Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 327, 2005 г.

С. В. Кисляков, Д. В. Парилов

О ТЕОРЕМЕ ЛИТЛВУДА–ПЭЛИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Пусть $\{\Delta_k\}$ – попарно не пересекающиеся интервалы в $\mathbb{Z}$. В 1983 г. Л. Рубио де Франсиа [1] доказал, что при $p \in [2, \infty)$ справедливо неравенство

$$\Big\| \Big(\sum_k |M_{\Delta_k} f|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{T})} \leqslant C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}, \tag{1}$$

где C_p зависит только от p. Здесь и далее $M_\Delta f = (\widehat{f}\chi_\Delta)^\vee$ – мультипликатор Фурье, соответствующий множеству Δ. По двойственности отсюда легко получается следующее утверждение: пусть $1 < p \leqslant 2$, а функции f_k таковы, что $\operatorname{supp} \widehat{f_k} \subset \Delta_k$; тогда

$$\Big\| \sum_k f_k \Big\|_{L^p(\mathbb{T})} \leqslant D_p \Big\| \Big(\sum_k |f_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{T})}. \tag{2}$$

Напомним, что классическое неравенство Литлвуда–Пэли утверждает, что если, например, $\Delta_k = [2^k, 2^{k+1})$, то *обе* оценки (1), (2) справедливы при *любом* $p \in (1, \infty)$. Роль последовательности $\{2^k\}$, разумеется, не исключительна (можно было бы взять любую последовательность $\{a_k\}$ такую, что $a_{k+1}/a_k > \lambda > 1$, где λ не зависит от k), однако ясно, что двусторонняя оценка не может быть верна при $p \neq 2$ без дополнительных предположений об интервалах Δ_k (иначе пространства L^p и L^2 совпали бы). Тем не менее, оценки (1) и (2) получили название "неравенств Литлвуда–Пэли для произвольных интеравлов".

В 1984 г., по следам результатов Рубио де Франсиа, Ж. Бургейн доказал (см. [2]) неравенство (2) и при $p = 1$ и установил, что константы D_p не растут при $p \to 1$. Доказательство Бургейна насыщено разнообразной техникой (среди прочего, используются мартингальные преобразования и вариант леммы Котляра).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 05-01-0924.

Настоящая работа возникла из желания лучше разобраться в ситуации. Мы предположили сначала, что неравенство (2) при $p = 1$ должно быть связано с тем, что некий сингулярный интегральный оператор на окружности действует из H^1 в L^1. Довольно быстро поняв, что так оно и есть, мы затем обнаружили, что фактически это было "известно" Рубио де Франсиа: в [1] проделывались необходимые вычисления, но финальная оценка почему-то была загрублена. Таким образом, без дополнительной техники статьи [2] можно было бы обойтись. Мы ставим слово "известно" в кавычки, поскольку в добавлении при корректуре к статье [1] и сам Рубио де Франсиа говорит, что в контексте неравенства (2) метод Бургейна дает больше.

Осознав, в чем дело, мы решили отработать предписанную в таких случаях программу до конца (впрочем, мы не трогали весовых оценок, а там остаются вопросы – один был поставлен еще в [1]). Это привело к следующим результатам – по-видимому, новым. Их удобно формулировать, когда все интервалы Δ_k лежат в $\mathbb{Z}_+$ (ясно, что в неравенстве (2) при $1 \leqslant p \leqslant 2$, – а, впрочем, и в неравенстве (1), – это условие не ограничительно).

Теорема 1. *Пусть $\Delta_k \subset \mathbb{Z}_+$ – попарно не пересекающиеся интервалы и пусть $0 < p \leqslant 2$.*

(a) *Если f_k – тригонометрические полиномы такие, что $\operatorname{supp} \widehat{f_k} \subset \Delta_k$, то*

$$\Big\| \sum_k f_k \Big\|_{H^p(\mathbb{T})} \leqslant a_p \Big\| \Big(\sum_k |f_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{T})}. \tag{3}$$

(b) *Если g_k – измеримые функции такие, что $\Big(\sum |g_k|^2 \Big)^{1/2} \in L^1(\mathbb{T})$, то $\sum\limits_k M_{\Delta_k} g_k \in H^{1,\infty}(\mathbb{T})$ и*

$$\Big\| \sum_k M_{\Delta_k} g_k \Big\|_{H^{1,\infty}(\mathbb{T})} \leqslant C \Big\| \Big(\sum |g_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^1(\mathbb{T})}. \tag{4}$$

Все, о чем говорилось до сих пор, имеет аналоги и для прямой $\mathbb{R}$ (в доказательствах, как обычно, есть небольшие технические отличия). Заметим, что в работе [1] рассматривался случай прямой, а в работе [2] – случай окружности. Здесь мы не покидаем окружность для определенности.

Последнее: этот текст – детализированная запись доклада на семинаре и, на наш взгляд, в этом качестве он имеет смысл, даже если изложенные ниже соображения были известны кому-то и ранее (частично или полностью) – а такое вполне могло случиться за прошедшие 20 лет, хотя мы и не видели публикаций.

§1. Схема доказательства

1.1. Предварительно сделаем одно полезное замечание. В неравенствах (3) и (4) можно считать, что последовательности $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$ содержат лишь конечное число ненулевых членов – общий случай получается предельным переходом. При таком условии в правых частях нормы в классах Харди можно заменить нормами в $L^p(\mathbb{T})$ и $L^{1,\infty}(\mathbb{T})$, соответственно (в (4) это приведет к некоторой потере в константе), раз уже все равно оценивается норма аналитического полинома. Похожие соображения будут применяться и далее – всюду, где возможно, мы переходим от l^2-значных функций к $l^2_{(N)}$-значным, часто не оговаривая этого. Кстати, тот же предельный переход показывает, что в (3) справа стоит норма последовательности $\{f_k\}$ в аналитическом классе Харди $H^p(l^2)$.

