно, в конце рекурсии $\rho \in k[X_1/X_0, \dots, X_n/X_0]$.

Замечание 2. Аналог условия 4) для нулевой характеристики есть $\mathrm{ord}_{r+1,s}\rho < +\infty$. Только этот случай используется в конструкции из [2, раздел 10]. Таким образом, по сравнению с нулевой характеристикой нам требуется рассмотреть ещё три случая в рекурсии.

Лемма 7. *Описанная рекурсия завершается после конечного числа шагов. В конце рекурсии* $\mathrm{ord}_{1,s}(\rho) = \mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho) = 1$, *и, если* $\delta < p$, *то*

$$\deg \rho \leqslant \deg(\rho_{r+1}) + (\delta - 1)(-r - 1 + \deg \psi_1 + \dots + \deg \psi_r) \tag{46}$$

и для произвольного δ

$$\deg \rho \leqslant \frac{\deg(\rho_{r+1})}{p^{\mu_1}} + \\ \Big((s-r)(p-1) + \frac{1-p^{1-\mu}}{1-p^{-1}}\lambda\Big)(-r + \deg \psi_1 + \dots + \deg \psi_r), \tag{47}$$

где μ, μ_1 *– целые числа, причём*

$$1 \leqslant \mu \leqslant 1 + (\log \delta / \log p), \tag{48}$$

$$\mu_1 = \max\{\mu - 2, 0\}, \tag{49}$$

и

$$\lambda = 1 + 2 + \dots + s(p-1) = s(p-1)(s(p-1)+1)/2 \leqslant s^2p^2/2.$$

Доказательство. Покажем, что существуют целое число $\mu \geqslant 1$, две конечные последовательности целых чисел $a_{2,i}, a_{1,i}$, $1 \leqslant i \leqslant \mu - 1$ (эти последовательности пусты, если $\mu = 1$), и целые числа $a_{3,\mu}, a_{4,\mu+1}$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $a_{2,i} > 0$ для всех $2 \leqslant i \leqslant \mu - 1$ и, если $\mu \geqslant 2$, то $a_{2,1} \geqslant 0$;

(ii) $a_{1,i} > 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant \mu - 2$ и, если $\mu \geqslant 2$, то $a_{1,\mu-1} \geqslant 0$;

(iii) $a_{3,\mu} \geqslant 0$;

(iv) $a_{4,\mu+1} \geqslant 0$;

(v) в описанной рекурсии шаг j (напомним, что $j \geqslant 1$) имеет тип 2) тогда и только тогда, когда существует ν, $0 \leqslant \nu \leqslant \mu - 2$, такое что

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant \nu} (a_{2,i} + a_{1,i}) < j \leqslant a_{2,\nu+1} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant \nu} (a_{2,i} + a_{1,i});$$

(vi) в описанной рекурсии шаг j имеет тип 1) тогда и только тогда, когда существует ν, $0 \leqslant \nu \leqslant \mu - 2$, такое что

$$a_{2,\nu+1} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant \nu} (a_{2,i} + a_{1,i}) < j \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant \nu+1} (a_{2,i} + a_{1,i});$$

(vii) в описанной рекурсии шаг j имеет тип 3) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant \mu-1} (a_{2,i} + a_{1,i}) < j \leqslant a_{3,\mu} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant \mu-1} (a_{2,i} + a_{1,i});$$

(viii) наконец, в описанной рекурсии шаг j имеет тип 4) тогда и только тогда, когда

$$a_{3,\mu} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant \mu-1} (a_{2,i} + a_{1,i}) < j \leqslant a_{4,\mu+1} + a_{3,\mu} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant \mu-1} (a_{2,i} + a_{1,i}).$$

Действительно, предположим, что шаг типа 3) (соответственно, 4)) не является заключительным. Тогда, как мы заметили выше, следующий шаг имеет тип 3) или 4) (соответственно, 4)). Поэтому, согласно (21) и (42), (соответственно, (19) и (44)) может быть только конечное число шагов типа 3) (соответственно, 4)). Так что теперь, говоря менее формально, нам требуется доказать, что в описанной рекурсии после конечного неотрицательного числа итераций с шагами типа 1) и 2) мы придём к шагу типа 3) или 4), или к концу рекурсии.

