Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 327, 2005 г.

Д. С. Анисимов

ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ ГРОТЕНДИКА ДЛЯ ПОДПРОСТРАНСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РЕШЕТКАХ

1. Введение

Один из вариантов классического неравенства Гротендика может быть сформулирован так (см. [2, 1.f.14]).

Теорема. *Пусть X и Y – две банаховы решетки и пусть $T : X \to Y$ – ограниченный линейный оператор. Тогда*

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |Tx_i|^2 \right)^{1/2} \right\| \leqslant K_G \|T\| \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \right\| \tag{1}$$

для любого набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ из X. Иными словами, оператор T действует из пространства $X(\ell^2)$ в пространство $Y(\ell^2)$.

Здесь K_G – универсальная постоянная (константа Гротендика). Смысл выражения $\left(\sum |y_i|^2\right)^{1/2}$ (и более общих выражений вида $\phi(y_1, \dots, y_n)$, где ϕ – непрерывная функция, однородная степени 1) ясен, если мы имеем дело с решетками функций. По поводу абстрактных решеток см. [2].

Если мы будем рассматривать оператор T, заданный на замкнутом подпространстве решетки X, то величины, входящие в неравенство (1), также имеют смысл. Поэтому можно поставить вопрос о справедливости аналогичного утверждения (возможно, с другой константой в неравенстве) в такой ситуации. Простые примеры показывают, что, вообще говоря, оно неверно. Так будет, например, для пространства ℓ^1, вложенного в решетку $L^\infty(\mathbf{T}) = X$ таким образом, чтобы стандартные базисные векторы перешли в лакунарные экспоненты $\{z^{2^n}\}$. В качестве оператора T можно взять тождественный оператор на пространстве ℓ^1, а в качестве Y – тоже пространство ℓ^1, но со своей собственной решеточной структурой.

В этой заметке мы обобщим приведенную выше теорему на некоторые подпространства в решетках. Именно, теорема остается верной, если X – решетка измеримых функций на окружности $\mathbf{T}$, $\mathbf{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, а оператор T задан на пространстве X_A граничных значений аналитических функций (точное определение будет дано ниже).

Теорема 1. *Пусть X_A – подпростанство аналитических функций в решетке X, Y – произвольная банахова решетка и пусть $T : X_A \to Y$ – ограниченный линейный оператор. Тогда*

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |Tx_i|^2 \right)^{1/2} \right\| \leqslant \mathrm{const}\, \|T\| \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \right\|$$

для любого набора векторов $\{x_i\}_{i=1}^n$ из X_A. Иными словами, оператор T действует из пространства $X_A(\ell^2)$ в пространство $Y(\ell^2)$.

Оказывается, что похожее утверждение имеет место и для операторов из X_A в факторпространство $Z = Y/Y_A$, если $Z(\ell^2)$ интерпретировать как $Y(\ell^2)/Y_A(\ell^2)$.

Теорема 2. *Пусть X_A, Y_A – подпростанства аналитических функций для двух решеток X и Y измеримых функций на окружности. Предположим, что $T : X_A \to Y/Y_A$ – ограниченный линейный оператор. Для любого конечного набора векторов $x_i \in X_A, i = 1, \dots, n$, положим $y = (y_i)_{i=1}^n$, где $y_i = T(x_i)$. Тогда*

$$\|y\|_{Y(\ell^2)/Y_A(\ell^2)} \leqslant \mathrm{const}\, \|T\| \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \right\|,$$

где постоянная не зависит от $\{x_i\}_{i=1}^n$ и от n. Иными словами, оператор T действует из $X_A(\ell^2)$ в $Y(\ell^2)/Y_A(\ell^2) \stackrel{def}{=} (Y/Y_A)(\ell^2)$.

