Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 327, 2005 г.

А. В. Потепун

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫМИ ВАРИАЦИЯМИ. ЧАСТЬ I

§0. Введение

Как известно, теория интегрирования дифференциальных форм на гладких многообразиях может быть обобщена на случай кусочно-гладких многообразий, а если размерность равна 1 – на случай спрямляемых кривых (см., например, [1, т. III, глава III]). Другое обобщение – теория потоков (непрерывных линейных функционалов на пространстве C^∞-форм с компактными носителями) – см. [2, гл. 4, §4.1]. В этом случае "интегрируются" только бесконечно гладкие дифференциальные формы. Цель данной статьи – обобщение теории интегрирования 1-форм по спрямляемым кривым на высшие размерности. Как известно, кривая спрямляема, если координатные функции параметризующего ее отображения являются функциями ограниченной вариации. В статье определяются понятия n-мерного многообразия в $\mathbb{R}^m$ с локально конечными вариациями и некоторой векторной меры на нем со значениями в пространстве n-векторов (не зависящей от локальных параметризаций многообразия и меняющей знак при переходе к противоположной ориентации). Интеграл от дифференциальной формы определяется как интеграл по этой векторной мере. Поскольку векторная мера оказывается счетно-аддитивной, этот интеграл обладает обычными свойствами интеграла Лебега (в частности, можно интегрировать измеримые дифференциальные формы, есть аналог теоремы Лебега о мажорированной сходимости). В случае размерности 1 можно определить (другим способом) векторную меру и на локально неспрямляемых кривых, однако, как легко показать, эта мера будет только конечно-аддитивной и, соответственно, интеграл

Работа выполнена при поддержке ВНП Минобразования 3.1. No. 4733.

не будет иметь свойств, связанных с предельным переходом под знаком интеграла. Кроме того, в этом случае обязательно существуют неинтегрируемые непрерывные дифференциальные формы с компактным носителем. Поэтому автор предполагает, что многообразия с локально конечными вариациями – это наиболее общий вид многообразий, на которых можно определить интеграл с хорошими свойствами.

В случае размерности 1 связными компонентами многообразия с локально конечными вариациями являются локально спрямляемые кривые (см. [3, добавление I]), которые допускают натуральную параметризацию (параметр – длина кривой, отсчитываемая от фиксированной точки). Эта параметризация, очевидно, является липшицевской с константой, равной 1. С помощью интегрирования таким многообразиям сопоставляются локально 1-спрямляемые потоки ([2, гл. 4, §4.1]). Однако в случае размерности $n \geqslant 2$ существуют примеры многообразий с локально конечными вариациями, не допускающих липшицевской параметризации, поэтому, видимо, соответствующие им потоки не будут локально n-спрямляемыми.

Основной результат первой части статьи следующий: непрерывная дифференциальная форма интегрируема по компактному подмножеству ориентируемого многообразия с локально конечными вариациями (интеграл существует и имеет конечное значение).

§1. Вариация отображения

Пусть множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение. Так как любую ячейку $P \subset G$ (параллелепипед вида $P = \prod_{i=1}^{n}[a_i; b_i))$ можно представить в виде $P = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, где K_j — компактные параллелепипеды, и множества $f(K_j)$ компактны, то множество $f(P) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f(K_j)$ измеримо по мере Лебега. Назовем *вариацией отображения f на ячейке P* число

$$V_f(P)=\sup\Big\{\sum_{k=1}^{m}\lambda_n\big(f(P_k)\big)\,\Big|\,\{P_k\}_{k=1}^{m} \text{ –разбиение множества } P \text{ на ячейки}\Big\}$$

$(\lambda_n\big(f(P_k)\big)$ – мера Лебега множества $f(P_k))$.

Для любого множества $E \subset G$ и любого $y \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$N_f(E,y) = \begin{cases} \operatorname{card}(f^{-1}(y) \cap E), & \text{если множество } f^{-1}(y) \cap E \text{ конечно;} \\ +\infty, & \text{если } f^{-1}(y) \cap E \text{ бесконечно} \end{cases}$$

(функция $N_f(E)$, заданная на $\mathbb{R}^n$, называется *индикатрисой Банаха*, см. [3, глава VII, §5]).

Теорема 1. *Индикатриса Банаха ячейки $P \subset G$ измерима по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$ и*

$$\int_{\mathbb{R}^n} N_f(P)\, d\lambda_n = V_f(P).$$

Доказательство (основная идея из [3, гл. VIII, §5]). . Если P – ячейка, то множество $f(P)$ измеримо, а тогда и его характеристическая функция $\chi_{f(P)}$ измерима. Если $\tau = \{P_k\}_{k=1}^m$ – разбиение множества P на дизъюнктные ячейки, то обозначим $N_\tau = \sum\limits_{k=1}^m \chi_{f(P_k)}$. Эта функция измерима и

$$\int_{\mathbb{R}^n} N_\tau\, d\lambda_n = \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{f(P_k)} d\lambda_n = \sum_{k=1}^m \lambda_n(f(P_k)). \tag{1}$$

Докажем, что если τ' – более мелкое разбиение, чем τ, то $N_{\tau'} \geqslant N_\tau$. В самом деле, любая ячейка $P_k \in \tau$ представляется в виде $P_k = \bigcup\limits_{i=1}^{m_k} P_{ki}$, а тогда $f(P_k) = \bigcup\limits_{i=1}^{m_k} f(P_{ki})$,

$$\chi_{f(P_k)} \leqslant \sum_{i=1}^{m_k} \chi_{f(P_{ki})} \Longrightarrow N_\tau = \sum_{k=1}^m \chi_{f(P_k)} \leqslant \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{m_k} \chi_{f(P_{ki})} = N_{\tau'}.$$

Обозначим через τ_s разбиение ячейки P на 2^{sn} равных частей (каждую сторону ячейки P делим на 2^s равных частей). Тогда разбиение τ_{s+1} – более мелкое, чем τ_s, для любого $y \in \mathbb{R}^n$ верно неравенство $N_{\tau_{s+1}}(y) \geqslant N_{\tau_s}(y)$, поэтому существует предел $\lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y)$ (конечный или равный $+\infty$).

Докажем, что $N_f(P,y) = \lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y)$. Для любого $\tau = \{P_k\}_{k=1}^m$ имеем $P = \bigcup_{k=1}^m P_k$ (дизъюнктное объединение), поэтому $f^{-1}(y) \cap$

$P = \bigcup\limits_{k=1}^{m}(f^{-1}(y) \cap P_k)$. Поскольку множества $f^{-1}(y) \cap P_k$ дизъюнктны, $\mathrm{card}(f^{-1}(y) \cap P) = \sum\limits_{k=1}^{m} \mathrm{card}(f^{-1}(y) \cap P_k)$, т.е. $N_f(P, y) = \sum\limits_{k=1}^{m} \mathrm{card}(f^{-1}(y) \cap P_k)$.

Если $f^{-1}(y) \cap P_k = \varnothing$, то $y \notin f(P_k) \Longrightarrow \chi_{f(P_k)}(y) = 0 = \mathrm{card}(f^{-1}(y) \cap P_k)$.

Если $f^{-1}(y) \cap P_k \neq \varnothing$, то $y \in f(P_k) \Longrightarrow \chi_{f(P_k)}(y) = 1 \leqslant \mathrm{card}(f^{-1}(y) \cap P_k)$.

Таким образом, $\mathrm{card}(f^{-1}(y) \cap P_k) \geqslant \chi_{f(P_k)}(y)$ и $N_f(P, y) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{m} \chi_{f(P_k)}(y) = N_\tau(y)$. Получили:

$$N_f(P, y) \geqslant N_{\tau_s}(y) \Longrightarrow N_f(P, y) \geqslant \varliminf_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y). \tag{2}$$

Пусть $N_f(P, y) \geqslant q \in \mathbb{N}$, тогда в множестве P существует по крайней мере q различных корней уравнения $f(x) = y$. Зафиксируем корни $x_1, \ldots, x_q \in P$. Так как все они различны, то $\rho_0 = \min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant q} \rho(x_i, x_j) > 0$ (ρ – метрика в $\mathbb{R}^n$). Если P_{si} – ячейки, образующие разбиение τ_s, то $\mathrm{diam}\, P_{si} = \frac{1}{2^s}\mathrm{diam}\, P \longrightarrow 0$ при $s \to \infty$ и существует s такое, что $\mathrm{diam}\, P_{si} < \rho_0$. Тогда в каждую ячейку P_{si} попадет не более одной точки из $\{x_1, \ldots, x_q\}$, поэтому существует не менее q ячеек P_{si}, для которых $y \in f(P_{si})$, т.е. $\chi_{f(P_{si})}(y) = 1$. Получаем:

$$N_{\tau_s}(y) = \sum_{i=1}^{2^{sn}} \chi_{f(P_{si})}(y) \geqslant q \Longrightarrow \varliminf_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y) \geqslant q.$$

Если $N_f(P, y) = q \in \mathbb{N}$, то $\varliminf\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y) \geqslant q$, т.е. $N_f(P, y) \leqslant \varliminf\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y)$. Если $N_f(P, y) = +\infty$, то для любого $q \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $N_f(P, y) \geqslant q$, а тогда $\varliminf\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y) \geqslant q$, а тогда и $\varliminf\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y) = +\infty$, т.е. для любого y имеем $N_f(P, y) \leqslant \varliminf\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y)$. Сопоставив с неравенством (2), получим $N_f(P, y) = \varliminf\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}(y)$. Отсюда следует измеримость функции $N_f(P)$ и по теореме Леви и неравенству (1) получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(P)\,d\lambda_n = \lim_{s\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_{\tau_s}\,d\lambda_n = \lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{2^{sn}}\lambda_n\big(f(P_{si})\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sup\left\{\sum_{k=1}^{m}\lambda_n\big(f(P_k)\big) \mid \{P_k\}_{k=1}^m - \text{ разбиение ячейки } P\right\} = V_f(P).$$

С другой стороны, для любого разбиения τ верно неравенство $N_f(P,y) \geqslant N_\tau(y)$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_n\big(f(P_k)\big) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_\tau\,d\lambda_n \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(P)d\lambda_n,$$

а тогда

$$V_f(P) = \sup_\tau\left\{\sum_{k=1}^{m}\lambda_n\big(f(P_k)\big)\right\} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(P)d\lambda_n.\bullet$$

Определение. *Назовем непрерывное отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$ отображением с локально конечной вариацией, если для любой ячейки P такой, что $\overline{P} \subset G$, вариация $V_f(P)$ конечна.*

Следствие. *Если $f : G \to \mathbb{R}^n$ – отображение с локально конечной вариацией, то для любой ячейки P такой, что $\overline{P} \subset G$, для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$ (по мере Лебега) множество $f^{-1}(y) \cap P$ конечно (функция $N_f(P)$ суммируема, поэтому почти всюду конечна).*

§2. Топологическая степень отображения с локально конечной вариацией

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – n-мерное компактное многообразие с кусочно гладким краем ∂K (∂K является объединением конечного числа гладких многообразий размерности не выше $n-1$). Очевидным примером такого многообразия является компактный параллелепипед. Как известно (см. [4, глава VI, §8]), топологической степенью отображения $g : K \to \mathbb{R}^n$ класса C^1 в точке y, не принадлежащей $g(\partial K)$, называется индекс цикла $g|_{\partial K}$ относительно y, т.е. интеграл

$$\deg_g(K,y) = \frac{1}{\mu(S^{n-1})}\int\limits_{g(\partial K)} \omega_y,$$

где

$$\omega_y = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

$|x-y| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$, $\mu(S^{n-1})$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Если f – непрерывное отображение множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $K \subset G$ и $y \notin f(\partial K)$, то $\deg_f(K, y)$ также определяется как индекс цикла $f|_{\partial K}$ относительно y, но в этом случае используются приближения отображения f отображениями класса C^1. Поскольку множество $f(\partial K)$ компактно, легко проверить, что

$$\rho(y, f(\partial K)) = \inf\{\rho(y, z) \mid z \in f(\partial K)\} > 0.$$

Лемма 1. *Если $f : G \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение и $y \notin f(\partial K)$, то существует отображение $g : K \to \mathbb{R}^n$ класса C^1 такое, что*

$$||f - g|| = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)| < \rho(y, f(\partial K)),$$

для всех таких отображений сужения $g|_{\partial K}$ C^0-гомотопны сужению $f|_{\partial K}$ в $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ и

$$\deg_f(K, y) = \deg_g(K, y) = \frac{1}{\mu(S^{n-1})} \int\limits_{g(\partial K)} \omega_y .$$

Доказательство. По теореме 52 из [4, глава VI, §8] можно приблизить f отображением g класса C^1 так, что

$$||f - g|| = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)| < \rho(y, f(\partial K)).$$

По теореме 51, п.2 (там же) тогда сужение $g|_{\partial K}$ C^0-гомотопно сужению $f|_{\partial K}$ в $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. По теореме 62 (там же) индексы циклов $f|_{\partial K}$ и $g|_{\partial K}$ относительно y равны, т.е.

$$\deg_f(K, y) = \deg_g(K, y) = \frac{1}{\mu(S^{n-1})} \int\limits_{g(\partial K)} \omega_y . \bullet$$

Если $P = \prod\limits_{i=1}^{n} [a_i; b_i)$, то обозначим $K_\varepsilon(P) = \prod\limits_{i=1}^{n} [a_i - \varepsilon; b_i - \varepsilon]$.

