Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 327, 2005 г.

А. Д. Баранов

ВНУТРЕННЕ-КОМПАКТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В МОДЕЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ

Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\lambda_n = \mu_n + i\nu_n$, – последовательность различных комплексных чисел из верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$. Обозначим через $\mathcal{E}(\Lambda)$ замкнутую линейную оболочку функций

$$e_{\lambda_n}(t) = \exp(-i\overline{\lambda}_n t)$$

в пространстве $L^2(0,\infty)$. Мы также допускаем, что числа λ_n могут иметь кратности $m_n \in \mathbb{N}$. В этом случае мы обозначаем через $\mathcal{E}(\Lambda)$ замкнутую линейную оболочку функций

$$e_{\lambda_n,k}(t) = t^{k-1}\exp(-i\overline{\lambda}_n t), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m_n,$$

в пространстве $L^2(0,\infty)$.

Для $h > 0$ обозначим через T_h оператор сдвига в пространстве $L^2(0,\infty)$, т.е.

$$T_h f(t) = f(t+h), \qquad f \in L^2(0,\infty), \quad t > 0.$$

В [8] П. Кусис рассмотрел следующую задачу: описать подпространства E в $L^2(0,\infty)$ такие, что для всякого $h > 0$ подпространство E инвариантно относительно оператора T_h, и оператор T_h компактен в E. Такие подпространства E называют *внутренне-компактными*. Кусис [8] показал, что подпространство E в $L^2(0,\infty)$ внутренне-компактно тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\mathcal{E}(\Lambda)$ для некоторой последовательности Λ с кратностями m_n такой, что функция

$$G(t) = \sum_n m_n \frac{\nu_n}{|t-\lambda_n|^2}$$

принадлежит пространству $C_0(\mathbb{R})$ (пространству функций, непрерывных на вещественной прямой $\mathbb{R}$ с нулевыми пределами в бесконечности). Более короткое доказательство этой теоремы было предложено П. Д. Лаксом [9].

Из того, что функция G конечна на $\mathbb{R}$, вытекает, в частности, что последовательность $\{\lambda_n\}$ с кратностями m_n удовлетворяет условию Бляшке

$$\sum_n m_n \frac{\nu_n}{|\lambda_n|^2+1} < \infty.$$

Обозначим через B произведение Бляшке с нулями λ_n и кратностями m_n, т.е.

$$B(z) = \prod_n e^{i\alpha_n} \left(\frac{z-z_n}{z-\overline{z}_n}\right)^{m_n}$$

(здесь $\alpha_n \in \mathbb{R}$ и множители $e^{i\alpha_n}$ обеспечивают сходимость произведения). Тогда $G(t) = |B'(t)|/2$, $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, внутренняя компактность подпространства $\mathcal{E}(\Lambda)$ равносильна условию

$$B' \in C_0(\mathbb{R}). \tag{1}$$

Условие (1) появилось недавно в другом контексте в статье К. М. Дьяконова [5] о дифференцировании в так называемых модельных подпространствах (коинвариантных подпространствах оператора сдвига). Рассмотрим модельное подпространство

$$K_B = H^2 \ominus BH^2$$

класса Харди H^2, порожденное произведением Бляшке B (общую теорию модельных подпространств см. в [3, 10]). Эквивалентным образом подпространство K_B можно определить как замкнутую линейную оболочку в $L^2(\mathbb{R})$ рациональных дробей вида $(z-\overline{\lambda}_n)^{-k}$, $1 \leqslant k \leqslant m_n$. В [5] показано, что оператор дифференцирования $\mathcal{D} : f \mapsto f'$ компактен как оператор из K_B в $L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда B удовлетворяет условию (1). Ранее Дьяконов описал модельные подпространства K_B, для которых оператор $\mathcal{D}$ ограничен как оператор из K_B в $L^2(\mathbb{R})$ (см. [4, 5]): оператор $\mathcal{D}$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$B' \in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Некоторые весовые обобщения этих результатов были получены в [1, 2].

Цель настоящей заметки заключается в том, чтобы установить связь между результатами Дьяконова и теоремой о внутренней компактности из [8]. Во-первых, мы покажем, что теорема Кусиса непосредственно следует из компактности оператора дифференцирования. Во-вторых, мы выскажем условие (2) в терминах операторов сдвига T_h в пространстве $\mathcal{E}(\Lambda)$. Отметим, что операторы сдвига всегда ограничены, и, таким образом, ограниченность оператора $\mathcal{D}$ влечет некоторые дополнительные свойства операторов T_h.