Для дальнейшего полезно написать двойственное выражение для нормы в пространстве $Z = (Y/Y_A)(\ell^2_m)$:

$$y = (y_i)_{i=1}^m \in Z \Leftrightarrow \|y\|_Z = \sup_{\|(\sum |f_i|^2)^{1/2}\| \leqslant 1, f_i \in (Y/Y_A)^*} \left| \sum f_i(y_i) \right| < \infty. \tag{2}$$

2. Уточнение формулировок

Теоремы 1 и 2 будут доказаны при некоторых дополнительных условиях на решетки. Эти условия не очень ограничительны и отчасти нужны просто для того, чтобы пространства X_A, Y_A и т.п. не вырождались. С другой стороны, эти теоремы верны в более общей ситуации функций от двух переменных. Опишем точно все изменения, определив сначала некоторые из встретившихся ранее понятий.

Определение 1. *Банаховой решеткой измеримых функций называется банахово пространство измеримых функций X, для которого выполнено свойство: если для измеримых функций g, f выполняется условие $f \in X, |g| \leqslant |f|$, то функция g также принадлежит пространству X и $\|g\| \leqslant C\|f\|$.*

Определение 2. *Рассмотрим решетку измеримых функций на произведении $(\mathbf{T}, m) \times (\Omega, \mu)$, где через m обозначена нормированная мера Лебега на окружности $\mathbf{T}$, а мера μ σ-конечна. Аналитическое подпространство X_A состоит из функций f, для которых $f(\cdot, \omega) \in N^+$ для почти всех ω. Здесь N^+ – это класс Смирнова, состоящий из граничных значений функций f, аналитических в круге $\mathbf{D}$ и таких, что множество мер*

$$e \mapsto \int\limits_e \log^+ |f(r\zeta)| dm(\zeta), \quad 0 \leqslant r < 1,$$

является равностепенно абсолютно непрерывным.

Определение 3. *Банахова решетка измеримых функций обладает свойством Фату, если константа C в первом определении равна 1 и из условий $x_n \in X$, $x_n(u) \to x(u)$ п.в. и $\|x_n\|_X \leqslant 1$ следует, что $x \in X$ и $\|x\|_X \leqslant 1$.*

Мы будем предполагать у решеток наличие свойства Фату и наложим на них условие, обеспечивающее невырожденность пространства X_A: для любой функции $f \in X$, $f \neq 0$, существует такая функция $g \in X$, $g \geqslant |f|$, что

$$\|g\| \leqslant c\|f\| \quad \text{и} \quad \log|g(\cdot, \omega)| \in L^1(\mathbf{T}) \quad \text{для п.в.} \quad \omega \in \Omega. \qquad (*)$$

Дадим теперь окончательные формулировки основных результатов заметки.

Теорема 1 сохраняет силу, если X – решетка измеримых функций на $(\mathbf{T}, m) \times (\Omega, \mu)$, удовлетворяющая условию $(*)$ и обладающая свойством Фату, а теорема 2 – если таковы обе решетки X и Y (при этом пространства (Ω, μ) для них могут быть разными).

3. Доказательства

Теорема 1, как мы сейчас увидим, доказывается примерно так же, как и ее "чисто решеточный" прототип – только классическая теорема Гротендика заменяется в рассуждении на ее аналог для диск–алгебры, установленный Бургейном. (По поводу этого и родственных результатов см., например, книгу [2] и обзор [6] и имеющиеся там ссылки.) При доказательстве теоремы 2 встречается одна дополнительная трудность (заметим, что у этой теоремы решеточного прототипа нет). Приступим к деталям.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ – конечная последовательность в X_A. Положим $x_0 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ и $y_0 = \left(\sum_{i=1}^n |Tx_i|^2\right)^{1/2}$. Рассмотрим множество функций из X_A, для которых конечна норма $\|x\|_\infty$, где

$$\|x\|_\infty = \inf\{\lambda > 0; |x| \leqslant \lambda x_0\}.$$

Это множество является пересечением идеала в X, порожденного функцией x_0, и пространства X_A. Иными словами, это пространство $L_A^\infty(x_0)$, если под весовым пространством $L^\infty(w)$ понимать пространство функций h таких, что $h/w \in L^\infty$. Заметим, что это пространство непусто, так как содержит все функции x_i. Пусть f – это положительный функционал с единичной нормой, нормирующий y_0, т.е.