Определение. *Если существует $\varepsilon_y > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_y$ определена степень $\deg_f(K_\varepsilon(P), y)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \deg_f(K_\varepsilon(P), y)$, то будем называть этот предел топологической степенью отображения f на ячейке P в точке y и обозначать через $\deg_f(P, y)$.*

Теорема 2. *Если $f : G \to \mathbb{R}^n$ – отображение с локально конечной вариацией, $P = \prod\limits_{i=1}^{n}[a_i; b_i)$, $\overline{P} \subset G$, то для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$ существует $\deg_f(P, y)$ и функция $\deg_f(P)$ измерима по мере Лебега.*

Доказательство. 1). Докажем, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ существует $\varepsilon_x > 0$ такое, что $x \notin \partial K_\varepsilon(P)$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_x)$.

а) Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in P$, тогда $a_i \leqslant x_i < b_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Положим $\varepsilon_x = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{b_i - x_i\} > 0$. Если $\varepsilon < \varepsilon_x$, то $\varepsilon < b_i - x_i$ для любого i, т.е. $x_i < b_i - \varepsilon$. Если $\varepsilon > 0$, то $x_i \geqslant a_i > a_i - \varepsilon$ для любого i, откуда при $0 < \varepsilon < \varepsilon_x$ получим $a_i - \varepsilon < x_i < b_i - \varepsilon$, т.е. $x \notin \partial K_\varepsilon(P)$.

б) Пусть $x \notin P$. Тогда для некоторого i_0 либо $x_{i_0} \geqslant b_{i_0}$, либо $x_{i_0} < a_{i_0}$. В первом случае $x_{i_0} > b_{i_0} - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, т.е. $x \notin \partial K_\varepsilon(P)$ при любом $\varepsilon > 0$. Во втором случае положим $\varepsilon_x = a_{i_0} - x_{i_0} > 0$, тогда при $0 < \varepsilon < \varepsilon_x$ получим $x_{i_0} = a_{i_0} - \varepsilon_x < a_{i_0} - \varepsilon$, т.е. $x \notin \partial K_\varepsilon(P)$.

Из п. 1 следует, что для любого конечного множества $T \subset \mathbb{R}^n$ существует $\varepsilon_T > 0$ такое, что $T \cap \partial K_\varepsilon(P) = \varnothing$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_T)$. Для этого положим $\varepsilon_T = \min\{\varepsilon_x \mid x \in T\}$.

2) Докажем, что для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$ существует $\varepsilon(y) > 0$ такое, что $y \notin f\big(\partial K_\varepsilon(P)\big)$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon(y))$.

Поскольку $\overline{P} \subset G$, $\overline{P}$ – компактно, легко проверяется, что расстояние от $\overline{P}$ до $\mathbb{R}^n \setminus G$ положительно, т.е. $\inf\{\rho(x, z) \mid x \in \overline{P}, z \in \mathbb{R}^n \setminus G\} > 0$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $P_0 = \prod\limits_{i=1}^{n}[a_i - \varepsilon_0; b_i + \varepsilon_0) \subset \overline{P_0} \subset G$. По следствию из теоремы 1, для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$ множество $T = f^{-1}(y) \cap P_0$ конечно. По этому множеству найдем $\varepsilon_T > 0$ такое, что $f^{-1}(y) \cap P_0 \cap \partial K_\varepsilon(P) = \varnothing$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_T$. Поскольку $\partial K_\varepsilon(P) \subset P_0$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, мы получили:

$$f^{-1}(y) \cap \partial K_\varepsilon(P) = \varnothing \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_T\} = \varepsilon(y).$$

А тогда $x \notin f^{-1}(y)$ для $x \in \partial K_\varepsilon(P)$, т.е. $f(x) \neq y$, значит, $y \notin f\big(\partial K_\varepsilon(P)\big)$.

3) Существование предела.

Рассмотрим отображения $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, задаваемые формулой:

$$\varphi_\varepsilon(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - \varepsilon, \dots, x_n - \varepsilon).$$

Тогда $\partial K_\varepsilon(P) = \varphi_\varepsilon(\partial \overline{P})$. Пусть для некоторого $y \in \mathbb{R}^n$ множество $f^{-1}(y) \cap P_0$ конечно. Так как $\partial K_\varepsilon(P) \subset P_0 \subset G$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon(y)$, то отображения $\varphi_\varepsilon|_{\partial \overline{P}}$ гомотопны в множестве G, при этом $y \notin f\big(\partial K_\varepsilon(P)\big)$, следовательно, отображения $f \circ \varphi_\varepsilon|_{\partial \overline{P}}$ гомотопны в $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Пусть $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon(y)$, тогда $f \circ \varphi_{\varepsilon_1}|_{\partial \overline{P}}$ и $f \circ \varphi_{\varepsilon_2}|_{\partial \overline{P}}$ C^0-гомотопны. Рассмотрим отображения $g_1 : K_{\varepsilon_1}(P) \to \mathbb{R}^n$ и $g_2 : K_{\varepsilon_2}(P) \to \mathbb{R}^n$ класса C^1 такие, что

$$||f - g_1|| = \max_{x \in K_{\varepsilon_1}(P)} |f(x) - g_1(x)| < \rho(y, f(\partial K_{\varepsilon_1}(P))),$$
$$||f - g_2|| = \max_{x \in K_{\varepsilon_2}(P)} |f(x) - g_2(x)| < \rho(y, f(\partial K_{\varepsilon_2}(P))).$$

По лемме 1 получим, что отображение $g_1|_{\partial K_{\varepsilon_1}(P)}$ C^0-гомотопно отображению $f|_{\partial K_{\varepsilon_1}(P)}$ в $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$, тогда отображение $g_1 \circ \varphi_{\varepsilon_1}|_{\partial \overline{P}}$ C^0-гомотопно отображению $f \circ \varphi_{\varepsilon_1}|_{\partial \overline{P}}$, аналогично, $f \circ \varphi_{\varepsilon_2}|_{\partial \overline{P}}$ и $g_2 \circ \varphi_{\varepsilon_2}|_{\partial \overline{P}}$ также C^0-гомотопны. В силу транзитивности, отображение $g_1 \circ \varphi_{\varepsilon_1}|_{\partial \overline{P}}$ C^0-гомотопно отображению $g_2 \circ \varphi_{\varepsilon_2}|_{\partial \overline{P}}$, тогда по теореме 53 из [4, глава VI, §8] они C^1-гомотопны в $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. По следствию 1 теоремы 54 интегралы от замкнутой в $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ дифференциальной формы ω_y по этим циклам равны, т.е.

$$\int\limits_{g_1 \circ \varphi_{\varepsilon_1}(\partial \overline{P})} \omega_y = \int\limits_{g_2 \circ \varphi_{\varepsilon_2}(\partial \overline{P})} \omega_y.$$

Кроме того, так как у отображений φ_ε на гранях параллелепипеда $\overline{P}$ определитель матрицы Якоби равен 1, то, используя замену переменных в интеграле, получим:

$$\int\limits_{g_1(\partial K_{\varepsilon_1}(P))} \omega_y = \int\limits_{g_1 \circ \varphi_{\varepsilon_1}(\partial \overline{P})} \omega_y, \qquad \int\limits_{g_2(\partial K_{\varepsilon_2}(P))} \omega_y = \int\limits_{g_2 \circ \varphi_{\varepsilon_2}(\partial \overline{P})} \omega_y.$$

В итоге, используя лемму 1, получаем:

$$\deg_f\big(K_{\varepsilon_1}(P),y\big)=\deg_{g_1}\big(K_{\varepsilon_1}(P),y\big)=\frac{1}{\mu(S^{n-1})}\int\limits_{g_1(\partial K_{\varepsilon_1}(P))}\omega_y=$$
$$=\frac{1}{\mu(S^{n-1})}\int\limits_{g_1\circ\varphi_{\varepsilon_1}(\partial\overline{P})}\omega_y=\frac{1}{\mu(S^{n-1})}\int\limits_{g_2\circ\varphi_{\varepsilon_2}(\partial\overline{P})}\omega_y=$$
$$=\frac{1}{\mu(S^{n-1})}\int\limits_{g_2(\partial K_{\varepsilon_2}(P))}\omega_y=\deg_{g_2}\big(K_{\varepsilon_2}(P),y\big)=\deg_f\big(K_{\varepsilon_2}(P),y\big).$$

Итак, функция $\deg_f(K_\varepsilon(P),y)$ определена по крайней мере при $0<\varepsilon<\varepsilon(y)$ и постоянна для этих ε, т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\deg_f(K_\varepsilon(P),y)$ (по крайней мере для тех y, для которых множество $f^{-1}(y)\cap P_0$ конечно – по следствию из теоремы 1 это верно для почти всех $y\in\mathbb{R}^n$).

4) Измеримость функции $\deg_f(P)$.
Если K – компактный параллелепипед, $K\subset G$, то значение $\deg_f(K,y)$ определено для $y\notin f(\partial K)$, т.е. функция $\deg_f(K)$ определена на открытом множестве $\mathbb{R}^n\setminus f(\partial K)$ и постоянна на его компонентах связности (также открытых) — см. [4, гл.VI, §8], обсуждение перед теоремой 65. Тогда функция

$$d(K,y)=\begin{cases}\deg_f(K,y), & y\notin f(\partial K),\\ 0, & y\in f(\partial K)\end{cases}$$

измерима по мере Лебега. При $m>\frac{1}{\varepsilon_0}$ (т.е. при $\frac{1}{m}<\varepsilon_0$) справедливы включения $K_{1/m}(P)\subset\overline{P}_0\subset G$ (см. в доказательстве п. 2), а тогда при $m>\frac{1}{\varepsilon_0}$ функция $d\big(K_{1/m}(P)\big)$ определена на $\mathbb{R}^n$ и измерима. При $\frac{1}{m}<\varepsilon(y)$ имеем $d\big(K_{1/m}(P),y\big)=\deg_f\big(K_{1/m}(P),y\big)$, т.е. для почти всех $y\in\mathbb{R}^n$ существует предел

$$\lim_{m\to\infty}d\big(K_{1/m}(P),y\big)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\deg_f\big(K_\varepsilon(P),y\big)=\deg_f(P,y),$$

а тогда функция $\deg_f(P)$ тоже измерима. •

Лемма 2. *Пусть $f:G\to\mathbb{R}^n$ – отображение с локально конечной вариацией. Если P – ячейка, $\overline{P}\subset G$, $\quad P=\bigcup\limits_{k=1}^{m}P_k$, $\quad P_k$ – дизъюнкт-*

ные ячейки, то для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$

$$\deg_f(P, y) = \sum_{k=1}^{m} \deg_f(P_k, y).$$

Доказательство. 1) Пусть ячейки P и Q таковы, что $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ имеют общую $(n-1)$-мерную грань и $\overline{P \cup Q} \subset G$. Докажем, что тогда для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$ верно равенство $\deg_f(P \cup Q, y) = \deg_f(P, y) + \deg_f(Q, y)$. Так как $\overline{P \cup Q} \subset G$, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\overline{(P \cup Q)_0} \subset G$ и для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$ множество $f^{-1}(y) \cap (P \cup Q)_0$ конечно (см. в доказательстве теоремы 2). Тогда для тех же y конечны множества $f^{-1}(y) \cap P_0$ и $f^{-1}(y) \cap Q_0$, т.е. существуют ε_1, ε_2 такие, что:

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_1 \Rightarrow \deg_f(P, y) = \deg_f\big(K_\varepsilon(P), y\big),$$
$$0 < \varepsilon < \varepsilon_2 \Rightarrow \deg_f(Q, y) = \deg_f\big(K_\varepsilon(Q), y\big).$$

.

При $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ имеем

$$\deg_f(P, y) + \deg_f(Q, y) = \deg_f\big(K_\varepsilon(P), y\big) + \deg_f\big(K_\varepsilon(Q), y\big).$$

Рассмотрим $g : K_\varepsilon(P \cup Q) \to \mathbb{R}^n$ – отображение класса C^1 такое, что

$$||f - g|| < \rho\big(y, f(\partial K_\varepsilon(P)) \cup f(\partial K_\varepsilon(Q))\big).$$

Тогда по лемме 1

$$\deg_f\big(K_\varepsilon(P), y\big) = \deg_g\big(K_\varepsilon(P), y\big),\ \deg_f\big(K_\varepsilon(Q), y\big) = \deg_g\big(K_\varepsilon(Q), y\big);$$

$$\deg_g\big(K_\varepsilon(P), y\big) + \deg_g\big(K_\varepsilon(Q), y\big) = \frac{1}{\mu(S^{n-1})}\left(\int\limits_{g(\partial K_\varepsilon(P))} \omega_y + \int\limits_{g(\partial K_\varepsilon(Q))} \omega_y\right).$$

Так как $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ имеют общую $(n-1)$-мерную грань, то $\partial K_\varepsilon(P)$ и $\partial K_\varepsilon(Q)$ тоже имеют общую грань D_ε, при этом ориентация грани D_ε, индуцированная из $K_\varepsilon(P)$, противоположна ориентации, индуцированной из $K_\varepsilon(Q)$. Тогда

$$g|_{\partial K_\varepsilon(P \cup Q)} = g|_{\partial K_\varepsilon(P)} + g|_{\partial K_\varepsilon(Q)}$$

(сумма циклов) и

$$\int\limits_{g\left(\partial K_\varepsilon(P)\right)} \omega_y + \int\limits_{g\left(\partial K_\varepsilon(Q)\right)} \omega_y = \int\limits_{g\left(\partial K_\varepsilon(P\cup Q)\right)} \omega_y,$$

т.е. при $0<\varepsilon<\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ выполняются равенства

$$\deg_f(P,y)+\deg_f(Q,y)=\frac{1}{\mu(S^{n-1})}\int\limits_{g\left(\partial K_\varepsilon(P\cup Q)\right)} \omega_y =$$
$$= \deg_g\left(K_\varepsilon(P\cup Q),y\right)=\deg_f(P\cup Q,y).$$