Антианалитический класс Харди $\overline{H}^p(l^2)$ получается из аналитического комплексным сопряжением.

1.2. И в [1], и в [2] перед главным действием интервалы Δ_k измельчались, чтобы придать им более регулярную структуру. Так же поступим и мы. Основой для измельчения (процедура будет описана чуть позже) послужит следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $A > 1$, $A \in \mathbb{R}$. Существуют тригонометрические полиномы α_j, $j \geqslant 0$, со следующими свойствами:*

(a) $\widehat{\alpha}_j \geqslant 0$, $\sum\limits_j \widehat{\alpha}_j = \mathbb{I}_{\mathbb{Z}_+\setminus\{0\}}$, $\widehat{\alpha}_j(n) = 0$ *при* $n \notin [A^{j-1}, A^{j+1}]$;

(b) $$\Big\|\Big(\sum_{k,j}\big|\alpha_j * f_k\big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^r} \leqslant C(r,A)\Big\|\Big(\sum_k \big|f_k\big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^r}$$

для любых функций f_k из H^r при $r \leqslant 1$ и любых функций f_k из L^r при $r > 1$, если только правая часть конечна.

Из (a) следует, что $f_k = \sum\limits_j \alpha_j * f_k$ для всех k, так что мы действительно разбили функции f_k на слагаемые со спектрами в интервалах $[A^{j-1}, A^{j+1}]$, сохранив контроль за квадратичной суммой.

Следствие 1. *Для тех же функций* $\{\alpha_j\}$ *и любой последовательности* $\{f_k\}$ *из* $H^{1,\infty}(l^2)$ *справедливо неравенство*

$$\Big\| \Big(\sum_{k,j} \big| \alpha_j * f_k \big|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^{1,\infty}} \leqslant C(A) \big\| \{f_k\} \big\|_{H^{1,\infty}(l^2)}. \tag{5}$$

Свертка аналитической в круге функции с тригонометрическим полиномом очевидным образом определяется через ее коэффициенты Тейлора. Разумеется, в (5) слева можно поставить норму двойной последовательности в аналитическом классе $H^{1,\infty}(l^2)$.

Лемма 1 стандартна, однако найти в литературе подробное доказательство, годящееся при сколь угодно малых r, не очень легко. С помощью неравенства Хинчина дело можно свести к скалярному случаю (одна функция f вместо последовательности $\{f_k\}$). Для *прямой* вместо окружности соответствующее скалярное утверждение описано во многих руководствах (например, его нетрудно вывести из [3, §III.7, теорема 7.30]). Некоторые детали сведéния случая окружности к случаю прямой можно найти в статье первого автора [4, Part I, §2], и там тоже они были выписаны лишь потому, что единственной альтернативой было бы заявить, что утверждение широко известно.

О следствии 1 мы скажем чуть позже, а сейчас отметим главное: так или иначе, лемма 1 вытекает из стандартных фактов теории сингулярных интегральных операторов. Ключевым в доказательстве теоремы 1 будет еще одно утверждение, тоже связанное с сингулярными интегралами, но менее стандартное. Мы сформулируем его в следующем пункте.

1.3. Положим $\delta_m = [0, 2^m]$, $m \geqslant 0$. С каждым интервалом δ_m свяжем тригонометрический полином φ_m со следующими свойствами:

$$\widehat{\varphi}_m(n) = 0 \quad \text{при} \quad n \notin \delta_m; \qquad |\widehat{\varphi}_m(n)| \leqslant 1; \tag{6}$$

$$\begin{gathered} |\varphi_m^{(r)}(e^{i\sigma})| \leqslant C_{r,u} 2^{(r+1-u)m} \sigma^{-u}, \quad \sigma \in [-\pi, \pi], \\ u > 1, \quad r = 0, 1, 2, \dots . \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $\varphi_m^{(r)}(e^{i\sigma}) = \frac{d^r \varphi_m(e^{i\sigma})}{d\sigma^r}$. Нам понадобится следующая (стандартная) лемма, доказательство которой мы временно отложим.

Лемма 2. *При всяком $\xi \in (0,1)$ условия (6), (7) совместимы с условием: $\varphi_m(n) = 1$ при $n \in \xi\delta_m$ ($\xi\delta$ – интервал в $\mathbb{R}$ с тем же центром, что и δ, но имеющий длину $\xi|\delta|$).*

Опишем теперь некоторый оператор T, переводящий l^2-значные функции в скалярные. Для этого образуем новую последовательность $\{\Psi_j\}$, членами которой являются те же тригонометрические полиномы φ_m, но каждый может встретиться сколько угодно раз и не обязательно подряд, а некоторые – не встретиться вообще. Из соответствующих отрезков δ_m, расставленных в том же порядке, образуем последовательность $\{\Gamma_j\}$. Пусть еще n_j – последовательность неотрицательных целых чисел такая, что отрезки $n_j + \Gamma_j$ попарно не пересекаются. Зададим оператор $T : L^2(l^2) \to L^2$ формулой

$$T(\{h_j\}) = \sum_j z^{n_j}(\Psi_j * h_j).$$

Из условия (6) и условия, наложенного на последовательность $\{n_j\}$, сразу следует, что T и в самом деле непрерывен в указанных пространствах.