$$f \in Y^*, \quad \|f\| = 1, \quad f(y_0) = \|y_0\|, \quad f \geqslant 0.$$

Введем на пространстве Y новую норму $\|y\|_1 = f(|y|)$, $y \in Y$. Тогда $\|\cdot\|_1$ – полунорма на пространстве Y такая, что пополнение Y_0 пространства Y, снабженное полунормой $\|\cdot\|_1$ и отфакторизованное по множеству элементов $z \in Y, \|z\|_1 = 0$, является абстрактным L^1-пространством и, следовательно, по теореме Какутани изометрично некоторому пространству $L^1(\nu)$.

Замечание. Теорема 1 справедлива и будет доказана для любой банаховой решетки Y. Однако если Y – решетка измеримых функций со свойством Фату, то ссылка на теорему Какутани становится излишней: достаточно в качестве функционала f взять элемент из порядково двойственного пространства $Y^{'}$, а тогда норма $\|y\|_1$ есть просто $\int |y| g d\sigma$ для некоторой функции g.

Если мы докажем теорему для частного случая, когда оператор действует из пространтсва L^∞_A в решетку $L^1(\nu)$, то мы докажем теорему в общем случае. Действительно, взяв набор $\{x_i\}$, рассмотрим пространство $L^\infty_A(x_0)$ (как выше) и вложение J_1 этого пространства в аналитическое подпространство X_A. Обозначим через J_2 вложение решетки Y в пространство $Y_0 = L^1(\nu)$. Композиция операторов J_2TJ_1 действует из пространства $L^\infty_A(x_0)$ в пространство $L^1(\nu)$. Для такого оператора мы считаем теорему доказанной, следовательно

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n |J_2TJ_1x_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \leqslant \text{const}\, \|J_2\| \|T\| \|J_1\| \left\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^\infty(x_0)}$$

$$\leqslant \text{const}\, \|T\| \|x_0\|,$$

ибо $\|J_1\| \leqslant \|x_0\|_X$. Так как норма $\left\| \left(\sum_{i=1}^n |J_2TJ_1x_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 = \|y_0\|_1$ равна значению функционала $f(y_0) = \|y_0\|_Y$, то мы получаем, что $\|y_0\|_Y \leqslant \text{const}\, \|x_0\|_X$, как и требовалось.

Осталось разобраться с частным случаем пространств $L^\infty_A(x_0)$ и $L^1(\nu)$. Пространство $L^\infty_A(x_0)$ изометрично пространству $L^\infty_A\ (dtd\mu)$. Действительно, обозначим через Φ внешнюю функцию

$$\Phi(t, \omega) = \exp(\log |x_0| + iH(\log |x_0|)),$$

где H – оператор гармонического сопряжения, действующий по первой переменной. Эта функция имеет смысл ввиду определения функции x_0. Тогда оператор S, который сопоставляет функции $g \in L^\infty_A(x_0 dtd\mu)$ функцию $g \cdot \Phi \in L^\infty_A(dtd\mu)$, является, как легко видеть, изометрией.

Итак, будем рассматривать оператор $T : L^\infty_A(dtd\mu) \mapsto L^1(d\nu)$. Мы докажем, что такой оператор на самом деле 2-абсолютно суммирующий. (Этого достаточно, поскольку тогда T продолжается до оператора из $L^\infty(dtd\mu)$ в $L^1(\nu)$, и можно сослаться на цитированный в начале статьи результат для операторов в решетках.) Утверждение в действительности известно. В дальнейшем нам понадобится следующая более общая (в сущности, тоже известная и не самая сильная из возможных) формулировка.

Лемма 1. *Пусть оператор T действует из пространства $L^\infty_A(dtd\mu)$ в пространство Y. Если пространство Y удовлетворяет условию ограниченной аппроксимации и имеет котип 2, то оператор T является 2-асболютно суммирующим.*

Схема доказательства.