Согласно (20) и (40), может быть только конечное число последовательных шагов типа 2). После каждого шага типа 2) (соответственно, 1)) мы имеем $\mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho') \leqslant \mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho)$ (соответственно, $\mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho') \leqslant p^{-1}\mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho)$) по (40) (соответственно, (24)). Целое число $\mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho)$ больше единицы в начале любого шага. Следовательно, в описанной рекурсии может быть только конечное число последовательных шагов типов 2) или 1). Таким образом, существование целого числа $\mu \geqslant 1$, двух конечных последовательностей целых чисел $a_{2,i}, a_{1,i}$, $1 \leqslant i \leqslant \mu - 1$, и целых чисел $a_{3,\mu}$, $a_{4,\mu+1}$, удовлетворяющих свойствам (i)–(viii), доказано. Согласно (39)–(45), если $\delta < p$, то рекурсия состоит только из шагов типа 4), т.е., в этом случае $\mu = 1$ и $a_{3,\mu} = 0$.

Пусть δ – произвольное. Напомним, что $\mathrm{ord}_{r+1,s}\rho_{r+1} \leqslant \delta$ согласно лемме 6. Следовательно, по (40) и (24) выполняется неравенство $\delta/p^{\mu-1} \geqslant 1$. Поэтому справедливо (48). Далее по (20) и (40) мы имеем $a_{2,i} \leqslant s(p-1)$ при $1 \leqslant i \leqslant \mu - 1$. Напомним, что $a_{1,i} \geqslant 1$ при $1 \leqslant i \leqslant \mu - 2$. Следовательно, согласно (39), (40), (41), после первых $\sum_{1\leqslant i\leqslant \mu-1}(a_{2,i} + a_{1,i})$ шагов рекурсии для полученного элемента ρ мы имеем оценку

$$\deg \rho \leqslant \frac{\deg(\rho_{r+1})}{p^{\mu_1}} + \Big(\frac{1-p^{1-\mu}}{1-p^{-1}}\Big)\lambda(-r + \deg\psi_1 + \ldots + \deg\psi_r). \quad (50)$$

Согласно (22), та же самая оценка (50) имеет место после первых $a_{3,\mu} + \sum_{1\leqslant i\leqslant \mu-1}(a_{2,i} + a_{1,i})$ шагов. Согласно (19), мы имеем $a_{4,\mu+1} \leqslant (s-r)p$. В заключение, согласно (44), (45) и (50), в конце рекурсии справедлива оценка (47).

Предположим, что $\delta < p$. Тогда рекурсия состоит только из шагов типа 4), см. выше. Следовательно, по (44), (45) в конце рекурсии выполняется (46). Лемма доказана.

Пусть $\rho \in \overline{k}[Z_1, \ldots, Z_n]$ – многочлен, полученный в конце рекурсии. Сейчас наша цель – построить g_{r+1} и многочлены $f_{r+1,r+2}, \ldots, f_{r+1,s}$, т.е., описать рекурсию из раздела 1. Как мы видели, $\rho \in k[X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0] \cap \widetilde{\mathfrak{P}}$. Поэтому, согласно (18), элемент ρ обращается в нуль тождественно на $W \setminus \mathcal{Z}(X_0)$. Мы имеем $\mathrm{ord}_{r+1,s}\rho = 1$. Следовательно, по лемме 5 существует i, $1 \leqslant i \leqslant r$, такое что

$$\mathrm{ord}_{r+1,s}\mathcal{D}_i(\rho) = 0. \quad (51)$$

Теперь из (18) следует, что $\mathcal{D}_i(\rho)$ не обращается в нуль тождественно на $W\setminus\mathcal{Z}(X_0)$. Поэтому согласно (51) существует непустое открытое в топологии Зарисского подмножество $S \subset W$, такое что всякая точка $y \in S$ является гладкой точкой многообразия W и дифференциалы в точке y

$$d_y\psi_1, \ldots, d_y\psi_r, d_y\rho$$

линейно независимы над $\overline{k}$.