Теорема 2. *Оператор T непрерывно отображает $L^p(l^2)$ в L^p при $1 < p \leqslant 2$ и $H^p(l^2)$ в H^p при $0 < p \leqslant 1$.*

Следствие 2. *Оператор T непрерывно отображает пространство $H^{1,\infty}(l^2)$ в $H^{1,\infty}$.*

Теорема 2 будет доказана в §2, а сейчас мы выведем теорему 1 из леммы 1 и теоремы 2. Перед этим, однако, отметим, что следствия 1 и 2 получаются, соответственно, из леммы 1 и теоремы 2 интерполяцией: если $r < 1 < p$, то $H^{1,\infty} = (H^r, H^p)_{\theta,\infty}$ (вещественный метод с параметром θ таким, что $1 = (1-\theta)r^{-1} + \theta p^{-1}$), и аналогичная формула справедлива для пространств l^2-значных функций. Чтобы убедиться в этом, можно сослаться на [5, 1.18.6, теорема 1(a), доказательство] и на то, что все интерполяционные формулы вещественного метода наследуются шкалой пространств Харди (неважно, векторнозначных или нет) со шкалы пространств Лоренца. По поводу последнего утверждения см., например, [6].

1.4. Вывод теоремы 1 из леммы 1 и теоремы 2. Мы объясним, как доказать п. (a) теоремы 1. Пункт (b) получается примерно так же, если заметить, что для *аналитических полиномов* $\widetilde{g}_k = M_{\Delta_k} g_k$ верно неравенство

$$\Big\| \Big(\sum |\widetilde{g}_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^{1,\infty}} \leqslant C \Big\| \Big(\sum |g_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^1}.$$

Как уже говорилось, справа стоит (фактически) норма последовательности $\{\widetilde{g}_k\}$ в пространстве Харди–Лоренца $H^{1,\infty}(l^2)$, так что можно будет повторить доказательство п. (а) с использованием в соответствующих местах следствий 1 и 2.

Итак, пусть функции f_k – такие, как в утверждении (а) теоремы 1. Сумма $\sum |f_k|^2$ не изменится, если мы заменим f_k на $z^{t_k} f_k$ ($t_k \in \mathbb{Z}$), а спектр функции $(z^{t_k} f_k)$ будет при этом лежать в отрезке $\Delta_k + t_k$.

Предположим дополнительно, что при некотором $\xi \in (0,1)$ и всех k справеддливо включение $\operatorname{supp} \widehat{f}_k \subset \xi \Delta_k$ и что длина каждого из отрезков Δ_k – степень двойки. Тогда неравенство (а) нетрудно вывести из теоремы 2. Действительно, сдвинем все функции f_k как описано в предыдущем абзаце с тем расчетом, чтобы левые концы интервалов Δ_k сместились в точку 0; обозначим сдвинутые интервалы через $\widetilde{\Delta}_k$, а сдвинутые функции – через $\widetilde{f}_k$, тогда $\operatorname{supp}(\widetilde{f}_k)^\wedge \subset \xi \widetilde{\Delta}_k$. Теперь выберем функции φ_m, удовлетворяющие условиям (6), (7) и такие, как в лемме 2, тогда $\varphi_m * \widetilde{f}_k = \widetilde{f}_k$ всякий раз, когда $\widetilde{\Delta}_k$ – интервал длины 2^m. Числа n_j из определения оператора T перед теоремой 2 – это те же левые концы интервалов Δ_j, так что $z^{n_k}(\Psi_k * \widetilde{f}_k) = f_k$ и, соответственно, $T(\{\widetilde{f}_k\}) = \sum\limits_k f_k$, и все доказано.

Осталось свести все к рассмотренному специальному случаю. Это делается двукратным применением леммы 1. Действительно, сдвинем сначала все интервалы Δ_k так, чтобы их левые концы попали в единицу, и к соответствующей последовательности f_k^+ сдвинутых функций применим лемму 1 с $A = 2^{1/10}$, а затем к полученным функциям $\alpha_j * f_k^+$ применим обратный сдвиг ("вернем их в прежнее положение"). Тогда каждая функция f_k распадется в конечную сумму $f_k = \sum\limits_j g_{kj}$ (мы обрываем суммирование, когда носитель E_j функции α_j покидает сдвинутый в единицу интервал Δ_k), причем $\Big\| \Big(\sum\limits_k \sum\limits_j |g_{kj}|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^r} \leqslant C \Big\| \Big(\sum |f_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^r}$. В одной группе (при одном значении k) носители двух соседних функций

$\widehat{g}_{kj}$ могут перекрываться, однако других непустых пересечений нет. Разобъем всю последовательность $\{g_{kj}\}$ на десять – в соответствии с остатком от деления индекса j на 10 в каждой группе. Неравенство вида (a) в теореме 1 достаточно доказать отдельно для каждой из этих подпоследовательностей.

Беря одну из них, заметим, что если исключить из нее все функции, оказавшиеся последними в своей группе, то носители e_l преобразований Фурье оставшихся функций будут (мы перенумеровали их одним индексом) хорошо разделены: $e_l \subset \xi\Xi_l$, где $\{\Xi_l\}$ – некие попарно не пересекающиеся отрезки, длина каждого есть степень двойки, а ξ – универсальная постоянная, $\xi \in (0,1)$.