а. Надо проверить, что для всяких векторов $x_1, \dots, x_n \in L^\infty_A(dtd\mu)$ выполняется неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n \|Tx_i\|^2\right)^{1/2} \leqslant C\|T\| \sup_{f\in\left(L^\infty_A\right)^*, \|f\|\leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i)|^2\right)^{1/2}, \qquad (3)$$

где C зависит лишь от постоянной, характеризующей котип 2 в Y. Условие ограниченной аппроксимации позволяет свести дело к случаю, когда пространство Y конечномерно.

б. Пространство $L^\infty_A(dtd\mu)$ сопряжено с пространством

$$(L^1/H^1_0)\widehat{\otimes}L^1(\mu) = L^1(L^1/H^1_0, d\mu) \overset{def}{=} Z.$$

Согласно одному из вариантов принципа локальной рефлексивности (см. например, [7, E.3.2]), для любого конечного набора векторов $x_1, \dots, x_n \in L^\infty_A(dtd\mu)$ и любого $\epsilon > 0$ можно найти такой оператор $S : Y^* \to Z$, что $\|S\| \leqslant (1+\epsilon)\|T\|$ и $S^*(x_i) = T(x_i), i = 1, \dots, n$. Это позволяет считать без потери общности, что сам оператор T в (3) сопряжен с некоторым оператором $S : Y^* \to Z$, т.е. представляется в виде

$$T(x) = \sum_{j=2}^N \langle x, F_j\rangle y_j,$$

где $y_j \in Y$, а $F_j \in (L^1/H^1_0)\widehat{\otimes}L^1(\mu), j = 1, \dots, N$.

в. С помощью предельного перехода и некоторых дополнительных соображений можно свести неравенство (3) к еще более простой ситуации. Во-первых, можно считать, что $F_j = \sum\limits_{k=1}^L u_{kj}\otimes g_{kj}$, где u_{kj} – классы в L^1/H^1_0, порожденные тригонометрическими полиномами степени не выше некоторого большого числа M, а g_{kj} – ступенчатые функции в $L^1(\mu)$, все измеримые относительно некоторой конечной σ-алгебры $\mathcal{A}$. Обозначим через τ оператор свертки с ядром Валле–Пуссена с номером $1000M$, а через π – оператор усреднения относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$. Тогда, очевидно, $T((\tau \otimes \pi)(x)) = T(x)$ для всякой функции x из $L^\infty_A(dtd\mu)$, откуда видно, что достаточно проверить аналог неравенства (3) для операторов $T : C_A(T; \ell^\infty_K) \to Y$ с константой C, зависящей лишь от постоянной, характеризующей котип 2 в Y (в частности, не зависящей от K).

Последнее утверждение, однако – не что иное, как доказанный Бургейном аналог теоремы Гротендика для диск-алгебры C_A (см. монографию [3] или обзор [6]), ибо $C_A \sim c_0(C_A)$ (см. [3, IIIE, 12]).

Доказательство теоремы 2. Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2. *В равенстве* (2) *для нормы в пространстве* $(Y/Y_A)(\ell^2_m)$ *в качестве функционалов* f_i *можно брать элементы пространства* $Y' \cap Y_A^\perp$ *(аннулятор взят в* Y^**; как обычно,* Y' *– это порядково сопряженое с* Y*).*

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [1] или [4, 1.3, 4]), что

$$(Y')_A = \overline{z}(Y' \cap Y_A^\perp), z(Y')_A = Y' \cap Y_A^\perp.$$

Рассмотрим пространство, сопряженное с $z(Y')_A$: $(z(Y')_A)^* = (Y')^*/(z(Y')_A)^\perp$. Возьмем векторы $z_k \in Y/Y_A$, $z_k = y_k + Y_A$, где $y_k \in Y$. Пусть $\overline{y_k}$ – класс смежности из $(Y')^*/(z(Y')_A)^\perp$, содержащий вектор y_k. Тогда

$$\|(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})\|_{((Y')^*/(z(Y')_A)^\perp)(\ell^2_m)} =$$
$$\inf\{\|(y_1, \dots, y_m) + (F_1, \dots, F_m)\|_{(Y')^*(\ell^2)}, F_k \in (z(Y')_A)^\perp\}.$$

Для любой решетки W очевидно выполнено $W^*(\ell^2_m) = (W(\ell^2_m))^*$, и нетрудно понять, что выполнено также равенство $W'(\ell^2_m) = (W(\ell^2_m))'$. Отсюда следует, что $(Y')^*(\ell^2_m) = ((Y(\ell^2_m))')^*$. Воспользуемся следующей леммой (см. [4,1.3,5]; отметим, что это довольно тонкое утверждение).