2) Пусть каждый из промежутков $[a_i;b_i)$ разбивается на непересекающиеся ячейки с помощью точек деления

$$a_i=a_i^{(0)}<a_i^{(1)}<\ldots<a_i^{(k_i)}=b_i,\quad i=1,\ldots,n. \tag{1}$$

Пусть $1\leqslant m\leqslant n-1$. Обозначим

$$P_{j_1j_2\cdots j_m}=\prod_{i=1}^{m}[a_i^{(j_i)};a_i^{(j_i+1)})\times\prod_{i=m+1}^{n}[a_i;b_i),\ \ P_{j_1j_2\cdots j_n}=\prod_{i=1}^{n}[a_i^{(j_i)};a_i^{(j_i+1)}).$$

Для любого $i=1,2,\ldots,n$ имеем

$$[a_i;b_i)=\bigcup_{j_i=0}^{k_i-1}[a_i^{(j_i)};a_i^{(j_i+1)}), \tag{2}$$

и промежутки справа дизъюнктны. Тогда

$$P=\bigcup_{j_1=0}^{k_1-1}\bigcup_{j_2=0}^{k_2-1}\ldots\bigcup_{j_m=0}^{k_m-1}P_{j_1j_2\cdots j_m},\quad m=1,2,\ldots n, \tag{3}$$

и ячейки справа дизъюнктны. Индукцией по m докажем, что

$$\deg_f(P,y)=\sum_{j_1=0}^{k_1-1}\sum_{j_2=0}^{k_2-1}\ldots\sum_{j_m=0}^{k_m-1}\deg_f(P_{j_1j_2\cdots j_m},y)\ \text{для почти всех}\ y\in\mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Из равенства (3) ясно, что

$$P=\bigcup_{j_1=0}^{k_1-1}P_{j_1},\qquad P_{j_1j_2\cdots j_m}=\bigcup_{j_{m+1}=0}^{k_{m+1}-1}P_{j_1j_2\cdots j_{m+1}},$$

при этом из (2) следует, что соседние ячейки в этих равенствах имеют общие $(n-1)$-мерные грани. Из п. 1 индукцией по k_1 и k_{m+1} получим:

$$\deg_f(P,y)=\sum_{j_1=0}^{k_1-1}\deg_f(P_{j_1},y),\ \deg_f(P_{j_1j_2\ldots j_m},y)=\sum_{j_{m+1}=0}^{k_{m+1}-1}\deg_f(P_{j_1j_2\ldots j_{m+1}},y)$$

для почти всех $y\in\mathbb{R}^n$. Тогда по индукционному предположению для m

$$\deg_f(P,y)=\sum_{j_1=0}^{k_1-1}\sum_{j_2=0}^{k_2-1}\ldots\sum_{j_m=0}^{k_m-1}\deg_f(P_{j_1j_2\ldots j_m},y)=$$
$$=\sum_{j_1=0}^{k_1-1}\sum_{j_2=0}^{k_2-1}\ldots\sum_{j_m=0}^{k_m-1}\sum_{j_{m+1}=0}^{k_{m+1}-1}\deg_f(P_{j_1j_2\ldots j_{m+1}},y)$$

для почти всех $y\in\mathbb{R}^n$.

3) Пусть $P=\prod\limits_{i=1}^{n}[a_i;b_i)$, $P_k=\prod\limits_{i=1}^{n}[c_i^{(k)};d_i^{(k)})$, $P=\bigcup\limits_{k=1}^{m}P_k$, P_k – дизъюнктные ячейки. Тогда $[c_i^{(k)};d_i^{(k)})\subset[a_i;b_i)$. При каждом i расположим все числа $c_i^{(k)}$ и $d_i^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots,m)$ в виде одной возрастающей последовательности. Получатся последовательности вида (1), разбивающие промежутки $[a_i;b_i)$ на конечное число частей, при этом каждый из промежутков $[c_i^{(k)};d_i^{(k)})$ тоже разбивается на части. В итоге получим ячейки $P_{j_1j_2\ldots j_n}$, которые образуют разбиения вида (3) (при $m=n$) для P и для P_k.

Обозначим через T_k совокупность всех тех из ячеек $P_{j_1j_2\ldots j_n}$, которые образуют разбиение P_k $(k=1,2,\ldots,m)$. Каждая из ячеек $P_{j_1j_2\ldots j_n}$ входит в одну и только одну из совокупностей T_k (поскольку ячейки P_k дизъюнктны). Тогда, применяя формулу (4) при $m=n$ для P и для P_k, получим:

$$\deg_f(P,y)=\sum_{j_1=0}^{k_1-1}\sum_{j_2=0}^{k_2-1}\ldots\sum_{j_n=0}^{k_n-1}\deg_f(P_{j_1j_2\ldots j_n},y)=$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{P_{j_1j_2\ldots j_n}\in T_k}\deg_f(P_{j_1j_2\ldots j_n},y)=\sum_{k=1}^{m}\deg_f(P_k,y)$$

для почти всех $y\in\mathbb{R}^n$. •

Пусть $K \neq \varnothing$, $K \subset G$, K является компактным n-мерным многообразием с краем. Тогда $\mathrm{Int}\ K$ – многообразие без края. Рассмотрим случай, когда край ∂K может не быть кусочно гладким. Если $y \notin f(\partial K)$, то $f^{-1}(y) \cap K \subset \mathrm{Int}\ K$ и пересечение $f^{-1}(y) \cap K$ компактно. Тогда степень $\deg_f(K, y)$ может быть определена как степень отображения $f|_{\mathrm{Int}\ K} \to \mathbb{R}^n$ над точкой y (см. [5, гл. VIII, §4], определение 4.2).

Лемма 3. *Если $x \in G$ – изолированная точка множества $f^{-1}\big(f(x)\big)$, то существует $V(x)$ – окрестность точки x со свойством: для любого n-мерного компактного C^0-многообразия K с краем такого, что $x \in \mathrm{Int}\ K$, $K \subset V(x)$, степень $\deg_f\big(K, f(x)\big)$ определена и не зависит от K.*

Доказательство. По условию, существует компактный параллелепипед $K_0 \subset G$ такой, что $x \in \mathrm{Int}\ K_0$ и K_0 не содержит других точек множества $f^{-1}\big(f(x)\big)$, т.е. для любых $x' \in K_0$, если $x \neq x'$, то $f(x) \neq f(x')$. Докажем, что в качестве окрестности $V(x)$ можно взять $\mathrm{Int}\ K_0$. Пусть $K \subset \mathrm{Int}\ K_0$, K – компактное n-мерное многообразие с краем ∂K и $x \in \mathrm{Int}\ K$. Тогда

$\mathrm{Int}\ K_0 = \mathrm{Int}\ K \cup (\mathrm{Int}\ K_0 \setminus \{x\})$ (оба множества справа – открыты).

Для любого $x' \in K_0$, если $x \neq x'$, то $f(x) \neq f(x')$, т.е. $f(x) \notin f(K_0 \setminus \{x\})$, а тогда $\deg_f\big(\mathrm{Int}\ K_0 \setminus \{x\}, f(x)\big) = 0$ (см. [5, гл. VIII, §4], замечания после определения 4.2). Тогда ввиду аддитивности степени (там же, предложение 4.7) и по замечанию перед леммой 3 получим:

$$\begin{gathered}\deg_f\big(K, f(x)\big) = \deg_f\big(\mathrm{Int}\ K, f(x)\big) = \\ = \deg_f\big(\mathrm{Int}\ K, f(x)\big) + \deg_f\big(\mathrm{Int}\ K_0 \setminus \{x\}, f(x)\big) = \\ = \deg_f\big(\mathrm{Int}\ K_0, f(x)\big) = \deg_f\big(K_0, f(x)\big). \bullet\end{gathered}$$

В условиях леммы 3 величина $\deg_f\big(K, f(x)\big)$ называется *кратностью точки x* (см. [5, гл. VIII, §4]). Обозначим ее через $k(x)$.

Лемма 4. *Если P – ячейка, степень $\deg_f\big(P, f(x)\big)$ определена и x – единственная точка множества $f^{-1}\big(f(x)\big) \cap P$, то x – изолированная точка множества $f^{-1}\big(f(x)\big) \cap P$ и $\deg_f\big(P, f(x)\big) = k(x)$.*

Доказательство. Так как степень $\deg_f\big(P, f(x)\big)$ определена, то (см. определение и доказательство пунктов 2 и 3 теоремы 2) существует $\varepsilon_{f(x)} > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_{f(x)}$ справедливы соотношения $f(x) \notin f\big(\partial K_\varepsilon(P)\big)$ и $\deg_f\big(P, f(x)\big) = \deg_f\big(K_\varepsilon(P), f(x)\big)$. Пусть $x \neq x'$, $x' \in f^{-1}\big(f(x)\big)$. Тогда $f(x') = f(x) \notin f\big(\partial K_\varepsilon(P)\big)$, т.е. $x' \notin \partial K_\varepsilon(P)$. Докажем, что $x' \notin \operatorname{Int} K_\varepsilon(P)$.

Предположим, что $x' \in \operatorname{Int} K_{\varepsilon_0}(P)$ для некоторого ε_0, $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_{f(x)}$, т.е. $a_i - \varepsilon_0 < x'_i < b_i - \varepsilon_0$ для любого $i = 1, \ldots, n$. По условию леммы $x' \notin P$, поэтому не выполнено хотя бы одно из неравенств $a_i \leqslant x'_i < b_i$. Так как $x'_i < b_i - \varepsilon_0 < b_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$, то существует индекс i_0, для которого $a_{i_0} > x'_{i_0}$, а тогда $\varepsilon_1 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{a_i - x'_i\} > 0$ и

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad (a_i - \varepsilon_0 < x'_i) \Rightarrow \forall i = 1, \ldots, n \quad (\varepsilon_0 > a_i - x'_i) \Rightarrow \varepsilon_0 > \varepsilon_1.$$

По определению числа ε_1, для любого $i = 1, \ldots, n$ верно неравенство $a_i - x'_i \leqslant \varepsilon_1$ (т.е. $a_i - \varepsilon_1 \leqslant x'_i$) и $a_{i_0} - \varepsilon_1 = x'_{i_0}$. Кроме того, $x'_i < b_i - \varepsilon_0 < b_i - \varepsilon_1$ при $i = 1, \ldots, n$. Получили:

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad (a_i - \varepsilon_1 \leqslant x'_i < b_i - \varepsilon_1 \text{ и } a_{i_0} - \varepsilon_1 = x'_{i_0}) \Rightarrow x' \in \partial K_{\varepsilon_1}(P).$$

Но $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0 < \varepsilon_{f(x)}$, поэтому $x' \notin \partial K_{\varepsilon_1}(P)$. Полученное противоречие доказывает, что $x' \notin \operatorname{Int} K_\varepsilon(P)$.

С другой стороны, $x \in P$, поэтому $a_i - \varepsilon < x_i < b_i - \varepsilon$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$ (см. п. 1а доказательства теоремы 2), т.е. $x \in \operatorname{Int} K_\varepsilon(P)$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_{f(x)}$, $x' \notin \partial K_\varepsilon(P) \cup \operatorname{Int} K_\varepsilon(P) = K_\varepsilon(P)$ для любой точки $x' \neq x$, $x' \in f^{-1}\big(f(x)\big)$, т.е. x – изолированная точка в $f^{-1}\big(f(x)\big)$ и единственная точка из этого множества внутри параллелепипеда $K_\varepsilon(P)$. Очевидно, что в качестве окрестности $V(x)$ из леммы 3 можно взять любое множество $\operatorname{Int} K_\varepsilon(P)$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_{f(x)}$ и $\deg_f\big(P, f(x)\big) = \deg_f\big(K_\varepsilon(P), f(x)\big) = k(x)$. •

Следствие. *Если x – изолированная точка в $f^{-1}\big(f(x)\big)$, то существует $V(x)$ – окрестность точки x такая, что для любой ячейки $P \subset V(x)$, если $x \in P$, то $\deg_f\big(P, f(x)\big) = k(x)$.*

Очевидно, достаточно взять $V(x)$ из леммы 3, тогда x будет единственной точкой множества $f^{-1}\big(f(x)\big) \cap P$.

§3. Меры ориентированных частей образа множества

Определение. *Пусть x – изолированная точка множества $f^{-1}\big(f(x)\big)$. Назовем отображение f положительно ориентированным в точке x, если $k(x) > 0$, и отрицательно ориентированным в точке x, если $k(x) < 0$.*

Пусть $y \in \mathbb{R}^n$. Обозначим

$$f_+^{-1}(y) = \left\{x \in f^{-1}(y) \mid k(x) > 0\right\},$$
$$f_-^{-1}(y) = \left\{x \in f^{-1}(y) \mid k(x) < 0\right\}.$$

Для множества $E \subset G$ обозначим

$$N_f^+(E,y) = \begin{cases} \mathrm{card}(f_+^{-1}(y) \cap E), & \text{если множество } f_+^{-1}(y) \cap E \text{ конечно;} \\ +\infty, & \text{если } f_+^{-1}(y) \cap E \text{ -- бесконечно;} \end{cases}$$

$$N_f^-(E,y) = \begin{cases} \mathrm{card}(f_-^{-1}(y) \cap E), & \text{если множество } f_-^{-1}(y) \cap E \text{ конечно;} \\ +\infty, & \text{если } f_-^{-1}(y) \cap E \text{ -- бесконечно .} \end{cases}$$

Поскольку $f_+^{-1}(y)$ и $f_-^{-1}(y)$ не пересекаются и $f_+^{-1}(y) \cup f_-^{-1}(y) \subset f^{-1}(y)$, очевидно, что $N_f^+(E,y) + N_f^-(E,y) \leqslant N_f(E,y)$.