§1. Вспомогательные утверждения

Вначале мы отметим очевидную связь между подпространствами $\mathcal{E}(\Lambda)$ и модельными подпространствами класса Харди H^2 в верхней полуплоскости. Рассмотрим обратное преобразование Фурье

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty f(t)e^{itx}\,dt, \qquad f \in \mathcal{E}(\Lambda).$$

Легко видеть, что

$$(\mathcal{F}^{-1}e_{\lambda_n,\,k})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{i^{k-1}(k-1)!}{(x-\overline{\lambda}_n)^k}.$$

Следовательно, преобразование Фурье $\mathcal{F}$ изометрично отображает модельное подпространство K_B на пространство $\mathcal{E}(\Lambda)$. Напомним, что $\mathcal{D} = i\mathcal{F}^{-1}M\mathcal{F}$, где M обозначает оператор умножения на независимую переменную (вообще говоря, неограниченный), то есть

$$(Mf)(t) = tf(t).$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. *Оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ ограничен (компактен) как оператор из K_B в $L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда оператор M ограничен (компактен) как оператор из $\mathcal{E}(\Lambda)$ в $L^2(0,\infty)$.*

Мы воспользуемся следующими хорошо известными свойствами внутренних функций.

Предложение 2. 1. *$B' \in L^\infty(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда найдется число $\tau > 0$ такое, что*

$$\inf\{|B(z)| : 0 < \operatorname{Im} z < \tau\} > 0.$$

2. *Пусть* $B' \in L^\infty(\mathbb{R})$. *Функция* B' *лежит в* $C_0(\mathbb{R})$ *тогда и только тогда, когда*

$$|B(x+i\tau)| \to 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |x| \to \infty,$$

для некоторого (всякого) $\tau > 0$.

Доказательство. Утверждение 1 можно найти в [7, гл. IX, упр. 8]. Оба утверждения вытекают из следующих простых наблюдений. Отметим, что если B – произведение Бляшке с нулями $\lambda_n = \mu_n + i\nu_n$ и $B' \in L^\infty(\mathbb{R})$, то

$$\inf_n \nu_n > 0, \tag{3}$$

так как $|B'(\mu_n)| \geqslant 2\nu_n^{-1}$. Мы имеем

$$2\log|B(x+iy)| = \sum_n m_n \log\left(1 - \frac{4y\nu_n}{(x-\mu_n)^2 + (y+\nu_n)^2}\right).$$

Предположим, что выполнено условие (3). Тогда легко видеть, что для достаточно малого $\delta > 0$ существуют константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что

$$-C_1 y|B'(x)| \leqslant \log|B(x+iy)| \leqslant -C_2 y|B'(x)|$$

при $0 < y < \delta$. □

§2. Основные результаты

Следующая теорема устанавливает связь между ограниченностью оператора дифференцирования в пространстве K_B и свойствами операторов сдвига T_h в $\mathcal{E}(\Lambda)$. Мы обозначаем через $\|T_h|_{\mathcal{E}(\Lambda)}\|$ норму оператора T_h в пространстве $\mathcal{E}(\Lambda)$. Очевидно, $\|T_h|_{\mathcal{E}(\Lambda)}\| \leqslant 1$.

Теорема 3. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_n\}$, *где* $\lambda_n \in \mathbb{C}^+$, *пусть* $m_n \in \mathbb{N}$ *и пусть* B *– произведение Бляшке с нулями* λ_n *и кратностями* m_n. *Следующие утверждения равносильны:*

(1) $B' \in L^\infty(\mathbb{R})$;

(2) *оператор* $\mathcal{D}$ *ограничен как оператор из* K_B *в* $L^2(\mathbb{R})$;

(3) *оператор* M *ограничен как оператор из* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *в* $L^2(0,\infty)$;

(4) *найдется* $h>0$ *такое, что* $\|T_h|_{\mathcal{E}(\Lambda)}\|<1$.

Доказательство. В силу теоремы Дьяконова и предложения 1 мы имеем $1 \iff 2 \iff 3$. Таким образом, остается показать, что $3 \Longrightarrow 4$ и $4 \Longrightarrow 1$.

$3 \Longrightarrow 4$ Из ограниченности оператора M на пространстве $\mathcal{E}(\Lambda)$ вытекает, что

$$\int_0^\infty |tf(t)|^2 dt \leqslant C^2\|f\|_2^2, \qquad f\in\mathcal{E}(\Lambda),$$

для некоторой константы $C>0$. Следовательно,

$$\|T_h f\|_2^2 = \int_h^\infty |f(t)|^2 dt \leqslant \frac{C^2}{h^2}\|f\|_2^2, \qquad f\in\mathcal{E}(\Lambda),$$

откуда $\|T_h|_{\mathcal{E}(\Lambda)}\| \leqslant Ch^{-1}$ для некоторой константы C и для всех $h>0$.