Займемся теперь фунциями, оказавшимися последними в группе. Слева от носителя их преобразования Фурье достаточно места, но его может не хватить справа. Чтобы поправить дело, "измельчим" их еще раз, двигаясь теперь справа налево: сдвинем эти носители так, чтобы их *правые* концы пришлись в точку -1, и применим вариант леммы 1 для пространства $\overline{H}^r(l^2)$ антианалитических функций (или, что то же самое, саму лемму 1 к комплексно-сопряженным функциям), а затем обратными сдвигами "расставим все по прежним местам". Далее повторим описанную выше процедуру разбиения на 10 последовательностей с очевидными изменеиями и т.д. $\square$

Чтобы не отвлекаться на это в дальнейшем, обсудим прямо сейчас построение функций φ_m, удовлетворяющих условиям (6), (7), и докажем лемму 2.

На прямой (вместо окружности) добиться необходимого просто. Именно, пусть Ψ – произвольная неотрицательная C^∞-функция, заключенная между нулем и единицей и обращающаяся в нуль вне отрезка $[0,1]$, и пусть $\Psi_m(s) = \Psi(2^{-m}s)$, $s \in \mathbb{R}$, $m = 0,1,2,\ldots$. Обозначим через Φ_m обратное преобразование Фурье функции Ψ_m, тогда $\Phi_m(x) = 2^m\Phi_0(2^m x)$. Функция Φ_0 принадлежит классу Шварца, поэтому для каждого $u > 0$ имеет место оценка $|\Phi_0^{(r)}(x)| \leqslant C_{u,r}|x|^{-u}$. Так как $\Phi_m^{(r)}(x) = 2^{(r+1)m}\Phi_0^{(r)}(2^m x)$, отсюда легко вывести аналог неравенства (7) для $\Phi_m^{(r)}$. Ясно также, что можно выбрать функцию Ψ так, чтобы $\Psi(s) \equiv 1$ на $\xi\cdot[0,1]$, тогда $\Psi_m \equiv 1$ на $\xi\cdot[0,2^n]$.

Теперь введем тригонометрические полиномы φ_m на окружности формулой

$$\varphi_m(e^{i\sigma}) = \sum_{j\in[0,2^n]} \Psi_m(j)e^{in\sigma}.$$

Тогда $\varphi_m(e^{i\sigma}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi_m(\sigma + 2\pi k)$ (чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить коэффициенты Фурье) и, следовательно, $\varphi_m^{(r)}(e^{i\sigma}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi_m^{(r)}(\sigma + 2\pi k)$. Значит,

$$\left|\varphi_m^{(r)}(e^{i\sigma})\right| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2^{(r+1)n}}{(2^n|\sigma + 2\pi k|)^u}.$$

Так как $|\sigma| \leqslant \pi$, то $|\sigma+2k\pi| \geqslant c(|k|+1)^u$, и при $u > 1$ получаем (7). □

§2. Доказательство теоремы 2

Последнее, что нам осталось – это доказать теорему 2. Примерно такие же рассуждения ведут и к доказательству леммы 1, но в действительности та лемма проще (и, как уже говорилось, стандартна и известна). Нам понадобится небольшая подготовка.

2.1. Классы Харди и атомные разложения. "Вещественный" класс Харди $\mathcal{H}^p(l^2)$ $(p > 0)$ состоит из l^2-значных гармонических в круге функций, у которых некасательная максимальная функция суммируема в степени p. Аналитические классы Харди $H^p(l^2)$ и $\overline{H}^p(l^2)$ содержатся в $\mathcal{H}^p(l^2)$: дело сводится к скалярному случаю. Действительно, во внешне-внутренней факторизации $f = SF$ *скалярный* внешний множитель F лежит в H^p, а *векторный* внутренний множитель S не играет существенной роли в оценке. Из п. 1.1 видно, что мы могли бы ограничиться в дальнейшем функциями со значениями в конечномерном пространстве l^2_n. Читатель может принять такую точку зрения, но мы не будем отражать конечномерность в обозначениях.

Граничные значения функций класса $\mathcal{H}^p(l^2)$ можно понимать как l^2-значные распределения (линейные непрерывные операторы из $C^\infty(\mathbb{T})$ в l^2). Будем обозначать класс граничных распределений тем же символом $\mathcal{H}^p(l^2)$. Как и в скалярном случае, он характеризуется в терминах атомного разложения: $f \in \mathcal{H}^p(l^2)$ тогда и только тогда, когда

$$f = c_0 \mathbb{1}_{\mathbb{T}} x + \sum_{k\geqslant 1} c_k a_k, \tag{8}$$

где $x \in l^2$, $\|x\| \leqslant 1$, c_k – комплексные числа, а a_k – l^2-значные p-атомы; при этом $\|f\|_{\mathcal{H}^p(l^2)} \asymp \inf \big(\sum_{k\geqslant 0} |c_k|^p\big)^{1/p}$, где нижняя грань берется по всем представлениям вида (8). Под l^2-значным p-атомом *на окружности* понимается любая сильно измеримая l^2-значная функция a, сосредоточенная на некоторой дуге I длины меньшей, чем 2π, и такая, что $\|a(e^{i\theta})\|_{l^2} \leqslant |I|^{-1/p}$ и

$$\int\limits_J a(e^{i\theta})\theta^j \, d\theta = 0 \tag{9}$$

при $0 \leqslant j \leqslant [\frac{1}{p}] - 1$, где J – любой *отрезок* на прямой, переходящий при отображении $\theta \mapsto e^{i\theta}$ на дугу I взаимно-однозначно. Далее, если $f \in \mathcal{H}^p(l^2)$, то для всякого $N \geqslant [\frac{1}{p}] - 1$ можно найти разложение вида (8), в котором равенство (9) выполнено для всех a_k при $0 \leqslant j \leqslant N$, а $\sum_{j\geqslant 0} |c_j|^p_{\mathcal{H}^p(l^p)} \asymp \sum_{j\geqslant 0} \|c_j\|^p$. Ряд в (8) всегда сходится в смысле распределений.