Теорема 3. *Если $f : G \to \mathbb{R}^n$ – отображение с локально конечной вариацией, P – ячейка, $\overline{P} \subset G$, то функции $N_f^+(P,y)$ и $N_f^-(P,y)$ суммируемы на $\mathbb{R}^n$ по мере Лебега.*

Доказательство. Обозначим $f_+(P) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \deg_f(P,y) > 0\}$. По теореме 2, функция $\deg_f(P)$ измерима, поэтому это множество измеримо. Если $\tau = \{P_k\}_{k=1}^m$ – разбиение множества P на дизъюнктные ячейки, то обозначим

$$N_\tau^+ = \sum_{k=1}^m \chi_{f_+(P_k)}.$$

(Здесь $\chi_{f_+(P_k)}$ – характеристическая функция множества $f_+(P_k)$). Очевидно, функция N_τ^+ измерима.

1. Докажем, что если τ' – более мелкое разбиение, чем τ, то $N_{\tau'}^+(y) \geqslant N_\tau^+(y)$ для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$. Поскольку разбиение τ' – более мелкое, чем τ, любая ячейка $P_k \in \tau$ представляется в виде $P_k = \bigcup\limits_{i=1}^{m_k} P_{ki}$, где множества P_{ki} принадлежат разбиению τ' и дизъюнктны. Тогда $\deg_f(P_k,y) = \sum\limits_{i=1}^{m_k} \deg_f(P_{ki},y)$ для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$ (в том числе для почти всех $y \in f_+(P_k)$). Так как для таких y $\deg_f(P_k,y) > 0$, то существует i, $1 \leqslant i \leqslant m_k$, для которого $\deg_f(P_{ki},y) > 0$, т.е. $y \in f_+(P_{ki})$, следовательно, $y \in \bigcup\limits_{i=1}^{m_k} f_+(P_{ki})$.

Получили, что $y \in f_+(P_k) \Rightarrow y \in \bigcup\limits_{i=1}^{m_k} f_+(P_{ki})$ для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$, т.е.

$$\chi_{f_+(P_k)}(y) \leqslant \sum_{i=1}^{m_k} \chi_{f_+(P_{ki})}(y).$$

Тогда

$$N_\tau^+(y) = \sum_{k=1}^{m} \chi_{f_+(P_k)}(y) \leqslant \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_k} \chi_{f_+(P_{ki})}(y) = N_{\tau'}^+(y) \text{ для п. в. } y \in \mathbb{R}^n.$$

2. Докажем, что $\chi_{f_+(P)}(y) \leqslant N_f^+(P,y)$ для п. в. $y \in \mathbb{R}^n$. В теореме 2, п. 2 было доказано, что существует ячейка $P_0 = \prod\limits_{i=1}^{n} [a_i - \varepsilon_0; b_i + \varepsilon_0) \subset \overline{P_0} \subset G$ такая, что для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$ множество $f^{-1}(y) \cap P_0$ конечно. Пусть y – такая точка и $\chi_{f_+(P)}(y) = 1$. Тогда $y \in f_+(P)$, т.е. $\deg_f(P,y) > 0$. Поскольку $f^{-1}(y) \cap P_0$ конечно, все точки $x \in f^{-1}(y) \cap P$ – изолированы. Очевидно, можно разбить P на конечное число дизъюнктных ячеек $\{P_k\}_{k=1}^m$, в каждой из которых содержится не более одной точки из $f^{-1}(y) \cap P$. Тогда $\deg_f(P,y) = \sum\limits_{k=1}^{m} \deg_f(P_k,y) > 0$, хотя бы одно из слагаемых $\deg_f(P_k,y)$ строго положительно и в соответствующей единственной точке $x \in f^{-1}(y) \cap P_k$ выполнено соотношение $k(x) = \deg_f(P_k,y) > 0$ (лемма 4), т.е. $x \in f_+^{-1}(y) \cap P$, и $N_f^+(P,y) = \operatorname{card}(f_+^{-1}(y) \cap P) \geqslant 1 = \chi_{f_+(P)}(y)$. Если $\chi_{f_+(P)}(y) = 0$, то $N_f^+(P,y) \geqslant 0$, т.е. $\chi_{f_+(P)}(y) \leqslant N_f^+(P,y)$ для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$.

3. Снова используем разбиения τ_s на 2^{sn} равных частей (см. теорему 1). Тогда τ_{s+1} – более мелкое разбиение, чем τ_s, для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$ имеем $N_{\tau_{s+1}}^+(y) \geqslant N_{\tau_s}^+(y)$ (п. 1), т.е. для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$ последовательность $\left\{N_{\tau_s}^+(y)\right\}_{s=1}^{\infty}$ монотонно возрастает и существует предел $\lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}^+(y)$ (конечный или равный $+\infty$).

Докажем, что $\lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}^+(y) \leqslant N_f^+(P,y)$ для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$.

Если $\tau = \{P_k\}_{k=1}^m$ – разбиение множества P на дизъюнктные ячейки, то

$$\operatorname{card}(f_+^{-1}(y) \cap P) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{card}(f_+^{-1}(y) \cap P_k), \text{ т.е. } N_f^+(P,y) = \sum_{k=1}^{m} N_f^+(P_k,y).$$

По п. 2, для любой ячейки P_k и почти всех $y \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $\chi_{f+(P_k)}(y) \leqslant N_f^+(P_k, y)$, а тогда

$$N_\tau^+(y) = \sum_{k=1}^{m} \chi_{f+(P_k)}(y) \leqslant \sum_{k=1}^{m} N_f^+(P_k, y) = N_f^+(P, y)$$

для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$. Поэтому и $\lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}^+(y) \leqslant N_f^+(P, y)$ для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$.

4. Докажем, что $\lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}^+(y) \geqslant N_f^+(P, y)$ для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $N_f^+(P, y) = q$ (конечное), тогда $f_+^{-1}(y) \cap P = \{x_1, \dots, x_q\}$. По определению множества $f_+^{-1}(y)$ и следствию из леммы 4 существуют окрестности $\{V_m(x_m)\}_{m=1}^q$ такие, что $\deg_f(P_m, y) = k(x_m) > 0$ для любой ячейки $P_m \subset V_m(x_m)$, $x_m \in P_m$. Из определения величины $k(x_m)$ ясно, что можно выбрать окрестности $V_m(x_m)$ попарно не пересекающимися. Пусть шар $B(x_m; r_m)$ содержится в $V_m(x_m)$ и $r_0 = \min\limits_{1\leqslant m\leqslant q}\{r_m\}$. Если P_{si} – ячейки, образующие разбиение τ_s, то $\operatorname{diam} P_{si} = \frac{1}{2^s} \operatorname{diam} P \to 0$ при $s \to \infty$ и существует s_0 такое, что $\operatorname{diam} P_{si} < r_0$ при $s > s_0$. Тогда, если $x_m \in P_{si_m}$, то $P_{si_m} \subset B(x_m; r_m) \subset V_m(x_m)$, $\deg_f(P_{si_m}, y) = k(x_m) > 0$, т.е. $y \in f_+(P_{si_m})$, а тогда характеристическая функция множества $f_+(P_{si_m})$ в точке y равна 1. Поскольку окрестности $V_m(x_m)$ попарно не пересекаются, соответствующие ячейки P_{si_m} все различны (их количество равно q) и

$$N_{\tau_s}^+(y) = \sum_{i=1}^{2^{sn}} \chi_{f+(P_{si})}(y) \geqslant q \text{ при } s > s_0, \text{ т.е. } \lim_{s\to\infty} N_{\tau_s}^+(y) \geqslant q = N_f^+(P, y).$$

Если же $N_f^+(P, y) = +\infty$, то и $N_f(P, y) = +\infty$, т.е. множество таких $y \in \mathbb{R}^n$ имеет меру 0 (следствие из теоремы 1).

Получили: $\lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}^+(y) \geqslant N_f^+(P, y)$ для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$. Из п. 3, 4 получаем: $\lim\limits_{s\to\infty} N_{\tau_s}^+(y) = N_f^+(P, y)$ для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$, функции $N_{\tau_s}^+$ измеримы, поэтому и функция $N_f^+(P)$ измерима. Доказательство измеримости функции $N_f^-(P)$ совершенно аналогично. Поскольку $N_f^+(P, y) + N_f^-(P, y) \leqslant N_f(P, y)$, из суммируемости функции $N_f(P)$ следует суммируемость функций $N_f^+(P)$ и $N_f^-(P)$. ●

Лемма 5. *Пусть* $f : G \to \mathbb{R}^n$ *– непрерывное отображение. Тогда*

1) Если $E = \bigcup\limits_k E_k \subset G$ *(объединение не более чем счетного семейства попарно дизъюнктных множеств), то* $N_f(E) = \sum\limits_k N_f(E_k)$.

2) Если $E_1 \subset E_2$*, то* $N_f(E_1) \leqslant N_f(E_2)$.

3) Если $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_k \subset E_{k+1} \subset \ldots$ *и* $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$*, то для любого* $y \in \mathbb{R}^n$ *справедлива формула* $N_f(E, y) = \lim\limits_{k\to\infty} N_f(E_k, y)$.

4) Если $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_k \supset E_{k+1} \supset \ldots,\ \ E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ *и* $N_f(E_1, y) < \infty$*, то* $N_f(E, y) = \lim\limits_{k\to\infty} N_f(E_k, y)$.

Если f*, кроме того, – отображение с локально конечной вариацией, то аналогичные утверждения верны для функций* $N_f^+(E)$ *и* $N_f^-(E)$.

Доказательство. Для любого $y \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство $f^{-1}(y) \cap E = \bigcup\limits_k \big(f^{-1}(y) \cap E_k\big)$, множества справа дизъюнктны, поэтому

$$\operatorname{card}\big(f^{-1}(y) \cap E\big) = \sum_k \operatorname{card}\big(f^{-1}(y) \cap E_k\big), \text{ т.е. } N_f(E, y) = \sum_k N_f(E_k, y).$$

Таким образом, $N_f(E, y)$ как функция множества E является мерой (мера с единичными нагрузками, сосредоточенная на множестве $f^{-1}(y)$), определенной для всех подмножеств множества G. Тогда утверждения 2, 3, 4 следуют из общих свойств меры (счетной аддитивности и монотонной непрерывности) на σ-алгебре. Аналогично, $N_f^+(E, y)$ и $N_f^-(E, y)$ как функции от E – это меры с единичными нагрузками, сосредоточенные, соответственно, на множествах $f_+^{-1}(y)$ и $f_-^{-1}(y)$, поэтому для них утверждения 2, 3, 4 тоже верны. •

Если f – отображение с локально конечной вариацией, то для ячейки P такой, что $\overline{P} \subset G$, обозначим

$$\nu_f^+(P) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f^+(P)\, d\lambda_n, \quad \nu_f^-(P) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f^-(P)\, d\lambda_n$$

(меры положительно и отрицательно ориентированных частей образа ячейки P с учетом кратности покрытия).

Из леммы 5 и свойств интеграла Лебега следует, что функции ν_f^+, ν_f^- и $V_f(P) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(P)\,d\lambda_n$ счетно аддитивны на полукольце ячеек $\{P \mid \overline{P} \subset G\}$, а тогда процессом Каратеодори их можно распространить на некоторые σ-алгебры подмножеств множества G. Обозначим эти σ-алгебры, соответственно, через $\mathfrak{A}_f^+$, $\mathfrak{A}_f^-$, $\mathfrak{A}_f$. Для распространений мер сохраним обозначения ν_f^+, ν_f^- и V_f (отметим, что σ-алгебра $\mathfrak{A}_f$ и мера V_f определены, если отображение f всего лишь непрерывно).

Лемма 6. *Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$ – отображение с локально конечной вариацией. Тогда:*

1) *Меры V_f, ν_f^+, ν_f^- σ-конечны.*

2) *Если $K \subset G$, K – борелевское множество, то K измеримо по отношению ко всем мерам V_f, ν_f^+, ν_f^-.*

3) *Меры V_f, ν_f^+, ν_f^- регулярны, т.е. для любого $E \subset G$ внешняя мера E задается формулой*

$$V_f^*(E) = \inf\bigl\{V_f(Q) \mid Q \quad \textit{открыто},\ E \subset Q \subset G\bigr\}$$

и множество $E \subset G$ измеримо по мере V_f тогда и только тогда, когда существуют множества K, $H \subset G$ типа G_δ такие, что $E \subset K$, $K \setminus E \subset H$, $V_f(H) = 0$ (очевидно, тогда $V_f(E) = V_f(K)$). Аналогично для ν_f^+, ν_f^-.

Доказательство. 1), 2). Если $Q \subset G$, Q – открыто, то, как известно (см., например, [6, гл.V, §4]), существует представление $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$, где P_k – дизъюнктные ячейки, при этом ячейки входят в Q вместе с их замыканиями. Поэтому множество Q измеримо по отношению ко всем мерам V_f, ν_f^+, ν_f^-. По определению отображения с локально конечной вариацией и по теореме 3 значения мер $V_f(P_k)$, $\nu_f^+(P_k)$, $\nu_f^-(P_k)$ конечны, т.е. меры V_f, ν_f^+, ν_f^- σ-конечны. Поскольку открытые множества измеримы, очевидно, измеримы и борелевские множества (в частности, компактные, а также множества типа G_δ и F_σ).