Лемма 3. *Пусть Z – решетка измеримых функций, определенных на множестве $\mathbf{T}\times\Omega$, обладающая свойством Фату и удовлетворяющая условию $(*)$. Разложим пространство $(Z')^*$ каноническим образом в прямую сумму $Z\oplus L$, где L – пространство сингулярных функционалов на Z'. Пусть функционал Φ из пространства $(Z')^*$ разложен в сумму двух векторов: $\Phi = u + l$, где $u \in Z$, $l \in L$. Если выполнено условие $\Phi(g) = 0$ для всех функций g из пространства $(Z')_A$, то каждый из функционалов u и l обладает тем же свойством, то есть $u \in zZ_A$.*

Применим эту лемму к решетке $Y(\ell^2_m)$ (это пространство может быть рассмотрено как решетка измеримых функций от трех аргументов (t,ω,k), где пара (t,ω) принадлежит множеству $\mathbf{T}\times\Omega$, а $k = 1,\dots,m$). Легко понять, что свойство Фату и свойство $(*)$ выполнены для пространства $Y(\ell^2)$ (поскольку они выполнены для пространства Y). Так как функционал $\{F_k\}_{k=1}^m$ принадлежит пространству $(z(Y(\ell^2_m))')_A)^\perp$ то, применяя лемму, мы получим, что функционал $z\{F_k\}_{k=1}^m$ представляется в виде суммы $f+l$, где функционалы f и l также из аннулятора $(((Y(\ell^2_m))')_A)^\perp$ и, кроме того, функция f принадлежит пространству $zY_A(\ell^2_m)$, а функционал l сингулярен с пространством $Y(\ell^2_m)$, то есть $|g|\wedge|l| = 0$ для всех $g \in Y(\ell^2_m)$.

Обозначим через A норму вектора $(\overline{y_1},\dots,\overline{y_m})$:

$$A = \|(\overline{y_1},\dots,\overline{y_m})\|_{((Y')^*/(z(Y')_A))(\ell^2_m)} =$$

$$\inf\{\|(y_1,\dots,y_m)+(f_1,\dots,f_m)+(l_1,\dots,l_m)\|_{(Y')^*(\ell^2_m)};$$

$$\{l_k\}_{k=1}^m, \{f_k\}_{k=1}^m \in z((Y_A(\ell^2_m)')_A)^\perp, \{f_k\}_{k=1}^m \in Y(\ell^2_m),$$

$$|g|\wedge|\{l_k\}_{k=1}^m| = 0, \forall g \in Y(\ell^2_m)\}.$$

Положим $B = \inf\{\|(y_1,\dots,y_m)+(f_1,\dots,f_m)\|_{(Y')^*(\ell^2_m)},\ \{f_k\}_{k=1}^m \in Y(\ell^2_m),\ \{f_k\}_{k=1}^m \in z((Y_A(\ell^2_m)')_A)^\perp\}$. Очевидно, что $A \leqslant B$. Возьмем число $\epsilon > 0$ и векторы $(f_1^0,\dots,f_m^0)$, $(l_1^0,\dots,l_m^0)$, такие что $A+\epsilon > \|(y_1,\dots,y_m)+(f_1^0,\dots,f_m^0)+(l_1^0,\dots,l_m^0)\|$. Так как элементы y_k, f_k принадлежат пространству Y, а элементы l_k^0 обладают свойством $|l_k^0|\wedge|g| = 0$ для любого вектора g из Y, то получим, что $A+\epsilon > \|(y_1,\dots,y_m)+(f_1^0,\dots,f_m^0)\| \geqslant B$. Следовательно $A \geqslant B$. Отсюда следует равенство величин A и B, а значит

$$\|(\overline{y_1},\dots,\overline{y_m})\|_{((Y')^*/(z(Y')_A)^\perp)(\ell^2_m)} = \|(\overline{y_1},\dots,\overline{y_m})\|_{((Y')^*/(Y_A))(\ell^2_m)},$$