К сожалению, трудно найти место, где все это было бы аккуратно доказано. В случае *скалярных* функций на *прямой* $\mathbb{R}$ в [3] имеется доказательство, опирающееся непосредственно на некасательную максимальную функцию и избегающее "большой максимальной функции". Его удобно переносить на нашу ситуацию: надо лишь проследить за тем, что l^2-значность не мешает вообще, а переход к окружности приводит лишь к появлению в (8) члена, содержащего функцию $\mathbb{1}_{\mathbb{T}}$. При $p = 1$ доказательство для окружности, но в случае скалярных функций, выдержанное в том же духе, можно найти в [7]. Для векторных функций на окружности (но снова лишь при $p = 1$) доказательство, основанное на иных идеях, изложено в [8].

2.2. Сингулярные интегралы. Пусть E и F – два гильбертовых пространства (конечномерные не исключаются; более того, нам понадобится лишь случай, когда $F = \mathbb{C}$), а T – линейный оператор, переводящий E-значные функции в F-значные. Нас будет интересовать, когда оператор T отображает $H^p(E)$ в $L^p(F)$ при данном $p \in (0, 1]$. Это выполнено для всех "достаточно приличных" сингулярных интегральных операторов, и то, что мы собираемся высказать, укладывается в такие рамки. Однако главный пример – оператор из теоремы 2 – несверточный и несимметричный (его ядро обладает хорошими свойствами лишь по одной из переменных), так что ситуация не вполне стандартна. Приступим к деталям.

Считаем априори, что наш оператор T действует из $L^2(E)$ в $L^2(F)$ (мы видели, что это так в случае оператора из теоремы 2). Напомним, что *ядром* оператора T называется $\mathcal{L}(E, F)$-значная функция K от двух переменных такая, что

$$Tf(e^{i\sigma}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(e^{i\sigma}, e^{i\tau}) f(e^{i\tau})\, d\tau$$

при п.в. $e^{i\sigma}$ вне носителя E-значной функции f. Для всякой дуги I на окружности положим $I_s = 2^{s+1}I \setminus 2^s I$ (CI – дуга с тем же центром, что и I, имеющая длину $C|I|$, либо вся окружность, если $C|I| > 2\pi$; тем самым, множество I_s пусто при больших s). Подчиним ядро K следующему условию ("условие гладкости" по τ):

(S_N) для всякой дуги $I \subset \mathbb{T}$ найдется такая $\mathcal{L}(E, F)$-значная функция $P_I(\sigma, \tau)$, являющаяся полиномом степени не выше N по τ, что при всех $x \in E$, всех $\tau \in J$ и всех $s \geqslant 1$, для которых $I_s \neq \varnothing$, выполняется неравенство

$$\Big(\int\limits_{J_s} \big\| \big(K(e^{i\sigma}, e^{i\tau}) - P_I(\sigma, \tau) \big) x \big\|_F^2 \, d\sigma \Big)^{1/2} \leqslant C \|x\|_E |I|^{-1/2} 2^{-Bs},$$

где $B > 1/2$ не зависит от I и x.

Здесь $J_s = 2^{s+1}J \setminus 2^s J$ при $2^s|I| < 2\pi$, где J – какой-нибудь отрезок на прямой, переходящий взимно-однозначно на дугу I при естественном отображении прямой на окружность.

Предложение 1. *Предположим, что оператор T непрерывно действует из $L^2(E)$ в $L^2(F)$ и из $\mathcal{H}^p(E)$ в пространство F-значных распределений и обладает ядром K, удовлетворяющим условию (S_N). Если $[\frac{1}{p}] - 1 \leqslant N$ и $p > (B + \frac{1}{2})^{-1}$, то $\|Tf\|_{L^p(F)} \leqslant D\|f\|_{\mathcal{H}^p(E)}$*

для любой функции f из $\mathcal{H}^p(E)$, где D зависит лишь от C, N, p, B и L^2-нормы оператора T.

Доказательство. В силу представления (8) и замечаний к нему достаточно проверить, что $\|Ta\|_{L^p(F)} \leqslant \mathrm{const}$ для любого p-атома a, у которого моменты с номерами $0, 1, \dots, N$ равны нулю. Пусть I – дуга из определения атома. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \|(Ta)(\,\cdot\,)\|_F^p = \int\limits_{2I} \|(Ta)(\,\cdot\,)\|_F^p + \int\limits_{\mathbb{T}\setminus 2I} \|(Ta)(\,\cdot\,)\|_F^p.$$

Первый член справа оценивается из L^2-непрерывности оператора T:

$$\int\limits_{2I} \|(Ta)(\,\cdot\,)\|_F^p \leqslant C|I|^{1-p/2}\Big(\int\limits_{\mathbb{T}} \|(Ta)(\,\cdot\,)\|_F^2\Big)^{2/p}$$

$$\leqslant C|I|^{1-p/2}\Big(\int\limits_{I} \|a(\,\cdot\,)\|_E^2\Big)^{p/2} \leqslant \mathrm{const}\,.$$