Положим $d_{r+1} = \deg(\rho)$ и

$$g_{r+1} = \rho X_0^{d_{r+1}}. \tag{52}$$

Тогда $g_{r+1} \in k[X_0, \dots, X_n]$ является однородным многочленом. Далее, для всякого $y \in S$ точка y является гладкой точкой на алгебраическом многообразии $\mathcal{Z}(g_1, \dots, g_{r+1})$ и $\dim_y \mathcal{Z}(g_1, \dots, g_{r+1}) = n - r - 1$.

Напомним определение из [2], раздел 2.

Определение 4. *Пусть j, $0 < j \leqslant s$, – целое число. Рассмотрим последовательность однородных многочленов $\theta_i \in \mathfrak{P}$, $1 \leqslant i \leqslant j$. Пусть u, $0 \leqslant u < j$, – целое число. Обозначим, как и выше, через $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathfrak{P}, u)$ множество всех неприводимых компонент E, определённых над k, алгебраического многообразия $\mathcal{Z}(\theta_1, \dots, \theta_u)$, таких что $E \supset W$. Предположим, что для всякого целого числа u, $0 \leqslant u < j$, многочлен $\theta_{u+1} \in \mathfrak{P}$ является таким, что для всякой неприводимой компоненты $E \in \mathcal{W}$ алгебраическое многообразие удовлетворяет условию*

$$E \not\subset \mathcal{Z}(\theta_{u+1})$$

и, если $u \geqslant 1$, то $\deg \theta_{u+1} \geqslant \deg \theta_u$. Тогда всякую такую последовательность $\theta_1, \dots, \theta_j$ мы будем называть слабой $\mathfrak{P}$-последовательностью (длины j).

Заметим, что всякая $\mathfrak{P}$-последовательность является слабой $\mathfrak{P}$-последовательностью.

Существуют две слабые $\mathfrak{P}$–последовательности $\theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,s}$ и $\theta_{2,1}, \dots, \theta_{2,s}$, такие что

- многочлены $\theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,r+1}$ совпадают с $g_1, \dots, g_{r+1}$ с точностью до перестановки,
- $\theta_{2,i} = \eta f_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, для некоторого однородного полинома η, который не обращается в нуль тождественно на W,
- $\deg \theta_{1,i} \leqslant \deg \eta$ для всех $1 \leqslant i \leqslant r+1$,
- $\deg \theta_{1,i} > \deg \theta_{2,s}$ для всех $r+2 \leqslant i \leqslant s$.

Применим лемму 1 из [2] к этим $\mathfrak{P}$-последовательностям. Мы получаем третью $\mathfrak{P}$-последовательность $\theta_{3,1}, \dots, \theta_{3,s}$. Напомним, что согласно лемме 1 из [2] для всякого j, $1 \leqslant j \leqslant s$, элемент $\theta_{3,j}$ принадлежит объединению идеалов $(\theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,s}) \cup$

$(\theta_{2,1},\ldots,\theta_{2,s}) \subset k[X_0,\ldots,X_n]$, и степень $\deg\theta_{3,j} = \min\{\deg\theta_{1,j}, \deg\theta_{2,j}\}$. Поэтому $\theta_{3,j} \in (\theta_{2,1},\ldots,\theta_{2,s})$, и η делит $\theta_{3,j}$ для всякого j, $r+1 \leqslant j \leqslant s$.

Положим $f_{r+1,j} = \theta_{3,j}/\eta$, $r+2 \leqslant j \leqslant s$. Заменим в условиях (a)–(d) r на $r+1$ и точку x на точку y. Тогда по лемме 1 из [2] существует точка $y \in S$, такая что выполняются условия (a)–(d) для построенных однородных многочленов $g_1,\ldots,g_{r+1},f_{r+1,r+2},\ldots,f_{r+1,s}$ в точке y. Этим завершается описание рекурсивного шага и всей рекурсии из раздела 1.

Таким образом, в заключение мы построим систему локальных параметров $\psi_1,\ldots,\psi_s$ алгебраического многообразия W в некоторой точке $x \in W$.