так как $Y_A(\ell^2_m) = (((Y(\ell^2_m))')')_A = z(Y \cap ((Y'_m)_A)^\perp)$. Векторы y_k лежат в пространстве Y, а следовательно норма в последнем неравенстве может быть переписана так: $\|(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})\|_{((Y')^*/(Y_A))(\ell^2_m)} = \|(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})\|_{(Y/(Y_A))(\ell^2_m)}$.

Величина A, как легко видеть, совпадает с супремумом из равенства (2), но взятым не по всему аннулятору, а только по *функциям* из аннулятора:

$$\sup_{\|(\sum |f_i|^2)^{1/2}\| \leqslant 1, f_i \in Y' \cap Y_A^\perp} \left| \sum f_i(y_i) \right|.$$

Лемма 2 доказана.

Перейдем к доказательству того, что оператор T будет действовать из пространства $X_A(\ell^2)$ в пространство $(Y/Y_A)(\ell^2)$. Пусть последовательность $(x_k)_{k=1}^n$ содержится в X_A. Нужно доказать, что

$$\|(Tx_1, \dots, Tx_n)\|_{(Y/Y_A)(\ell^2_n)} \leqslant \mathrm{const}\, \|T\| \left\| (\sum |x_i|^2)^{1/2} \right\|.$$

Положим $v = (\sum |x_i|^2)^{1/2} \geqslant 0$. Рассмотрим пространство $L^\infty_A(v)$. Все элементы последовательности x_k содержатся в пространстве $L^\infty_A(v)$, то есть оно состоит не только из нуля. Запишем норму, которую нужно оценить в последнем неравенстве, как супремум и проведем оценку. Для этого зафиксируем $\epsilon > 0$ и по этому ϵ найдем набор функций $g_i^0 \in Y_A^\perp$ такой, что

$$\begin{aligned} &\|(Tx_1, \dots, Tx_n)\|_{(Y/Y_A)(\ell^2_n)} \\ &= \sup_{\|(\sum |g_i|^2)^{1/2}\| \leqslant 1, g_i \in Y_A^\perp} \left| \sum \int g_i T x_i \, d\mu \right| \\ &\leqslant (1+\epsilon) \left| \sum \int g_i^0 T x_i \, d\mu \right|. \end{aligned}$$

(Здесь мы воспользовались леммой 2.)

Рассмотрим пространство $L^1(w)/L^1_A(w)$, где $w = \sqrt{|g_1^0|^2 + \dots + |g_n^0|^2}$. Разумеется, $\log w(\cdot, \omega) \in L^1(\mathbf{T})$ для п.в. ω. Так как $w \in Y'$, то пространство Y вложено в пространство $L^1(w d\mu)$. В таком случае оператор T действует в пространство $L^1(w)/L^1_A(w)$.

Предположим теперь, что верно следующее утверждение:

если оператор S действует из пространства $L_A^\infty(v)$ в пространство $L^1(w)/L_A^1(w)$, то он индуцирует оператор, действующий из пространства $L_A^\infty(v)(\ell^2)$ в пространство $(L^1(w)/L_A^1(w))(\ell^2)$.