Оценим второй интеграл:

$$\int\limits_{\mathbb{T}\setminus 2I} \|(Ta)(\,\cdot\,)\|_F^p = \sum_s \int\limits_{I_s} \Big\| \int\limits_{I} K(\zeta,\xi)a(\xi)d\xi \Big\|_F^p d\zeta$$

$$\leqslant \sum_s |J_s|^{1-p/2}\Big(\int\limits_{J_s} \Big\| \int\limits_{J} (K(e^{i\sigma}, e^{i\tau}) - P_I(\sigma,\tau))a(e^{i\tau})d\tau \Big\|_F^2 d\sigma\Big)^{p/2}$$

(перешли на прямую и воспользовались тем, что от вычитания функции $P_I(\sigma,\tau)$ ничего не изменилось в силу (9)). Далее замечаем, что $L^2(F)$-норма внутреннего интеграла (по отрезку J) не превосходит интеграла от нормы, а затем пользуемся условием (S_N):

$$\dots \leqslant C \sum_s |J|^{1-p/2}\, 2^{s(1-p/2)}\Big(\int\limits_{J}\Big(\int\limits_{J_s} \|(K(e^{i\sigma}, e^{i\tau}) - P_I(\sigma,\tau))a(e^{i\tau})\|_F^2\, d\sigma\Big)^{p/2} d\tau\Big)^p$$

$$\leqslant C \sum_s |J|^{1-p/2} \Big(\int_J \big\|a(e^{i\tau})\big\|_E |J|^{-1/2} 2^{-Bs}\, d\tau \Big)^p$$

$$\leqslant C \sum_s |J|^{1-p/2} 2^{s(1-p/2)} \Big(|J|\ |J|^{-1/p} |J|^{-1/2} 2^{-Bs} \Big)^p$$

$$\leqslant C \sum_s 2^{(1-(B+\frac{1}{2})p)s} \leqslant \mathrm{const}$$

в силу условия на p. □

Замечание. При $N = 0$ это предложение было сформулировано в [1] в двойственной форме с потерями: точная двойственная переформулировка гласит, что оператор T^* действует из $L^\infty(F^*)$ в $\mathrm{BMO}(E^*)$, в [1] же было использовано лишь то, что (нелинейный) оператор $f \mapsto \|(Tf)(\,\cdot\,)\|_{E^*}$ переводит $L^\infty(F^*)$ в скалярное пространство BMO. Именно это загрубление не позволило Рубио де Франсиа придти к неравенству (2) при $p = 1$ (впрочем, было еще небольшое загрубление на стадии “измельчения”: вместо леммы 1 использовалось нечто, к случаю $p = 1$ не относящееся).

Заметим еще, что из условия (S_0) стандартным образом следует, что T – оператор слабого типа (1,1): нетрудно вывести из S_0 известное условие Хермандера

$$\int_{\mathbb{T}\setminus 2\pm} \big\|(K(e^{i\sigma}, e^{i\tau}) - u_I(\sigma))x\big\|_F\, d\sigma \leqslant C\|x\|_F$$

при всех $\tau \in I$ и при подходящем выборе не зависящих от τ оператор-функций u_I.

2.3. Теперь, наконец, мы можем доказать теорему 2. Мы выпишем ядро фигурирующего в ней оператора T и установим, что оно удовлетворяет условию (S_N) при любом $N = 0, 1, 2, \ldots$, причем соответствующие константы $B = B_N$ стремятся к бесконечности. В силу предложения 1 этого довольно: как уже указывалось, в формуле для T можно оставить конечное число слагаемых, а тогда любое значение оператора T – аналитический полином, так что в предложении 1 на самом деле оценена H^p-норма функции $T\{f_j\}$. Кстати, если оставить в формуле для T конечное число слагаемых, становится совершенно ясным и то, что T непрерывно отображает $\mathcal{H}^p(l^2)$ в пространство (скалярных) распределений – как и требуется в предложении 1.

Вернемся к определению оператора T перед теоремой 2 и положим $A_k = \{j : \Psi_j = \varphi_k\}$. Формулу для T можно переписать так:

$$(T\{h_j\})(e^{i\sigma}) = \sum_k \sum_{j\in A_k} (h_j * \varphi_k)(e^{i\sigma}) e^{in_j\sigma}.$$

Ядро оператора T есть функция со значениями в $(l^2)^* = l^2$, так что оно отождествляется с последовательностью функций

$$\{\varphi_k(e^{i(\sigma-\tau)})e^{in_s\sigma}\}_{s\in A_k, k=1,2,\dots}.$$

Пусть J – интервал, соответствующий некоторой дуге I на окружности, как было в определении свойства (S_N), τ_0 – середина интервала J, а

$$P^N_{J,k}(\sigma,\tau) = \sum_{r=0}^N \frac{1}{r!}\varphi_k^{(r)}\bigl(e^{i(\sigma-\tau_0)}\bigr)\bigl(\tau-\tau_0\bigr)^r$$

– N-й полином Тейлора для $\varphi_k(e^{i(\sigma-\tau)})$ с центром в точке $\sigma-\tau_0$. Проверим, что

$$\beta_s \overset{\text{def}}{=} \Bigl(\int\limits_{J_s} \Bigl(\sum_k \bigl|\varphi_k\bigl(e^{i(\sigma-\tau)}\bigr) - P^N_{J,k}(\sigma,\tau)\bigr| \Bigl|\sum_{j\in A_k} \xi_j e^{in_j\sigma}\Bigr|\Bigr)^2 d\sigma\Bigr)^{1/2}$$
$$\leqslant C|J|^{-1/2}2^{-\frac{1}{2}sB_N}$$

при $\tau\in J$ и $s\geqslant 1$ с $B_N = \frac{(N+2)^2}{N+3}$ для всякого вектора $\xi = \{\xi_j\}_{j\in\cup_k A_k}$ из l^2 с единичной нормой. Понятно, что отсюда вытекает условие (S_N) в объявленной выше форме, а с ним – и теорема 2.