$4 \Longrightarrow 1$ Мы воспользуемся рассуждением, аналогичным рассуждению из статьи Лакса [9]. Пусть $\sigma\in\mathbb{R}$, $\tau>0$, и пусть $g_\sigma = \sqrt{2\tau}e^{-i(\sigma-i\tau)t}$. Мы имеем $g\in L^2(0,\infty)$ и $\|g_\sigma\|_2=1$. Пусть $g_\sigma = q_\sigma + r_\sigma$, где $q_\sigma\in\mathcal{E}(\Lambda)$ и $r_\sigma\in(\mathcal{E}(\Lambda))^\perp$. Тогда

$$\|r_\sigma\|_2 = |B(\sigma+i\tau)|. \tag{4}$$

Эта формула принадлежит Мюнцу и Шашу. Для полноты изложения мы приведем короткое обоснование формулы (4).

Отметим, что

$$\langle f, g_\sigma\rangle_{L^2(0,\infty)} = \sqrt{2\tau}\int_0^\infty f(t)e^{i(\sigma+i\tau)t}dt = 2\sqrt{\pi\tau}F(\sigma+i\tau),$$

где $F=\mathcal{F}^{-1}f\in K_B$. С другой стороны,

$$\langle f, g_\sigma\rangle_{L^2(0,\infty)} = \langle f, q_\sigma\rangle_{L^2(0,\infty)} = \langle F, \mathcal{F}^{-1}q_\sigma\rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Следовательно, функция $\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\mathcal{F}^{-1}q_\sigma\in K_B$ представляет собою воспроизводящее ядро пространства K_B, отвечающее точке $\sigma+i\tau$.

Напомним, что воспроизводящее ядро пространства K_B, отвечающее точке $\zeta \in \mathbb{C}^+$, имеет вид

$$\mathcal{K}_\zeta(z) = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{1 - \overline{B(\zeta)}B(z)}{z - \overline{\zeta}}.$$

Следовательно,

$$\|q_\sigma\|_2^2 = 4\pi\tau\|\mathcal{K}_{\sigma+i\tau}\|_2^2 = 4\pi\tau\mathcal{K}_{\sigma+i\tau}(\sigma+i\tau) = 1 - |B(\sigma+i\tau)|^2.$$

Завершая доказательство равенства (4), заметим, что $\|q_\sigma\|_2^2 + \|r_\sigma\|_2^2 = \|g_\sigma\|_2^2 = 1$.

Теперь мы завершим доказательство импликации $4 \Longrightarrow 1$. Легко видеть, что $\|T_h g_\sigma\|_2 = e^{-\tau h}$, $h > 0$. Имеем

$$|B(\sigma+i\tau)| \geqslant \|T_h r_\sigma\|_2 \geqslant \|T_h g_\sigma\|_2 - \|T_h q_\sigma\|_2.$$

По условию, найдется число $h_0 > 0$ такое, что $\|T_{h_0}|_{\mathcal{E}(\Lambda)}\| = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0,1)$. Так как $\|q_\sigma\|_2 \leqslant 1$, то $\|T_{h_0} q_\sigma\|_2 \leqslant 1 - \varepsilon$ для всех $\sigma \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$. Положим $\tau_0 = -h_0^{-1}\log(1-\varepsilon/2)$. Тогда для $\tau \in (0, \tau_0)$ мы имеем

$$|B(\sigma+i\tau)| \geqslant e^{-\tau h_0} - 1 + \varepsilon > e^{-\tau_0 h_0} - 1 + \varepsilon = \varepsilon/2.$$

Остается воспользоваться утверждением 1 предложения 2. $\square$

Теперь мы выведем теорему Кусиса о внутренней компактности из принадлежащего Дьяконову описания модельных пространств, в которых компактен оператор дифференцирования.