3). Пусть $P = \prod\limits_{i=1}^{n}[a_i; b_i)$, $\overline{P} \subset G$. Как отмечалось в ходе доказательства теоремы 2, существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $P_0 = \prod\limits_{i=1}^{n}[a_i - \varepsilon_0; b_i + \varepsilon_0) \subset \overline{P_0} \subset G$. Пусть $\Delta_k = \prod\limits_{i=1}^{n}\bigl(a_i - \frac{\varepsilon_0}{2^k}; b_i\bigr)$, тогда $\Delta_k \subset P_0$, поэтому $V_f(\Delta_k) \leqslant V_f(P_0) < \infty$. Очевидно, что

$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_k \supset \ldots$ и $P = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k$. В силу монотонной непрерывности меры $V_f(\Delta_k) \to V_f(P)$, т.е. для любой ячейки P такой, что $\overline{P} \subset G$, и любого $\varepsilon > 0$ существует открытый параллелепипед Δ, $\Delta \subset P \subset G$, для которого $V_f(\Delta) < V_f(P) + \varepsilon$. Далее, дословно повторяя доказательство теоремы V.5.5 из [6] (вместо меры Лебега проводим рассуждение для меры V_f), получим, что для любого $E \subset G$ внешняя мера множества E выражается через меры открытых множеств:

$$V_f^*(E) = \inf\left\{V_f(Q) \mid Q \quad \text{открыто}, \ E \subset Q \subset G\right\}$$

Теперь, используя σ-конечность меры V_f, доказываем (повторяя доказательство следствия 1 из теоремы V.5.5 и теоремы V.5.6 из [6]), что для любого $E \in \mathfrak{A}_f$ существуют такие множества K и H типа G_δ, что $E \subset K$, $K \setminus E \subset H$, $V_f(H) = 0$. Поскольку все множества, участвующие в доказательстве, содержатся в G, ясно, что $K \subset G$, $H \subset G$.

Пусть теперь $E \subset K \subset G$, $K \setminus E \subset H$, $V_f(H) = 0$, K и H — типа G_δ. Поскольку продолжение меры по Каратеодори дает полную меру, $K \setminus E$ измеримо, а тогда и $E = K \setminus (K \setminus E)$ измеримо.

Для мер ν_f^+, ν_f^- доказательство вполне аналогично. •

Теорема 4. *Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$ – отображение с локально конечной вариацией. Тогда справедливы следующие утверждения.*

I) *Если E измеримо по мере V_f, то функция $N_f(E)$ измерима по мере Лебега и $V_f(E) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(E)\, d\lambda_n$ (аналогично для мер ν_f^+, ν_f^-).*

II) $\mathfrak{A}_f \subset \mathfrak{A}_f^+ \cap \mathfrak{A}_f^-$.

III) *Для любого $E \in \mathfrak{A}_f$ верно неравенство $\nu_f^+(E) + \nu_f^-(E) \leqslant V_f(E)$.*

IV) *Если $E \subset G$, E компактно, то $V_f(E)$, $\nu_f^+(E)$, $\nu_f^-(E)$ конечны.*

V) *Пусть $G' \subset G$, G' открыто в $\mathbb{R}^n$, $f_1 = f|_{G'}$. Тогда*

$$\left(E \in \mathfrak{A}_{f_1}^+\right) \Longleftrightarrow \left(E \subset G' \text{ и } E \in \mathfrak{A}_f^+\right)$$

и для таких множеств $\nu_{f_1}^+(E) = \nu_f^+(E)$. Аналогично для $E \in \mathfrak{A}_{f_1}^-$ и $E \in \mathfrak{A}_{f_1}$.

Доказательство. I.1. Если $E \subset G$, E – открыто, то $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$ (объединение дизъюнктных ячеек таких, что $\overline{P_k} \subset G$). Тогда

$N_f(E)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}N_f(P_k)$ (по лемме 5). По теореме 1, функции $N_f(P_k)$ измеримы по мере Лебега, тогда и функция $N_f(E)$ измерима и

$$V_f(E)=\sum_{k=1}^{\infty}V_f(P_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}N_f(P_k)\,d\lambda_n=\int\limits_{\mathbb{R}^n}N_f(E)\,d\lambda_n.$$

Для мер ν_f^+ и ν_f^- доказательство аналогично, со ссылкой на теорему 3.

2. Пусть E – множество типа G_δ и $V_f(E)<\infty$. Тогда $E=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k$, G_k – открыты и по п. 3 леммы 6 существует открытое множество $G'\subset G$ такое, что $E\subset G'$, $V_f(G')<V_f(E)+1<\infty$. Рассмотрим открытые множества $Q_k=\bigcap\limits_{p=1}^{k}G_p\cap G'$. Очевидно, что

$$G\supset G'\supset Q_1\supset Q_2\supset\ldots\supset Q_k\supset\ldots,\ \bigcap_{k=1}^{\infty}Q_k=E \text{ и } V_f(Q_1)\leqslant V_f(G')<\infty.$$

$V_f(Q_1)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}N_f(Q_1)\,d\lambda_n<\infty$, поэтому $N_f(Q_1,y)<\infty$ для почти всех $y\in\mathbb{R}^n$. По п. 2 и 4 леммы 5, тогда для почти всех $y\in\mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$N_f(E,y)=\lim_{k\to\infty}N_f(Q_k,y)\quad \text{и}\quad 0\leqslant N_f(E,y)\leqslant N_f(Q_1,y).$$

Функция $N_f(E)$ измерима (для почти всех $y\in\mathbb{R}^n$ является пределом последовательности измеримых функций $N_f(Q_k)$) и по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}N_f(E)\,d\lambda_n=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n}N_f(Q_k)\,d\lambda_n=\lim_{k\to\infty}V_f(Q_k).$$

По монотонной непрерывности меры, $\lim\limits_{k\to\infty}V_f(Q_k)=V_f(E)$.

3. Пусть $V_f(E)=0$. По п. 4 леммы 6, существует такое множество K типа G_δ, что $E\subset K$, $V_f(K)=0=\int\limits_{\mathbb{R}^n}N_f(K)\,d\lambda_n$. Поскольку $N_f(K)\geqslant 0$, для почти всех $y\in\mathbb{R}^n$ имеем $N_f(K,y)=0$.

По лемме 6, $0\leqslant N_f(E,y)\leqslant N_f(K,y)$, т.е. $N_f(E,y)=0$ для почти всех $y\in\mathbb{R}^n$, функция $N_f(E)$ измерима и $\int\limits_{\mathbb{R}^n}N_f(E)\,d\lambda_n=0=V_f(E)$.

4. Пусть $V_f(E) < \infty$. По лемме 6, существует такое множество K типа G_δ, что $E \subset K$, $V_f(K \setminus E) = 0$. Тогда $K = E \cup (K \setminus E)$, $E \cap (K \setminus E) = \varnothing$, по лемме 5 $N_f(K) = N_f(E) + N_f(K \setminus E)$. По доказанному в п. 2 и 3, функции $N_f(K)$ и $N_f(K \setminus E)$ измеримы, следовательно и функция $N_f(E)$ измерима. Поскольку функция $N_f(K \setminus E)$ равна нулю почти всюду, $N_f(K)$ и $N_f(E)$ почти всюду равны. Получаем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(E)\,d\lambda_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(K)\,d\lambda_n = V_f(K) = V_f(E).$$

5. Пусть E – произвольное множество, измеримое по мере V_f. Поскольку мера V_f σ-конечна, существует последовательность дизъюнктных множеств $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, $V_f(E_k) < \infty$. По лемме 5, $N_f(E) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} N_f(E_k)$, все $N_f(E_k)$ измеримы и, по доказанному ранее, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(E_k)\,d\lambda_n = V_f(E_k)$. Тогда функция $N_f(E)$ измерима и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(E)\,d\lambda_n = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(E_k)\,d\lambda_n = \sum_{k=1}^{\infty} V_f(E_k) = V_f(E).$$

Доказательство п. 2 – 5 для мер ν_f^+ и ν_f^- – буквальное повторение доказательства для V_f.

II. Пусть $E \in \mathfrak{A}_f$, тогда, по лемме 6, $E = K \setminus E_1$, где K – множество типа G_δ, а $V_f(E_1) = 0$. По той же лемме 6, $E_1 \subset H$, множество H – типа G_δ, и $V_f(H) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(H)\,d\lambda_n = 0$, а тогда $N_f(H, y) = 0$ для почти всех $y \in \mathbb{R}^n$.

По замечанию перед теоремой 3 после определения функций $N_f^+(H)$ и $N_f^-(H)$ имеем: $N_f^+(H) + N_f^-(H) \leqslant N_f(H)$, т.е. функции $N_f^+(H)$ и $N_f^-(H)$ тоже равны нулю почти всюду, а тогда $\nu_f^+(H) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f^+(H)\,d\lambda_n = 0$, $\nu_f^-(H) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f^-(H)\,d\lambda_n = 0$. Стандартное продолжение – полная мера, $E_1 \subset H$, поэтому $E_1 \in \mathfrak{A}_f^+ \cap \mathfrak{A}_f^- \Longrightarrow E = K \setminus E_1 \in \mathfrak{A}_f^+ \cap \mathfrak{A}_f^-$.

III. Если $E \in \mathfrak{A}_f$, то $E \in \mathfrak{A}_f^+ \cap \mathfrak{A}_f^-$, а тогда $N_f^+(E) + N_f^-(E) \leqslant N_f(E)$; по доказанному утверждению I, функции

$N_f(E)$, $N_f^+(E)$, $N_f^-(E)$ измеримы, поэтому

$$\nu_f^+(E)+\nu_f^-(E)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f^+(E)\,d\mu_n+\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f^-(E)\,d\lambda_n\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f(E)d\lambda_n=V_f(E).$$

IV. Пусть $E\subset G$, E – компактно, тогда легко проверяется, что расстояние от E до $\mathbb{R}^n\setminus G$ положительно, т.е. $d_0=\inf\{\rho(x,z)\mid x\in E, z\in\mathbb{R}^n\setminus G\}>0$. Если Δ_x – открытый куб диаметром d_0 с центром в точке x, Δ'_x – ячейка с теми же гранями, то очевидно, что если $x\in E$, то $\overline{\Delta'_x}\subset G$, т.е.

$$E\subset\bigcup_{x\in E}\Delta_x\subset\bigcup_{x\in E}\overline{\Delta'_x}\subset G.$$

Выберем из покрытия $\{\Delta_x\}_{x\in E}$ конечное подпокрытие $\{\Delta_{x_k}\}_{k=1}^p$. Так как отображение f – с локально конечной вариацией, то $V_f(\Delta'_{x_k})<\infty$ при $k=1,\dots,p$, а тогда

$$V_f(E)\leqslant\sum_{k=1}^p V_f(\Delta'_{x_k})<\infty.$$

Из п. III следует, что и $\nu_f^+(E)<\infty$, $\nu_f^-(E)<\infty$.

V. Поскольку кратность точки x при отображении f определяется локально (см. лемму 3), для любой точки $x\in G'$ имеем $k_{f_1}(x)=k_f(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}f_{1+}^{-1}(y)&=\{x\in f_1^{-1}(y)\mid k_{f_1}(x)>0\}=\\&=\{x\in f^{-1}(y)\cap G'\mid k_f(x)>0\}=f_+^{-1}(y)\cap G'\end{aligned}$$

и для любого $E\subset G'$

$$\operatorname{card}(f_{1+}^{-1}(y)\cap E)=\operatorname{card}(f_+^{-1}(y)\cap E),\Longrightarrow N_{f_1}^+(E,y)=N_f^+(E,y).$$

1) Пусть $E\in\mathfrak{A}_{f_1}^+$, тогда $E\subset\operatorname{dom}f_1=G'$. По лемме 6 (п. 3) существуют множества $K,H\subset G'$, K и H – типа G_δ, такие, что $E\subset K$, $K\setminus E\subset H$ и $\nu_{f_1}^+(H)=0$. Тогда

$$\nu_f^+(H)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f^+(H)\,d\lambda_n=\int\limits_{\mathbb{R}^n} N_{f_1}^+(H)\,d\lambda_n=\nu_{f_1}^+(H)=0$$

и, снова по лемме 6, получаем: $E\in\mathfrak{A}_f^+$.

2) Пусть $E \in \mathfrak{A}_f^+$, $E \subset G'$. По лемме 6 существуют множества $K, H \subset G$, K, H – типа G_δ, такие, что $E \subset K$, $K \setminus E \subset H$ и $\nu_f^+(H) = 0$. Положим $K_1 = K \cap G'$, $H_1 = H \cap G'$. Очевидно, K_1, H_1 — типа G_δ и, поскольку $E \subset G'$, ясно, что $E \subset K_1$, $K_1 \setminus E \subset H_1$, $\nu_f^+(H_1) = 0$. Как и выше, тогда и $\nu_{f_1}^+(H_1) = 0$, т.е. $E \in \mathfrak{A}_{f_1}^+$ по лемме 6. Для таких E

$$\nu_f^+(E) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f^+(E)\, d\lambda_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_{f_1}^+(E)\, d\lambda_n = \nu_{f_1}^+(E).$$

Доказательство для $\mathfrak{A}_{f_1}^-$ вполне аналогично, а в доказательстве для $\mathfrak{A}_{f_1}$ используется очевидное равенство $f_1^{-1}(y) \cap E = f^{-1}(y) \cap E$ (для $E \subset G'$). •

Пусть G_1, G_2 – открытые связные множества в $\mathbb{R}^n$, φ – гомеоморфизм множества G_1 на G_2. Тогда, как известно ([5, гл. VIII, §4]), либо $\deg \varphi = \deg_\varphi \big(K, \varphi(x)\big) = 1$ для любой точки $x \in G_1$ и любого n-мерного компакта с краем $K \subset G_1$ такого, что $x \in \operatorname{Int} K$, либо $\deg \varphi = \deg_\varphi \big(K, \varphi(x)\big) = -1$ для таких же x и K. В первом случае гомеоморфизм φ называется *сохраняющим ориентацию*, а во втором – *обращающим ориентацию*.