Из этого утверждения вытекает требуемое. Действительно, возьмем в качестве оператора S оператор T, тогда

$$\sup_{\substack{\|(\sum|\phi_i|^2)^{1/2}\|\leqslant 1,\\ \phi_i\in(L_A^1(w))^\perp\cap L^\infty(w)}} \left|\sum\int \phi_i T x_i \mu\right| \leqslant$$

$$\operatorname{const}\|T\|_{L_A^\infty(v)\mapsto L^1(w)/L_A^1(w)}\left\|(\sum|x_i|^2)^{1/2}\right\|_{L_A^\infty(v)}.$$

Возьмем в качестве функций ϕ_i функции g_i^0. Эти функции, разумеется, принадлежат пространству $(L_A^1)^\perp$. Кроме того, очевидно,

$$\|\sqrt{|g_1^0|^2+\cdots+|g_n^0|^2}\|_{L^\infty(w)}=1.$$

Это значит, что мы действительно можем подставить функции g_i^0 вместо ϕ_i в последнее неравенство. Между тем

$$\|T\|_{L_A^\infty(x_0)\mapsto L^1(w)/L_A^1(w)}\leqslant\|T\|\cdot\|J_1\|\cdot\|J_2\|\leqslant\|T\|\|v\|_X,$$

где J_1 и J_2 – вложения пространств $L_A^\infty(v)$ и Y/Y_A в пространства X_A и $L^1(w)/L_A^1(w)$ соответственно. Собрав вместе полученные оценки, с учетом произвольности величины ϵ мы придем к требуемому утверждению.

Утверждение про оператор S стандартно получается двукратным применением леммы 1. Сначала воспользуемся тем, что пространство $L^1(w)/L_A^1(w)$ имеет котип 2. По лемме 1 оператор S является 2-абсолютно суммирующим и, значит факторизуется следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} L_A^\infty(v) & \xrightarrow{S} & L^1(w)/L_A^1(w) \\ i\downarrow & & \uparrow A \\ L^\infty(v) & \xrightarrow{S_1} & H, \end{array}$$

где i – тождественное вложение, а H – гильбертово пространство. Применив еще раз лемму 1 к оператору A^*, найдем, что оператор A поднимается в $L^1(w)$:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{A_1} & L^1(w) \\ & \searrow A & \downarrow \phi \\ & & L^1(w)/L^1_A(w), \end{array}$$

где ϕ – фактор-отображение. Таким образом, S факторизуется через некий оператор $\tilde{S}$ из $L^\infty(v)$ в $L^1(w)$, а к последнему применима теорема про решетки, с которой начинается заметка. Условие ограниченной аппроксимации всюду, где требуется, легко проверить. Мы предоставляем читателю восстановить пропущенные детали.

Аналогичные утверждения можно сформулировать для оператора, действующего из пространства X/X_A в пространства Y или Y/Y_A. Они легко сводятся к уже рассмотренным двум случаям.

Литература

1. N. J. Kalton, *Complex interpolation of Hardy–type subspaces.* — Math. Nachr. **171** (1995), 227–258.
2. Joram Lindenstrauss and Lior Tzafriri, *Classical Banach Spaces II. Function Spaces*, Spinger-Verlag (1979).
3. P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces For Analysts*, Cambridge University Press (1991).
4. С. В. Кисляков, *О BMO-регулярных решетках измеримых функций*, Алгебра и анализ, **14**, Но. 2 (2002).
5. Л. В. Акилов, Г. П. Канторович, *Функциональный анализ.* Наука, М. (1977).
6. С. В. Кисляков, *Абсолютно суммирующие операторы на диск–алгебре.* — Алгебра и анализ **3**, Но. 4 (1991), 1–77.
7. А. Пич, *Операторные идеалы.* Мир, М. (1982).

Anisimov D. S. A version of the Grothendieck theorem for subspaces of analytic functions in lattices.

A version of Grothendieck's inequality says that any bounded linear operator acting from a Banach lattice X to a Banach lattice Y, also acts from $X(\ell^2)$ to $Y(\ell^2)$. A similar statement is proved for Hardy-type subspaces in lattices of measurable functions. Namely, let X be a Banach lattice of measurable functions on the circle, and let an operator T act from the corresponding subspace of analytic functions X_A to a Banach lattice Y or, if Y is also a lattice of measurable functions on the circle, to the quotient space Y/Y_A. Under certain mild conditions on the lattices involved, it is proved that T induces an operator acting from $X_A(\ell^2)$ to $Y(\ell^2)$ or to $Y/Y_A(\ell^2)$, respectively.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: den@den.spb.su

Поступило 20 мая 2005 г.