Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 327, 2005 г.

Е. С. Дубцов

ПРОСТРАНСТВА БЛОХА, ХАРДИ И BMOA В ШАРЕ

1. Введение

Пусть $H^p = H^p(B)$ обозначает классическое пространство Харди в единичном шаре $B = B_n$ из $\mathbb{C}^n$. Пространство Блоха $\mathcal{B} = \mathcal{B}(B)$ по определению состоит из голоморфных в шаре функций f таких, что $\sup\{(1-|z|)|\mathcal{R}f(z)| : z \in B\} < \infty$, где

$$\mathcal{R}f(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z)$$

обозначает радиальную производную. Малое пространство Блоха $\mathcal{B}_0$ состоит из функций $f \in \mathcal{B}$ таких, что

$$\lim_{|z|\to 1-} (1-|z|)|\mathcal{R}f(z)| = 0.$$

Также напомним, что для $f \in H^2$ свойство $f \in \mathrm{BMOA}$ равносильно условию

$$\sup_{z\in B} \left(\int\limits_{\partial B} |f^*(\zeta)|^2 P(z,\zeta)\, d\sigma(\zeta) - |f(z)|^2 \right) < \infty,$$

где f^* – граничные значения, $P(z,\zeta)$ – ядро Пуассона, а σ – нормированная мера Лебега на сфере ∂S. Дальнейшие сведения о рассматриваемых пространствах можно найти в монографии [6].

Рассмотрим единичный круг $\mathbb{D} = B_1$. Примеры функций

$$f \in \left(\bigcap_{0<p<\infty} H^p(\mathbb{D}) \cap \mathcal{B}_0(\mathbb{D}) \right) \setminus \mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$$

построены в статье [1] (в работах [2] и [5] получены примеры, где на месте $\mathcal{B}_0(\mathbb{D})$ фигурирует более широкое пространство $\mathcal{B}(\mathbb{D})$; см.

Работа поддержана ВНП Минобразования 3.1. No. 4733.

также [4], где подобная количественная задача решена для весовых пространств Блоха в круге). В настоящей статье метод из [1] и теорема существования из [3] использованы для получения аналогичных примеров в единичном шаре.

Предложение. *Пусть $n \geqslant 2$. Тогда существует функция*

$$f \in \left(\bigcap_{0<p<\infty} H^p(B_n) \cap \mathcal{B}_0(B_n) \right) \setminus \mathrm{BMOA}(B_n).$$

2. Доказательства

Лемма. *Зафиксируем $n \geqslant 2$ и убывающую функцию $\omega : [\frac{1}{2}, 1) \to (0, +\infty)$, $\omega(1-) = 0$. Тогда существует функция $G \in \mathcal{B}_0(B_n)$ такая, что $G \in H^p(B_n)$ для всех $p \in (0, +\infty)$, а также*

$$|G(z)| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{\omega(|z|)}} \quad (z \in B_n); \tag{1}$$

$$\lim_{r\to 1-} |G(r, 0, \ldots, 0)| = +\infty \quad (r \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

Доказательство.

Шаг 1. Существует функция $g \in \mathcal{B}_0(\mathbb{D})$, удовлетворяющая условиям (1) и (2). Действительно, искомая функция $g \in \mathrm{VMOA}(\mathbb{D}) \subset \mathcal{B}_0(\mathbb{D})$ построена в работе [1]. В качестве альтернативы можно использовать функцию вида

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{k} \quad (z \in \mathbb{D}),$$

где последовательность n_k строится по индукции и обладает свойством лакунарности $n_{k+1}/n_k \geqslant 3$. Последнее ограничение гарантирует, что $g \in \mathcal{B}_0(\mathbb{D})$, так как $1/k \to 0$ при $k \to \infty$. Равенство (2) также выполнено. Наконец, оценка (1) для $|g(z)|$ выполнена, если последовательность n_k растет достаточно быстро.