Теорема 5. *Пусть G_1, G_2 – открытые связные множества в $\mathbb{R}^n$, φ – гомеоморфизм множества G_1 на G_2, f – непрерывное отображение G_2 в $\mathbb{R}^n$. Тогда:*

1) *(f – отображение с локально конечной вариацией)$\Longleftrightarrow$ ($f \circ \varphi$ – отображение с локально конечной вариацией);*

2) *$(E \in \mathfrak{A}_{f\circ\varphi}) \Longleftrightarrow (\varphi(E) \in \mathfrak{A}_f)$, при этом $V_{f\circ\varphi}(E) = V_f(\varphi(E))$;*

3) *если φ сохраняет ориентацию, то*

$$(E \in \mathfrak{A}_{f\circ\varphi}^+) \Longleftrightarrow (\varphi(E) \in \mathfrak{A}_f^+), \quad (E \in \mathfrak{A}_{f\circ\varphi}^-) \Longleftrightarrow (\varphi(E) \in \mathfrak{A}_f^-),$$

при этом

$$\nu_{f\circ\varphi}^+(E) = \nu_f^+(\varphi(E)) \quad \nu_{f\circ\varphi}^-(E) = \nu_f^-(\varphi(E));$$

4) *если φ обращает ориентацию, то*

$$(E \in \mathfrak{A}_{f\circ\varphi}^+) \Longleftrightarrow (\varphi(E) \in \mathfrak{A}_f^-), \quad (E \in \mathfrak{A}_{f\circ\varphi}^-) \Longleftrightarrow (\varphi(E) \in \mathfrak{A}_f^+),$$

при этом

$$\nu_{f\circ\varphi}^+(E) = \nu_f^-(\varphi(E)) \quad \nu_{f\circ\varphi}^-(E) = \nu_f^+(\varphi(E)).$$

Доказательство. 1.1. Докажем вначале, что $N_{f\circ\varphi}(E) = N_f\big(\varphi(E)\big)$ для любого $E \subset G_1$. Поскольку φ – биекция, легко проверяется, что

$$\varphi\big((f\circ\varphi)^{-1}(y)\cap E\big) = f^{-1}(y)\cap\varphi(E) \Longrightarrow \\ \operatorname{card}\big((f\circ\varphi)^{-1}(y)\cap E\big) = \operatorname{card}\big(f^{-1}(y)\cap\varphi(E)\big) \Longrightarrow \\ N_{f\circ\varphi}(E,y) = N_f\big(\varphi(E),y\big).$$

1.2. Пусть f – с локально конечной вариацией, P – ячейка, $\overline{P} \subset G_1$. Так как P – множество типа G_δ, φ – гомеоморфизм, то множество $\varphi(P)$ – тоже типа G_δ, т.е. измеримо по мере V_f (лемма 6). Поскольку $\varphi(\overline{P})$ компактно, $V_f(\varphi(\overline{P})) < \infty$, а тогда и $V_f(\varphi(P)) < \infty$. Используя п. 1.1 и теорему 4, получаем:

$$V_{f\circ\varphi}(P) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_{f\circ\varphi}(P)\,d\lambda_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f\big(\varphi(P)\big)\,d\lambda_n = V_f(\varphi(P)) < \infty,$$

т.е. $f\circ\varphi$ – тоже с локально конечной вариацией. Обратное утверждение следует из того, что φ^{-1} – тоже гомеоморфизм.

2. Пусть $E \in \mathfrak{A}_{f\circ\varphi}$, тогда по лемме 6 имеем $E = K\setminus E_1$, $E_1 \subset H$, $K \subset G_1$ и $H \subset G_1$ – множества типа G_δ, $V_{f\circ\varphi}(H) = 0$. Поскольку φ – биекция, верны соотношения $\varphi(E) = \varphi(K)\setminus\varphi(E_1)$, $\varphi(E_1)\subset\varphi(H)\subset G_2$, $\varphi(K)\subset G_2$ и, поскольку φ – гомеоморфизм, $\varphi(K)$, $\varphi(H)$ – тоже множества типа G_δ, т.е. измеримы по мере V_f. По теореме 4 и по доказанному в п. 1.1 и 1.2 тогда

$$V_f(\varphi(H)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f\big(\varphi(H)\big)\,d\lambda_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_{f\circ\varphi}(H)\,d\lambda_n = V_{f\circ\varphi}(H) = 0.$$

Так как $\varphi(E_1)\subset\varphi(H)$ и мера V_f – полна, то $\varphi(E_1)\in\mathfrak{A}_f$ и $\varphi(E)\in\mathfrak{A}_f$ (поскольку $\varphi(E) = \varphi(K)\setminus\varphi(E_1)$). Снова по теореме 4 и п. 1.1 и 1.2

$$V_f(\varphi(E)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f\big(\varphi(E)\big)\,d\lambda_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_{f\circ\varphi}(E)\,d\lambda_n = V_{f\circ\varphi}(E).$$

Так как φ^{-1} – тоже гомеоморфизм, то

$$\varphi(E)\in\mathfrak{A}_f = \mathfrak{A}_{f\circ\varphi\circ\varphi^{-1}} \Longrightarrow E = \varphi^{-1}\big(\varphi(E)\big)\in\mathfrak{A}_{f\circ\varphi}$$

и утверждение 2 доказано.

3. Докажем, что кратность точки $x \in G_1$ при отображении $f \circ \varphi$ определена тогда и только тогда, когда определена кратность точки $\varphi(x) \in G_2$ при отображении f и $k_{f\circ\varphi}(x) = \deg\varphi \cdot k_f\big(\varphi(x)\big)$.

Пусть определена кратность $k_f\big(\varphi(x)\big)$, т.е., согласно лемме 3, существует окрестность V точки $\varphi(x)$ со свойством: для любого компактного n-мерного многообразия K с краем такого, что $K \subset V$, $\varphi(x) \in \operatorname{Int} K$, степень $\deg_f\big(K, f(\varphi(x)\big)$ равна $k_f\big(\varphi(x)\big)$ (не зависит от K). Так как φ – гомеоморфизм, то $\varphi^{-1}(V) = V_1$ – окрестность точки x. Если K_1 — компактное n-мерное многообразие с краем, $K_1 \subset V_1$, $x \in \operatorname{Int} K_1$, то $K = \varphi(K_1)$ – тоже компактное n-мерное многообразие с краем, $K \subset \varphi(V_1) = V$ и

$$\varphi(x) \in \varphi\big(\operatorname{Int} K_1\big) = \operatorname{Int}\varphi(K_1) = \operatorname{Int} K.$$

По замечанию перед леммой 3

$$\deg_{f\circ\varphi}\big(K_1, (f\circ\varphi)(x)\big) = \deg_{f\circ\varphi}\big(\operatorname{Int} K_1, (f\circ\varphi)(x)\big),$$
$$\deg_f\big(\varphi(K_1), f(\varphi(x))\big) = \deg_f\big(\operatorname{Int}\varphi(K_1), f(\varphi(x))\big).$$

Так как $\deg_{f\circ\varphi}\big(\operatorname{Int} K_1, (f\circ\varphi)(x)\big) = \deg\varphi \cdot \deg_f\big(\operatorname{Int}\varphi(K_1), f(\varphi(x))\big)$ (см. [5], гл. VIII, §4, следствие 4.6) и по свойствам множества $K = \varphi(K_1)$ величина $\deg_f\big(K, f(\varphi(x))\big) = k_f\big(\varphi(x)\big)$ не зависит от K, то $\deg_{f\circ\varphi}\big(K_1, (f\circ\varphi)(x)\big) = \deg\varphi \cdot k_f\big(\varphi(x)\big)$ не зависит от $K_1 \subset V_1$, т.е. определена кратность $k_{f\circ\varphi}(x) = \deg\varphi \cdot k_f\big(\varphi(x)\big)$. Аналогично, если определена кратность $k_{f\circ\varphi}(x)$, то определена и кратность $k_f\big(\varphi(x)\big)$ (φ^{-1} – тоже гомеоморфизм).

4. Пусть φ сохраняет ориентацию, т.е. $\deg\varphi = 1$ и $k_f\big(\varphi(x)\big) = k_{f\circ\varphi}(x)$. Тогда

$$x \in (f\circ\varphi)_+^{-1}(y) \cap E \iff \begin{cases} x \in E \\ x \in (f\circ\varphi)^{-1}(y) \\ k_{f\circ\varphi}(x) > 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \varphi(x) \in \varphi(E) \\ f(\varphi(x)) = y \\ k_f\big(\varphi(x)\big) > 0 \end{cases} \iff \varphi(x) \in f_+^{-1}(y) \cap \varphi(E)$$

т.е. $f_+^{-1}(y) \cap \varphi(E) = \varphi\big((f\circ\varphi)_+^{-1}(y) \cap E\big)$, а тогда

$$\operatorname{card}\big(f_+^{-1}(y) \cap \varphi(E)\big) = \operatorname{card}\big((f\circ\varphi)_+^{-1}(y) \cap E\big),$$
$$\text{т.е. } N_f^+\big(\varphi(E), y\big) = N_{f\circ\varphi}^+(E, y).$$

Аналогично доказывается, что $N_f^-\big(\varphi(E),y\big) = N_{f\circ\varphi}^-(E,y)$.

Если же φ обращает ориентацию, то $\deg\varphi = -1$, $k_f\big(\varphi(x)\big) = -k_{f\circ\varphi}(x)$ и $f_+^{-1}(y)\cap\varphi(E) = \varphi\big((f\circ\varphi)_-^{-1}(y)\cap E\big)$, $f_-^{-1}(y)\cap\varphi(E) = \varphi\big((f\circ\varphi)_+^{-1}(y)\cap E\big)$, т.е. $N_f^+\big(\varphi(E),y\big) = N_{f\circ\varphi}^-(E,y)$, $N_f^-\big(\varphi(E),y\big) = N_{f\circ\varphi}^+(E,y)$.

5. Пусть $E\in\mathfrak{A}_{f\circ\varphi}^+$, тогда по лемме 6 имеем $E\subset K$, $K\setminus E\subset H$, $K\subset G_1$ и $H\subset G_1$ – множества типа G_δ и $\nu_{f\circ\varphi}^+(H) = 0$. Поскольку φ – гомеоморфизм, $\varphi(K)\subset G_2$ и $\varphi(H)\subset G_2$ – тоже множества типа G_δ, т.е. измеримы по мерам ν_f^+ и ν_f^-. По доказанному в п. 4 и по теореме 4, если φ сохраняет ориентацию, то

$$\nu_f^+\big(\varphi(H)\big) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f^+\big(\varphi(H)\big)\,d\lambda_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_{f\circ\varphi}^+(H)\,d\lambda_n = \nu_{f\circ\varphi}^+(H) = 0,$$

а если φ обращает ориентацию, то

$$\nu_f^-\big(\varphi(H)\big) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f^-\big(\varphi(H)\big)\,d\lambda_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_{f\circ\varphi}^+(H)\,d\lambda_n = \nu_{f\circ\varphi}^+(H) = 0.$$

Поскольку $K\setminus E\subset H$ и φ биективно, $\varphi(K\setminus E) = \varphi(K)\setminus\varphi(E)\subset\varphi(H)$. Ввиду полноты меры ν_f^+, если φ сохраняет ориентацию, то $\varphi(K)\setminus\varphi(E)\in\mathfrak{A}_f^+$. Тогда и $\varphi(E) = \varphi(K)\setminus\big(\varphi(K)\setminus\varphi(E)\big)\in\mathfrak{A}_f^+$ и по п. 4

$$\nu_f^+\big(\varphi(E)\big) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f^+\big(\varphi(E)\big)\,d\lambda_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_{f\circ\varphi}^+(E)\,d\lambda_n = \nu_{f\circ\varphi}^+(E).$$

Ввиду полноты меры ν_f^-, если φ обращает ориентацию, то $\varphi(K)\setminus\varphi(E)\in\mathfrak{A}_f^- \Longrightarrow \varphi(E)\in\mathfrak{A}_f^-$ и

$$\nu_f^-\big(\varphi(E)\big) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_f^-\big(\varphi(E)\big)\,d\lambda_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_{f\circ\varphi}^+(E)\,d\lambda_n = \nu_{f\circ\varphi}^+(E).$$

Если $E\in\mathfrak{A}_{f\circ\varphi}^-$, доказательство вполне аналогично. Утверждения

$$\varphi(E)\in\mathfrak{A}_f^+ \Longrightarrow E\in\mathfrak{A}_{f\circ\varphi}^+,\qquad \varphi(E)\in\mathfrak{A}_f^+ \Longrightarrow E\in\mathfrak{A}_{f\circ\varphi}^-$$

следуют из того, что φ^{-1} – гомеоморфизм. $\bullet$

§4. Многообразия с локально конечными вариациями

Определение. *Пусть множество G открыто в $\mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant n)$ – непрерывное отображение, $f_1, \dots, f_m$ — его координатные функции. Если $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqslant m$, $\alpha = \{i_1, \dots, i_n\}$, то обозначим через f_α отображение с координатными функциями $f_{i_1}, \dots, f_{i_n}$:*

$$f_\alpha : \begin{cases} x_{i_1} = f_{i_1}(t_1, \dots, t_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{i_n} = f_{i_n}(t_1, \dots, t_n) \end{cases} \quad (t_1, \dots, t_n) \in G.$$

Назовем отображение f отображением с локально конечными вариациями, если каждое из отображений $f_\alpha : G \to \mathbb{R}^n$ будет отображением с локально конечной вариацией.