Лемма 8. *Существует константа $0 \leqslant C \in \mathbb{R}$ и существуют $e_j \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant s$, такие что выполняются неравенства*

$$\deg g_j \leqslant e_j \deg f_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant s, \tag{53}$$

$$e_j \leqslant n^{2^{s^C}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant s. \tag{54}$$

Доказательство. Предположим, что неравенства (53) справедливы для всех $1 \leqslant j \leqslant r$, где $0 \leqslant r < s$. Тогда по теореме 1 из [2] и лемме 6 мы имеем

$$\mathrm{ord}_{r+1,s}(\rho_{r+1}) \leqslant \delta \leqslant 1 + e_1\cdot\ldots\cdot e_r\delta_1\cdot\ldots\cdot\delta_s/\deg W \leqslant 1 + a_s e_1\cdot\ldots\cdot e_r,$$

где

$$a_s < n^{2^{s^{C_1}}} \tag{55}$$

для абсолютной константы $0 < C_1 \in \mathbb{R}$, см. теорему 1 из [2]. Неравенство (46) для $\delta < p$ и (47) для $\delta \geqslant p$ влекут

$$\deg\rho \leqslant \deg(\rho_{r+1}) + (n\delta+1)^2(-r + \deg\psi_1 + \ldots + \deg\psi_r) \tag{56}$$

(в обоих случаях $\delta < p$ и $\delta \geqslant p$). Напомним, что $\deg\rho_{r+1} = \delta_{r+1}$. Следовательно, из (56) мы получаем

$$\deg g_{r+1} \leqslant \delta_{r+1} + (n(1 + a_s e_1\cdot\ldots\cdot e_r)+1)^2\Big(-r + \sum_{1\leqslant j\leqslant r} e_j\delta_j\Big).$$

Положим

$$e_{r+1} = 1 + (n(1 + a_s e_1\cdot\ldots\cdot e_r)+1)^2(e_1+\ldots+e_r).$$

Тогда справедливо (53) для $j = r + 1$. Теперь существование константы C, такой что выполняются неравенства (53) и (54) для всех j, $1 \leqslant j \leqslant s$, следует из (55) (случаи, когда $n = 1$ или $s = 1$, являются тривиальными). Лемма и теорема 1 доказаны.

Литература

1. А. Л. Чистов, *Алгоритм полиномиальной сложности для разложения многочленов на неприводимые множители и нахождение компонент многообразия в субэкспоненциальное время.* — Зап. научн. семинаров ЛОМИ **137** (1984), 124–188.
2. А. Л. Чистов, *Эффективная конструкция локальных параметров неприводимых компонент алгебраического многообразия.* — Труды Санкт-Петербургского математического общества **7** (1999), 230–266.
3. А. Л. Чистов, *Эффективная гладкая стратификация алгебраического многообразия в нулевой характеристике и её приложения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 254–311.
4. A. L. Chistov, *A correction in the statement of my theorem on the efficient smooth cover and smooth stratification of an algebraic variety.* — Preprint of the St.-Petersburg Mathematical Society, 2004, #13, `http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2004/index.html#13`
5. А. Л. Чистов, *Вычисление степеней алгебраических многообразий над полем нулевой характеристики за полиномиальное время и его приложения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **258** (1999), 7–59.
6. И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии.* — Наука, М. (1972).

Chistov A. L. Efficient construction of local parameters of irreducible components of an algebraic variety in nonzero characteristic.

Consider an $(n-s)$-dimensional algebraic variety W defined over an infinite field k of nonzero characteristic p and irreducible over this field. Let W be a subvariety of the projective space of dimension n. We prove that the local ring of W has a sequence of local parameters represented by s nonhomogeneous polynomials with the product of degrees less than the degree of the variety multiplied by a constant depending on n. This allows us to prove the existence of effective smooth cover and smooth stratification of an algebraic variety in the case of ground field of nonzero characteristic. The paper extends the analogous results of the author obtained earlier in the case of zero characteristic of the ground field.

С.-Петербургский институт
информатики и автоматизации РАН
E-mail: labta@iias.spb.su or sliss@iias.spb.su

Поступило 4 июня 2005