Применив неравенство треугольника в L^2, видим, что

$$\begin{aligned}\beta_s &\leqslant \sum_k \Bigl(\int\limits_{J_s} \bigl|\varphi_k\bigl(e^{i(\sigma-\tau)}\bigr) - P^N_{j,k}(\sigma,\tau)\bigr|^2 \Bigl|\sum_{j\in A_k}\xi_j e^{in_j\sigma}\Bigr|^2 d\sigma\Bigr)^{1/2}\\ &\leqslant \sum_k \gamma_{ks}\Bigl(\int\limits_{J_s}\Bigl|\sum_{j\in A_k}\xi_j e^{in_j\sigma}\Bigr|^2 d\sigma\Bigr)^{1/2}, \qquad (10)\end{aligned}$$

где $\gamma_{ks} = \sup\limits_{\sigma\in J_s}\sup\limits_{\tau\in J}|\varphi_k(e^{i(\sigma-\tau)}) - P^N_{J,k}(\sigma,\tau)|$. Оценим величину γ_{ks} двумя способами. Обе оценки объединены в формуле (11). В верхней строке мы просто оцениваем остаток в разложении Тейлора, а в нижней пользуемся тем, что старший член в $P_{J,k}^N$ оценивается так же, как и остаток в формуле Тейлора порядка $N-1$:

$$\gamma_{ks} \leqslant C \begin{cases} \sup\limits_{\eta \in J_s} \sup\limits_{\tau \in J} \left|\tau - \tau_0\right|^{N+1} \left|\varphi_k^{(N+1)}\left(e^{i(\eta-\tau_0)}\right)\right|, \\ \\ \sup\limits_{\eta \in J_s} \sup\limits_{\tau \in J} \left|\tau - \tau_0\right|^{N} \left|\varphi_k^{(N)}\left(e^{i(\eta-\tau_0)}\right)\right|. \end{cases} \tag{11}$$

Из (6) легко вывести, что $\left|\varphi_k^{(N+1)}(e^{i\theta})\right| \leqslant C\, 2^{k(N+2)}$ (достаточно оценить тригонометрический полином $\varphi_k^{(N+1)}$ через сумму модулей его коэффициентов Фурье), так что верхняя строка в (11) дает

$$\gamma_{ks} \leqslant C|J|^{N+1}\, 2^{k(N+2)}. \tag{12}$$

В нижней строке в (11) оценим производную $\varphi_k^{(N)}$ с помощью неравенства (7) с $u = N+2$. Это дает

$$\gamma_{ks} \leqslant C|J|^N\, 2^{-k}\, 2^{-(N+2)s} |J|^{-(N+2)} = C|J|^{-2}\, 2^{-k}\, 2^{-(N+2)s}. \tag{13}$$

Оценка (13) лучше оценки (12) в точности тогда, когда $2^k \geqslant 2^{k_0} \asymp |J|^{-1}\, 2^{-\frac{N+2}{N+3}s}$. Это позволяет написать

$$\begin{aligned} \sum_k \gamma_{ks} &\leqslant C \sum_{k \leqslant k_0} |J|^{N+1}\, 2^{k(N+2)} + C \sum_{k > k_0} |J|^{-2}\, 2^{-(N+2)s}\, 2^{-k} \\ &\leqslant C'|J|^{-1}\, 2^{-\frac{(N+2)^2}{N+3}s}. \end{aligned} \tag{14}$$

Теперь продолжим оценку (10) с помощью неравенства Коши:

$$\beta_s \leqslant C\Bigl(\sum_k \gamma_{ks}\Bigr)^{1/2} \Bigl(\sum_k \gamma_{ks} \int\limits_{J_s} \Bigl|\sum_{j \in A_k} \xi_j e^{in_j\sigma}\Bigr|^2 d\sigma\Bigr)^{1/2}. \tag{15}$$

Из (14) видно, что достаточно оценить второй множитель справа постоянной, зависящей только от N и констант из неравенств (6), (7).

Вернемся еще раз к определению оператора T перед теоремой 2. Из того, что отрезки $n_j + \Gamma_j$ не должны пересекаться, легко усмотреть, что если j и j' – элементы множества A_k с одним и тем же k, то $|j - j'| \geqslant 2^k$. По теореме о тригонометрических рядах с малыми лакунами [9, гл. V, теорема 9.9][1] получаем, что для всякого интервала Q на прямой справедлива оценка

$$\int_Q \Big|\sum_{j\in A_k}\xi_j e^{in_j\theta}\Big|^2 \leqslant \begin{cases} C|Q|\sum\limits_{j\in A_k}|\xi_j|^2, & \text{если}\quad |Q|\geqslant 2\pi/2^k;\\ C2^{-k}\sum\limits_{j\in A_k}|\xi_j|^2, & \text{если}\quad |Q|<2\pi/2^k,\end{cases} \quad k=1,2,\dots \tag{16}$$

(во втором случае просто увеличим Q до интервала длины $2\pi/2^k$).