Определение. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$, M – n-мерное многообразие в топологии, индуцированной из $\mathbb{R}^m$. Назовем M многообразием с локально конечными вариациями, вложенным в $\mathbb{R}^m$, если для любой точки $x \in M$ существует U – окрестность точки x в M и f – гомеоморфизм $\mathbb{R}^n$ на U с локально конечными вариациями (локальная параметризация окрестности U).*

Замечание. *Если некоторая локальная параметризация окрестности U – отображение с локально конечными вариациями, то и любая другая ее параметризация тоже является отображением с локально конечными вариациями.* В самом деле, если $f : \mathbb{R}^n \to U$ и $g : \mathbb{R}^n \to U$ – гомеоморфизмы, то $\varphi = f^{-1} \circ g$ – гомеоморфизм пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, $g = f \circ \varphi$, для любого $\alpha = \{i_1, \dots, i_n\}$ верна формула $g_\alpha = f_\alpha \circ \varphi$ и по теореме 5 g_α и f_α одновременно будут (или не будут) отображениями с локально конечной вариацией.

Если $U \subset \mathbb{R}^m$ и существует гомеоморфизм $f : \mathbb{R}^n \to U$, то хорошо известно, что на U может быть введена ориентация, например, следующим способом: пусть g – любой другой гомеоморфизм пространства $\mathbb{R}^n$ на U, $g = f \circ \varphi$. Если $\deg \varphi = 1$, то g отнесем к классу I, а если $\deg \varphi = -1$, то g отнесем к классу II. Ориентация на U определяется выбором одного из этих двух классов в качестве "положительных" параметризаций.

Пусть M – многообразие, U, $V \subset M$, $U \cap V \neq \varnothing$ и $f : \mathbb{R}^n \to U$, $g : \mathbb{R}^n \to V$ – положительные параметризации ориентированных окрестностей U и V. Тогда $\varphi = f^{-1} \circ g$ – гомеоморфизм открытого множества $G_1 = g^{-1}(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ на $G_2 = f^{-1}(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$.

Окрестности U и V ориентированы согласованно, если $\deg\varphi = 1$, и многообразие M ориентируемо, если возможно выбрать согласованную ориентацию для всех его параметризованных окрестностей.

Определение. *Пусть M – ориентированное n-мерное многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant n)$, с локально конечными вариациями, пусть $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant m$, $\alpha = \{i_1, \ldots, i_n\}$. Множество $E \subset M$ назовем малым α^+-измеримым, если существуют U – окрестность некоторой точки в M, $f : \mathbb{R}^n \to U$ – положительная параметризация U, такие, что $E \subset U$, $f^{-1}(E) \in \mathfrak{A}^+_{f_\alpha}$. Для такого множества E положим по определению $\mu^+_\alpha(E) = \nu^+_{f_\alpha}\bigl(f^{-1}(E)\bigr)$.*

Лемма 7. *Свойство множества E быть малым α^+-измеримым и величина $\mu^+_\alpha(E)$ не зависят ни от окрестности $U \supset E$, ни от положительной параметризации f.*

Доказательство. Для $E = \varnothing$ утверждение очевидно.

Пусть $E \neq \varnothing$, $E \subset U \cap V$, f – положительная параметризация множества U, g – положительная параметризация V. Тогда $\varphi = f^{-1} \circ g$ – гомеоморфизм множества $G_1 = g^{-1}(U \cap V)$ на $G_2 = f^{-1}(U \cap V)$ и $\deg\varphi = 1$. Обозначим $\overline{f}_\alpha = f_\alpha|_{G_2}$, $\overline{g}_\alpha = g_\alpha|_{G_1}$, тогда очевидно, что $\overline{g}_\alpha = \overline{f}_\alpha \circ \varphi$.

Если $E_1 = g^{-1}(E) \in \mathfrak{A}^+_{g_\alpha}$, то, поскольку $E_1 \subset G_1$, по теореме 4 (утверждение V) получаем, что $E_1 \in \mathfrak{A}^+_{\overline{g}_\alpha} = \mathfrak{A}^+_{\overline{f}_\alpha \circ \varphi}$. Очевидно, что $E_2 = f^{-1}(E) = \varphi(E_1)$ и, поскольку $\deg\varphi = 1$, по теореме 5 (утверждение 3) отсюда следует, что $\varphi(E_1) = E_2 \in \mathfrak{A}^+_{\overline{f}_\alpha}$. Снова по теореме 4 получаем, что $E_2 \in \mathfrak{A}^+_{f_\alpha}$. Аналогично, $E_2 \in \mathfrak{A}^+_{f_\alpha} \Longrightarrow E_1 \in \mathfrak{A}^+_{g_\alpha}$. При этом

$$\nu^+_{g_\alpha}\bigl(g^{-1}(E)\bigr) = \nu^+_{\overline{g}_\alpha}(E_1) \quad \text{(теорема 4)};$$

$$\nu^+_{\overline{g}_\alpha}(E_1) = \nu^+_{\overline{f}_\alpha \circ \varphi}(E_1) = \nu^+_{\overline{f}_\alpha}\bigl(\varphi(E_1)\bigr) \quad \text{(теорема 6)};$$

$$\nu^+_{\overline{f}_\alpha}\bigl(\varphi(E_1)\bigr) = \nu^+_{f_\alpha}(E_2) = \nu^+_{f_\alpha}\bigl(f^{-1}(E)\bigr) \quad \text{(теорема 4)}.$$

Получили: $\nu^+_{g_\alpha}\bigl(g^{-1}(E)\bigr) = \nu^+_{f_\alpha}\bigl(f^{-1}(E)\bigr)$. •

Определение. *Множество $E \subset M$ назовем α^+-измеримым, если для любой параметризуемой окрестности $U \subset M$ множество $E \cap U$ – малое α^+-измеримое.*

Лемма 8. *α^+-измеримые подмножества ориентированного n-мерного многообразия $M \subset \mathbb{R}^m$ с локально конечными вариациями образуют σ-алгебру, содержащую все борелевские подмножества в M.*

Доказательство. 1) Пусть $f : \mathbb{R}^n \to U$ – положительная параметризация окрестности $U \subset M$. По определению малого α^+-измеримого множества

$$(E \subset U, \quad E \text{ – малое } \alpha^+\text{-измеримое}) \Longleftrightarrow f^{-1}(E) \in \mathfrak{A}^+_{f_\alpha}.$$

Поскольку $\mathfrak{A}^+_{f_\alpha}$ – σ-алгебра, с помощью операций над прообразами легко проверяется, что малые α^+-измеримые подмножества окрестности U тоже образуют σ-алгебру.

2) Пусть $E \subset M$, $\quad E$ – α^+-измеримое множество. Тогда для любой параметризуемой окрестности U множество $E \cap U$ – малое α^+-измеримое, следовательно, по п. 1, $(M \setminus E) \cap U = U \setminus (E \cap U)$ – тоже малое α^+-измеримое, т.е. $M \setminus E$ – α^+-измеримо.

3) Пусть $\{E_k\}$ – не более чем счетное семейство, все множества E_k – α^+-измеримые, $E = \bigcup\limits_k E_k$. Тогда все $E_k \cap U$ – малые α^+-измеримые, $E \cap U = \bigcup\limits_k (E_k \cap U)$ – тоже малое α^+-измеримое (п. 1), т.е. $E = \bigcup\limits_k E_k$ — α^+-измеримо.

4) Пусть множество G открыто в M, тогда для параметризуемой окрестности $U \subset M$ множество $G \cap U$ тоже открыто и $f^{-1}(G \cap U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$. В ходе доказательства леммы 6 было показано, что открытые подмножества области определения отображения из формулировки леммы 6 (в нашем случае это отображение $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) измеримы по мере $\nu^+_{f_\alpha}$, т.е. $f^{-1}(G \cap U) \in \mathfrak{A}^+_{f_\alpha}$, множество $G \cap U$ – малое α^+-измеримое, значит, множество G α^+-измеримо. По п. 2, 3, α^+-измеримы все борелевские множества. •

Обозначим σ-алгебру α^+-измеримых подмножеств в M через $\mathfrak{A}^+_\alpha$. Поскольку у топологии в M существует счетный базис параметризуемых окрестностей, любое множество $E \in \mathfrak{A}^+_\alpha$ может быть представлено в виде объединения не более чем счетного семейства малых α^+-измеримых множеств: $E = \bigcup\limits_k E_k, \quad E_k \subset U_k$. Множества E_k можно считать попарно дизъюнктными (если это не так, то $E'_1 = E_1,\ E'_2 = E_2 \setminus E_1, \dots, E'_k = E_k \setminus \bigcup\limits_{p=1}^{k-1} E_p, \dots$ – тоже малые α^+-измеримые и попарно дизъюнктные).

Определение. *Если $E = \bigcup\limits_k E_k$ (дизъюнктное объединение не более чем счетного семейства малых α^+-измеримых множеств), то положим*

$$\mu_\alpha^+(E) = \sum_k \mu_\alpha^+(E_k).$$

Лемма 9. *Функция μ_α^+ корректно определена на σ-алгебре $\mathfrak{A}_\alpha^+$, является σ-конечной полной мерой, при этом, если $K \subset M$, K – компактно, то $\mu_\alpha^+(K) < \infty$.*

Доказательство. 1) Корректность определения.
По определению меры малого измеримого множества, для любого измеримого $E \subset U = f(\mathbb{R}^n)$ верна формула $\mu_\alpha^+(E) = \nu_{f_\alpha}^+\big(f^{-1}(E)\big)$. Поскольку $\nu_{f_\alpha}^+$ – мера, легко проверяется, что μ_α^+ – тоже мера на подмножествах в U (по лемме 7, она не зависит от f). Пусть $E = \bigcup\limits_k E_k = \bigcup\limits_p E'_p$, $\quad E_k \subset U_k,\ E'_p \subset U'_p$ (дизъюнктные объединения не более чем счетных семейств малых измеримых множеств). Тогда $E_{kp} = E_k \cap E'_p$ – тоже малые измеримые попарно дизъюнктные множества и $E_k = \bigcup\limits_p E_{kp} \Longrightarrow \mu_\alpha^+(E_k) = \sum\limits_p \mu_\alpha^+(E_{kp})$ (счетная аддитивность меры μ_α^+ на подмножествах в U_k).

Аналогично, $\mu_\alpha^+(E'_p) = \sum\limits_k \mu_\alpha^+(E_{kp})$ и

$$\sum_k \mu_\alpha^+(E_k) = \sum_k \sum_p \mu_\alpha^+(E_{kp}) = \sum_p \sum_k \mu_\alpha^+(E_{kp}) = \sum_p \mu_\alpha^+(E'_p),$$

т.е. величина $\mu_\alpha^+(E)$ не зависит от представления E в виде дизъюнктного объединения малых α^+-измеримых множеств (по свойствам сумм неотрицательных семейств, можно суммировать их группами и переставлять порядок суммирования).

2) Счетная аддитивность.
Пусть $E = \bigcup\limits_k E_k$ (дизъюнктное не более чем счетное семейство), все E_k принадлежат $\mathfrak{A}_\alpha^+$. Тогда $E_k = \bigcup\limits_p E_{kp}$, все E_{kp} – малые попарно дизъюнктные α^+-измеримые множества, и $E = \bigcup\limits_k \big(\bigcup\limits_p E_{kp}\big)$

(все E_{kp} дизъюнктны). По определению, $\mu_\alpha^+(E) = \sum\limits_{k,p} \mu_\alpha^+(E_{kp})$. Ввиду возможности суммирования группами, получим:

$$\mu_\alpha^+(E) = \sum_{k,p} \mu_\alpha^+(E_{kp}) = \sum_k \Big(\sum_p \mu_\alpha^+(E_{kp}) \Big) = \sum_k \mu_\alpha^+(E_k),$$

что и требовалось.

3) Полнота и σ-конечность меры μ_α^+ на подмножествах параметризуемой окрестности U следуют из аналогичных свойств меры $\nu_{f_\alpha}^+$ (лемма 6), а те же свойства меры μ_α^+ на $\mathfrak{A}_\alpha^+$ — из представления любого $E \in \mathfrak{A}_\alpha^+$ в виде объединения не более чем счетного семейства малых α^+-измеримых множеств.

4) Пусть $K \subset M$, K компактно. Любая точка $x \in K$ содержится в некоторой окрестности $U = f(\mathbb{R}^n)$, f – положительная параметризация окрестности U. Рассмотрим произвольную ячейку $P_x \subset \mathbb{R}^n$ такую, что $f^{-1}(x) \in \operatorname{Int} P_x$. Поскольку f – гомеоморфизм, множество $G_x = f(\operatorname{Int} P_x)$ открыто и $G_x \subset U$. Тогда $\mu_\alpha^+(G_x) = \nu_{f_\alpha}^+\big(f^{-1}(G_x)\big) = \nu_{f_\alpha}^+(\operatorname{Int} P_x) \leqslant \nu_{f_\alpha}^+(\overline{P_x}) < \infty$, поскольку замыкание $\overline{P_x}$ компактно и отображение f_α имеет локально конечную вариацию (теорема 4). Для любого $x \in K$ имеем $x \in G_x$, т.е. $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} G_x$. Выберем конечное подпокрытие:

$$K \subset \bigcup_{k=1}^p G_{x_k} \Longrightarrow \mu_\alpha^+(K) \leqslant \sum_{k=1}^p \mu_\alpha^+(G_{x_k}) < \infty. \bullet$$

Аналогично определяются α^--измеримые подмножества в M и доказывается, что они образуют σ-алгебру (обозначаемую через $\mathfrak{A}_\alpha^-$), содержащую все борелевские подмножества многообразия M, на которой определяется полная σ-конечная мера μ_α^-. При этом для компактных множеств $K \subset M$ справедливо неравенство $\mu_\alpha^-(K) < \infty$.