Шаг 2. Положим $G(z) = g(z_1)$ для $z \in B = B_n$, $n \geqslant 2$. Тогда $G \in \mathcal{B}_0(B)$, а также выполнены условия (1) и (2). Далее, пусть $A^p(\mathbb{D})$ обозначает классическое пространство Бергмана в круге. Хорошо известно, что $\mathcal{B}_0(\mathbb{D}) \subset A^p(\mathbb{D})$ для всех $p \in (0, +\infty)$; таким образом, $g \in A^p(\mathbb{D})$. Следовательно, $G \in H^p(B)$ для всех $p \in (0, +\infty)$ (см., например, [6, следствие 4.40]). $\square$

Доказательство предложения. Обозначим $B = B_n$, $n \geqslant 2$. В работе [3] построена функция $I \in H^\infty(B) \cap \mathcal{B}_0(B)$ такая, что $|I^*| = 1$ σ-п.в. на сфере ∂B и

$$\lim_{r \to 1-} I(r, 0, \ldots, 0) = 0 \quad (r \in \mathbb{R}). \tag{3}$$

При $\frac{1}{2} \leqslant r < 1$ положим

$$\omega(r) = \sup_{|z| \geqslant r} |\mathcal{R}I(z)|(1 - |z|).$$

Так как $I \in \mathcal{B}_0(B)$, то $\omega(1-) = 0$ по определению малого пространства Блоха. С помощью леммы построим функцию $G = G_\omega \in \mathcal{B}_0(\mathbb{D})$.

Проверим, что функция $F = GI$ обладает искомыми свойствами.

1. Так как $I \in H^\infty(B)$, то

$$F \in \bigcap_{0<p<\infty} H^p(B).$$

2. По определению радиальной производной $\mathcal{R}F = I \cdot \mathcal{R}G + G \cdot \mathcal{R}I$. Так как $I \in H^\infty(B)$ и $G \in \mathcal{B}_0(B)$, то $|I(z)\mathcal{R}G(z)|(1 - |z|) \to 0$ при $|z| \to 1-$. С другой стороны, в силу (1)

$$|G(z)||\mathcal{R}I(z)| \leqslant \operatorname{const} \omega(|z|)/\sqrt{\omega(|z|)} \to 0$$

при $|z| \to 1-$. Таким образом, $F \in \mathcal{B}_0(B)$.

3. Так как $|I^*| = 1$ σ-п.в. на ∂B, то

$$\int_{\partial B} |F^*(\zeta)|^2 P(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta) = \int_{\partial B} |G^*(\zeta)|^2 P(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta) \geqslant |G(z)|^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\sup_{z \in B} \left(\int_{\partial B} |F^*(\zeta)|^2 P(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta) - |F(z)|^2 \right) \\
&\geqslant \sup_{z \in B} |G(z)|^2 (1 - |I(z)|^2) \\
&\geqslant \lim_{r \to 1-} |G(r, 0, \ldots, 0)|^2 (1 - |I(r, 0, \ldots, 0)|^2) = +\infty
\end{aligned}$$

в силу (2) и (3). Иными словами, $F \notin \mathrm{BMOA}(B)$. $\square$

Замечание 1. Искомую функцию F нельзя задать в виде $F(z) = f(z_1)$, где $z \in B_n$, $n \geqslant 2$, и f удовлетворяет соответствующему одномерному условию. Действительно, если $f \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$, то $F \in \mathrm{BMOA}(B_n)$ ([6, теорема 5.21]).

Замечание 2. Внутренняя функция I, использованная при доказательстве предложения, обладает свойством $I \in (H^\infty(B) \cap \mathcal{B}_0(B)) \setminus \mathrm{VMOA}(B)$ (см. [3]).

Литература

1. К. М. Дьяконов, *Гладкие функции и коинвариантные пространства оператора сдвига.* — Алгебра и анализ **4**, № 5 (1992), 117–147.
2. D. Campbell, J. Cima, K. Stephenson, *A Bloch function in all H^p classes, but not in* BMOA. — Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), 229–230.
3. E. Doubtsov, *Little Bloch functions, symmetric pluriharmonic measures and Zygmund's dichotomy.* — J. Funct. Anal. **170** (2000), 286–306.
4. K. M. Dyakonov, *Weighted Bloch spaces, H^p, and* BMOA. — J. London Math. Soc. (2) **65** (2002), 411–417.
5. F. Holland, J. B. Twomey, *Explicit examples of Bloch functions in every H^p space, but not in* BMOA. — Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 227–229.
6. K. Zhu, *Spaces of holomorphic functions in the unit ball.* New York, Graduate Texts in Mathematics, vol. 226. Springer-Verlag, 2005.

Dubtsov E. S. Bloch, Hardy, and BMOA spaces in the ball.

We construct a little Bloch function in all Hardy spaces H^p, $p < \infty$, on the unit ball of $\mathbb{C}^n$, but not in BMOA.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН

E-mail: dubtsov@pdmi.ras.ru

Поступило 3 октября 2005 г.