Пусть теперь k_1 – наименьшее из чисел k, для которых $|J_s|=2^s|J|>2^{-k+1}\cdot 2\pi$. Пользуясь неравенствами (16), оцениваем квадрат второго множителя справа в (15) следующим образом:

$$\begin{aligned}\sum_k \gamma_{ks}\int_{J_s}\Big|\sum_{j\in A_k}\xi_j e^{in_j\sigma}\Big|^2 d\sigma &\leqslant C\Big(\sum_{k\leqslant k_1}\dots+\sum_{k>k_1}\dots\Big)\\ &\leqslant C'\Big(\sup_{k\leqslant k_1}\gamma_{ks}\cdot 2^{-k}+\sup_{k>k_1}\gamma_{ks}\cdot 2^s|J|\Big)\end{aligned} \tag{17}$$

(мы воспользовались тем, что $\sum\limits_k\Big(\sum\limits_{j\in A_k}|\xi_j|^2\Big)=1$). Если мы проверим, что выполнены неравенства

$$\begin{aligned}\gamma_{ks}&\leqslant C2^k \quad \text{при}\quad k\leqslant k_1 \quad \text{и}\\ \gamma_{ks}&\leqslant C2^{-k}2^{-2s}|J|^{-2}\quad\text{при}\quad k>k_1,\end{aligned} \tag{18}$$

то все будет доказано: первый супремум в (17) ограничен в силу первой из этих оценок, а из второй оценки следует, что

$$\sup_{k>k_1}\gamma_{ks}\,2^s|J|\leqslant 2^{-k_1}\,2^{-s}|J|^{-1}\asymp \mathrm{const}$$

в силу определения числа k_1.

Докажем первое неравенство в (18). Из (6) следует, что $|\varphi^{(r)}(\,\cdot\,)|\leqslant C\,2^{(r+1)k}$, а тогда из оценки $(N+1)$-го остатка в формуле Тейлора получается (см. определение величины γ_{ks}), что

$$|\gamma_{ks}|\leqslant C2^{(N+2)k}|J|^{N+1}\leqslant C'\,2^{(N+2)k}(2^{-s}2^{-k})^{N+1}\sim(2^{-s}2^k)$$

[1] В [1] операторы определялись чуть иначе, и в соответствующем месте возникала в точности ортогональная последовательность $\{e^{in_j\sigma}\}$. Следовательно, теорема 2 описывает (даже при $N=0$) слегка более общий класс операторов, чем было в [1]. Впрочем, неясно, так ли уж это важно.

(при втором переходе мы воспользовались тем, что $|J| \leqslant C\,2^{-s}2^{-k}$ при $k \leqslant k_1$), что даже несколько сильнее того, что нам нужно.

Второе неравенство в (18) на самом деле верно без ограничений на k и получается почленной оценкой разности

$$\varphi_k\big(e^{i(\sigma-\tau)}\big) - \sum_{r=0}^{N} \frac{1}{r!}\big(e^{i(\sigma-\tau_0)}\big)(\tau-\tau_0)^r.$$

Напомним, что $|\sigma-\tau|$, $|\sigma-\tau_0| \asymp 2^s|J|$ при $\sigma \in J_s$, поэтому r-й член полинома Тейлора в силу неравенства (7) оценивается величиной

$$C_{r,u}\, 2^{(r+1-u)k}(2^s|J|)^{-u}|J|^r,$$

и эта же величина при $r = 0$ мажорирует слагаемое $\varphi_k\big(e^{i(\sigma-\tau)}\big)$. Осталось при каждом фиксированном r взять $u = r+2$ и просуммировать эти оценки по r от 0 до N. □

Литература

1. J. L. Rubio de Francia, *A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals.* — Rev. Mat. Iberoamer. **1** (1985), 1–13.
2. J. Bourgain, *On square functions on the trigonometric system.* — Bull. Soc. Math. Belg. **37, No. 1** (1985), 20–26.
3. J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics.* North-Holland (1985).
4. S. V. Kislyakov, *Fourier coefficients of continuous functions and a class of multipliers.* — Ann. Inst. Fourier **38, No. 2** (1988), 147–184.
5. Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* Мир, Москва (1980).
6. S. V. Kislyakov, Q. Xu, *Interpolation of weighted and vector-valued Hardy spaces.* — Trans. Amer. Math. Soc. **343, No. 1** (1994), 1–34.
7. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды.* Наука, Москва (1984).
8. J. Bourgain, *Vector-valued singular integrals and the H^1-BMO duality.* — In: Probability Theory and Harmonic Analysis, J. A. Chao and W. A. Woyczyński (eds.) Pure and Appl. Math. **98**, M. Dekker, New York and Basel (1983).
9. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* Т. 1, Мир, Москва (1965).

Kislyakov S. V., Parilov D. V. On the Littlewood–Paley theorem for arbitrary intervals.

We extend the results of Rubio de Francia [1] and Bourgain [2] by showing that for arbitrary mutually nonintersecting intervals $\Delta_k \subset \mathbb{Z}_+$, arbitrary $p \in (0, 2]$, and arbitrary trigonometric polynomials f_k with

$\operatorname{supp} \widehat{f}_k \subset \Delta_k$, we have

$$\Big\| \sum_k f_k \Big\|_{H^p(\mathbb{T})} \leqslant a_p \Big\| \Big(\sum_k |f_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

The method is a development of that by Rubio de Francia.

С.-Петербургское
отделение Математического
института им. В. А. Стеклова

E-mail: skis@pdmi.ras.ru

Поступило 2 октября 2005 г.