Теорема 4. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, где $\lambda_n \in \mathbb{C}^+$, пусть $m_n \in \mathbb{N}$ и пусть B – произведение Бляшке с нулями λ_n и кратностями m_n. Следующие утверждения равносильны:*

(1) $B' \in C_0(\mathbb{R})$;

(2) *оператор $\mathcal{D}$ компактен как оператор из K_B в $L^2(\mathbb{R})$;*

(3) *оператор M компактен как оператор из $\mathcal{E}(\Lambda)$ в $L^2(0,\infty)$;*

(4) *для всякого $h > 0$ оператор T_h компактен в $\mathcal{E}(\Lambda)$.*

Доказательство. Мы имеем $1 \Longleftrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$. Покажем, что $3 \Longrightarrow 4$. Из компактности оператора M следует, в частности, что оператор

$$(S_h f)(t) = (t+h)f(t+h), \qquad f \in \mathcal{E}(\Lambda), \quad t > 0,$$

компактен для всех $h > 0$. Следовательно, оператор T_h также компактен в $\mathcal{E}(\Lambda)$, так как $(T_h f)(t) = (t+h)^{-1}(S_h f)(t)$, а оператор умножения на функцию $(t+h)^{-1}$ ограничен в $L^2(0,\infty)$.

Для полноты изложения мы напомним доказательство импликации $4 \Longrightarrow 1$ из [9]. Как и выше, мы имеем

$$|B(\sigma + i\tau)| \geqslant e^{-\tau h} - \|T_h q_\sigma\|_2.$$

Легко видеть, что для всякого фиксированного $\tau > 0$ семейство функций q_σ слабо сходится к нулю, когда $|\sigma| \to \infty$. Следовательно, $\|T_h q_\sigma\|_2 \to 0$, $|\sigma| \to \infty$, и, значит,

$$\lim_{|\sigma|\to\infty} |B(\sigma + i\tau)| \geqslant e^{-\tau h}$$

для всякого $h > 0$. Следовательно, $\lim_{|\sigma|\to\infty} |B(\sigma + i\tau)| = 1$, и мы можем применить утверждение 2 предложения 2. □

Замечание. В [6] Дьяконов изучает включение оператора дифференцирования в модельных пространствах в идеалы Шаттена–фон Неймана $\mathcal{S}_p$. В частности, им найдено описание модельных пространств K_B, для которых оператор $\mathcal{D}$ ядерный или из класса Гильберта–Шмидта ($\mathcal{D} \in \mathcal{S}_1$ тогда и только тогда, когда $B' \in L^2(\mathbb{R})$, и $\mathcal{D} \in \mathcal{S}_2$ тогда и только тогда, когда $B' \in L^3(\mathbb{R})$).

Из предложения 1 немедленно вытекает, что в том случае, когда $\mathcal{D} \in \mathcal{S}_p$, операторы сдвига T_h также принадлежат $\mathcal{S}_p$ и

$$\|T_h\|_{\mathcal{S}_p} \leqslant Ch^{-1}, \qquad h > 0.$$

Было бы интересно установить связь между включениями $\mathcal{D} \in \mathcal{S}_p$ и свойствами операторов сдвига T_h в соответствующем внутренне-компактном подпространстве.

Литература

1. А. Д. Баранов, *Весовые неравенства Бернштейна и теоремы вложения для коинвариантных подпространств оператора сдвига.* — *Алгебра и Анализ* **15** (2003), 138–168.
2. A. D. Baranov, *Bernstein-type inequalities for shift-coinvariant subspaces and their applications to Carleson embeddings.* — *J. Funct. Anal.* **223** (2005), 116–146.
3. J. A. Cima, W. T. Ross, *The backward shift on the Hardy space,* — Mathematical Surveys and Monographs, 79, AMS, Providence, RI (2000).
4. К. М. Дьяконов, *Целые функции экспоненциального типа и модельные подпространства в H^p.* — *Зап. научн. семин. ЛОМИ* **190** (1991), 81–100.

5. K. M. Dyakonov, *Differentiation in star-invariant subspaces I: Boundedness and compactness.* — *J. Funct. Anal.* **192** (2002), 364–386.
6. K. M. Dyakonov, *Differentiation in star-invariant subspaces II: Schatten class criteria.* — *J. Funct. Anal.* **192** (2002), 387–409.
7. J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York (1981).
8. P. Koosis, *Interior compact spaces of functions on a half-line.* — *Comm. Pure Appl. Math.* **10** (1957), 583–615.
9. P. D. Lax, *Remarks on the preceding paper.* — *Comm. Pure Appl. Math.* **10** (1957), 617–622.
10. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* — М., Наука (1980).

Baranov A. D. Interior compact subspaces and differentiation in model subspaces.

We discuss the relationship between a theorem of P. Koosis on interior compact subspaces in $L^2(0,\infty)$ and recent results due to K.M. Dyakonov on differentiation in the model subspaces of the Hardy class H^2 in the upper half-plane.

С.-Петербургский государственный университет
Royal Institute of Technology (KTH)
Stockholm, Sweden

E-mail: antonbaranov@netscape.net

Поступило 8 сентября 2005 г.