Если $E \in \mathfrak{A}_\alpha^+ \cap \mathfrak{A}_\alpha^-$ и оба числа $\mu_\alpha^+(E)$, $\mu_\alpha^-(E)$ конечны, обозначим

$$\mu_\alpha(E) = \mu_\alpha^+(E) - \mu_\alpha^-(E) \text{ (ориентированная мера } \alpha\text{-проекции множества } E),$$

$$\mathfrak{R}_M = \{E \subset M \mid E \in \bigcap_\alpha (\mathfrak{A}_\alpha^+ \cap \mathfrak{A}_\alpha^-), \text{ для любого } \alpha \text{ величины } \mu_\alpha^+(E),\ \mu_\alpha^-(E) \text{ конечны}\}.$$

Поскольку $\mathfrak{A}_\alpha^+$ и $\mathfrak{A}_\alpha^-$ – σ-алгебры, легко проверяется, что $\mathfrak{R}_M$ является δ-кольцом подмножеств множества M (содержит разности, объединения конечных семейств и пересечения не более чем счетных семейств множеств из $\mathfrak{R}_M$).

Пусть e_i – координатные орты в $\mathbb{R}^m$. Если $n \leqslant m$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant m$, то $e_\alpha = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$ – простые n-векторы в $\mathbb{R}^m$, которые образуют базис пространства n-векторов в $\mathbb{R}^m$.

Определение. *Стандартной векторной мерой на n-мерном ориентированном многообразии M с локально конечными вариациями, вложенном в $\mathbb{R}^m$ (при $m \geqslant n$), будем называть следующее отображение, определенное на $\mathfrak{R}_M$ со значениями в пространстве n-векторов:*

$$\mu_M(E) = \sum_\alpha \mu_\alpha(E)\, e_\alpha, \quad E \in \mathfrak{R}_M.$$

Теорема 6. *Пусть M – ориентированное n-мерное многообразие с локально конечными вариациями, вложенное в $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant n)$. Тогда*

1) *компактные подмножества многообразия M принадлежат $\mathfrak{R}_M$;*

2) *функция μ_M счетно аддитивна на $\mathfrak{R}_M$;*

3) *если M' – многообразие с тем же носителем, но с противоположной ориентацией, то $\mathfrak{R}_{M'} = \mathfrak{R}_M$, $\mu_{M'} = -\mu_M$.*

Доказательство. 1) По леммам 8 и 9 для любого $\alpha = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$ компактные множества $K \subset M$ α^+- и α^--измеримы, при этом величины $\mu_\alpha^+(K)$, $\mu_\alpha^-(K)$ конечны, т.е. $K \in \mathfrak{R}_M$.

2) Поскольку пространство n-векторов в $\mathbb{R}^m$ конечномерно, сходимость рядов в пространстве n-векторов равносильна покоординатной сходимости в произвольном базисе. Поскольку все функции μ_α^+ и μ_α^- счетно аддитивны на $\mathfrak{R}_M$, такова же и вектор-функция μ_M.

3) Пусть $f : \mathbb{R}^n \to U \subset M$ —положительная параметризация множества U. Тогда если $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – некоторый гомеоморфизм, обращающий ориентацию (например, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$), то $g = f \circ \varphi$ будет положительной параметризацией множества U в M', поскольку ориентация в M' противоположна ориентации в M. Если $E \subset U$ – малое α^+-измеримое множество в M, то (см. определение) $f^{-1}(E) \in \mathfrak{A}_{f_\alpha}^+$, $\mu_{\alpha,M}^+(E) = \nu_{f_\alpha}^+\bigl(f^{-1}(E)\bigr)$. По теореме 5 тогда $g^{-1}(E) = \varphi^{-1}\bigl(f^{-1}(E)\bigr) \in \mathfrak{A}_{f_\alpha \circ \varphi}^- =$

$\mathfrak{A}^-_{g_\alpha}$ и

$$\mu^+_{\alpha,M}(E) = \nu^+_{f_\alpha}\big(f^{-1}(E)\big) = \nu^-_{f_\alpha\circ\varphi}\big(\varphi^{-1}\big(f^{-1}(E)\big)\big) = \\ \nu^-_{g_\alpha}\big(g^{-1}(E)\big) = \mu^-_{\alpha,M'}(E), \quad (1)$$

т.е. E является малым α^--измеримым множеством в M'. Используя гомеоморфизм φ^{-1}, получим, что классы малых α^+-измеримых множеств в M и малых α^--измеримых множеств в M' совпадают, а тогда, очевидно, $\mathfrak{A}^+_{\alpha,M} = \mathfrak{A}^-_{\alpha,M'}$. Используя равенство (1) и разбивая произвольное множество $E \in \mathfrak{A}^+_{\alpha,M}$ на не более чем счетное семейство малых измеримых множеств, докажем, что $\mu^+_{\alpha,M}(E) = \mu^-_{\alpha,M'}(E)$. Аналогично доказывается, что $\mathfrak{A}^-_{\alpha,M} = \mathfrak{A}^+_{\alpha,M'}$ и для α^--измеримого E имеет место формула $\mu^-_{\alpha,M}(E) = \mu^+_{\alpha,M'}(E)$.

Если теперь $E \in \mathfrak{R}_M$, то

$$E \in \bigcap_\alpha \left(\mathfrak{A}^+_{\alpha,M} \cap \mathfrak{A}^-_{\alpha,M}\right) = \bigcap_\alpha \left(\mathfrak{A}^-_{\alpha,M'} \cap \mathfrak{A}^+_{\alpha,M'}\right)$$

и все числа $\mu^+_{\alpha,M}(E) = \mu^-_{\alpha,M'}(E)$, $\mu^-_{\alpha,M}(E) = \mu^+_{\alpha,M'}(E)$ конечны. Это равносильно тому, что

$$E \in \mathfrak{R}_{M'},$$
$$\mu_{\alpha,M'}(E) = \mu^+_{\alpha,M'}(E) - \mu^-_{\alpha,M'}(E) = \mu^-_{\alpha,M}(E) - \mu^+_{\alpha,M}(E) = -\mu_{\alpha,M}(E)$$

для любого α, т.е. $\mu_{M'}(E) = -\mu_M(E)$. •

Замечание. Если M ориентируемо и несвязно, то на нем существует более двух ориентаций (ориентация M определяется ориентацией его компонент связности). Поскольку на каждой компоненте связности существует ровно две ориентации, применяя уже доказанный результат к компонентам, легко доказать, что $\mathfrak{R}_M = \mathfrak{R}_{M'}$ и в случае, когда M' снабжено какой-либо другой ориентацией (не обязательно противоположной).

§5. Интегрирование дифференциальных форм по векторной мере

Определение. *Пусть $m \geqslant n$ и M – ориентированное n-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$ с локально конечными вариациями. Функция $\omega : M \times (\mathbb{R}^m)^n \to \mathbb{R}$ называется ступенчатой дифференциальной*

n-формой на M, если существуют конечные семейства множеств $\{E_k\}_{k=1}^p$, $E_k \in \mathfrak{R}_M$, и внешних n-форм $\{\varphi_k\}_{k=1}^p$ такие, что

$$\omega = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k \chi_{E_k} \ (\chi_{E_k} \text{ – характеристическая функция множества } E_k).$$

Поскольку $\mathfrak{R}_M$ – δ-кольцо, можно считать, что множества E_k дизъюнктны ([7, гл. II, §6, п. 1]).

Как известно ([8, гл. III, §5, п. 5, схолия]), внешняя n-форма φ порождает линейный функционал $\tilde{\varphi}$ на пространстве n-векторов, при этом для базисных n-векторов

$$\tilde{\varphi}(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}) = \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}). \tag{1}$$

Поэтому можно определить интеграл от ступенчатой дифференциальной формы по векторной мере μ_M ([7, гл. II, §7, п. 1]):

$$\text{если } \omega = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k \chi_{E_k}, \ \text{ то } \int \omega \, d\mu_M = \sum_{k=1}^{p} \tilde{\varphi}_k\big(\mu_M(E_k)\big). \tag{2}$$

Для определения интеграла не только от ступенчатых дифференциальных форм нужны дополнительные свойства векторной меры. Как известно ([7, гл. I, §3]), если m – аддитивная вектор-функция, заданная на кольце $\mathfrak{R}$ подмножеств множества T и принимающая значения в нормированном пространстве X, ее вариацией называется следующая функция:

$$|m|(A) = \sup\Big\{ \sum_{k=1}^{p} |m(A_k)| \ \Big| \ \bigcup_{k=1}^{p} A_k \subset A, \ A_k \text{ принадлежат } \mathfrak{R} \text{ и дизъюнктны} \Big\}$$

(здесь $|m(A_k)|$ – норма вектора $m(A_k)$ в прстранстве X). Говорят, что вектор-функция m имеет конечную вариацию, если $|m|(A) < \infty$ для любого $A \in \mathfrak{R}$.

Лемма 10. *Мера μ_M имеет конечную вариацию.*

Доказательство. Поскольку пространство n-векторов в $\mathbb{R}^m$ конечномерно, все нормы в этом пространстве эквивалентны и можно рассматривать произвольную норму. Пусть $A \in \mathfrak{R}_M$, $\bigcup\limits_{k=1}^{p} A_k \subset$

A, A_k принадлежат $\mathfrak{R}_M$ и дизъюнктны. Тогда

$$\mu_M(A_k) = \sum_\alpha \mu_\alpha(A_k) e_\alpha, \quad e_\alpha = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}.$$

По свойствам нормы

$$\sum_{k=1}^{p} |\mu_M(A_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \sum_\alpha |\mu_\alpha(A_k)| \cdot |e_\alpha| =$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_\alpha |\mu_\alpha^+(A_k) - \mu_\alpha^-(A_k)| \cdot |e_\alpha| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p} \max_\alpha |e_\alpha| \sum_\alpha (\mu_\alpha^+(A_k) + \mu_\alpha^-(A_k)) \leqslant$$
$$\leqslant \max_\alpha |e_\alpha| \sum_\alpha \Big(\sum_{k=1}^{p} \mu_\alpha^+(A_k) + \sum_{k=1}^{p} \mu_\alpha^-(A_k) \Big) \leqslant$$
$$\leqslant \max_\alpha |e_\alpha| \sum_\alpha \big(\mu_\alpha^+(A) + \mu_\alpha^-(A) \big)$$

(поскольку $\bigcup\limits_{k=1}^{p} A_k \subset A$, A_k принадлежат $\mathfrak{R}_M$ и дизъюнктны). Тогда, поскольку $A \in \mathfrak{R}_M$, числа $\mu_\alpha^+(A)$, $\mu_\alpha^-(A)$ конечны и

$$|\mu_M|(A) = \sup \Big\{ \sum_{k=1}^{p} |\mu_M(A_k)| \Big\} \leqslant \max_\alpha |e_\alpha| \sum_\alpha \big(\mu_\alpha^+(A) + \mu_\alpha^-(A) \big) < \infty. \bullet$$

Если рассмотреть сопряженные нормы в пространствах внешних n-форм и n-векторов, то для любой внешней n-формы φ и n-вектора v имеет место неравенство $|\tilde{\varphi}(v)| \leqslant |\varphi||v|$ ($\tilde{\varphi}$ – линейный функционал, соответствующий форме φ). Кроме того, $\mathfrak{R}_M$ является δ-кольцом и мера μ_M имеет конечную вариацию. Таким образом, применима теория интегрирования вектор-функций по векторной мере (см. [7, гл. II, §8]). Следующее определение является переформулировкой общего определения из [7] для случая дифференциальных форм и меры μ_M.

Определение. *Пусть M – ориентированное n-мерное многообразие с локально конечными вариациями, вложенное в $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant$*

n). Дифференциальная форма $\omega : M \times (\mathbb{R}^m)^n \to \mathbb{R}$ называется μ_M-интегрируемой, если существует последовательность $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ ступенчатых дифференциальных форм такая, что:

1) $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность Коши, т.е.

$$\lim_{k,l\to\infty} \int |\omega_k - \omega_l|\, d|\mu_M| = 0;$$

2) ω_k сходятся к ω почти всюду по мере $|\mu_M|$.

Тогда полагаем

$$\int \omega\, d\mu_M = \lim_{k\to\infty} \int \omega_k\, d\mu_M.$$

Если $A \in \bigcap\limits_{\alpha}(\mathfrak{A}_\alpha^+ \cap \mathfrak{A}_\alpha^-)$ и дифференциальная форма $\omega \cdot \chi_A$ интегрируема, то говорят, что форма ω интегрируема на множестве A и $\int\limits_A \omega\, d\mu_M = \int \omega\chi_A\, d\mu_M$.

Теорема 7. *Пусть M – ориентированное n-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$ с локально конечными вариациями, множество $K \subset M$ компактно и сужение дифференциальной формы $\omega|_K$ непрерывно на K. Тогда форма ω интегрируема на K.*

Доказательство. Будем считать, что $\omega(x) = 0$ при $x \notin K$, поэтому $\omega = \omega\chi_K$. Пусть $\mathfrak{K}$ – кольцо подмножеств в M, порожденное компактными подмножествами. По теореме 6 $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{R}_M$. Поскольку форма $\omega|_K$ непрерывна на K, существует последовательность $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ $\mathfrak{K}$-ступенчатых форм (постоянных на множествах из $\mathfrak{K}$) такая, что $\omega_k(x) = 0$ при $x \notin K$ и ω_k равномерно сходятся к ω на K ([7, гл. III, §14, п. 5, следствие 1]). Отсюда следует равномерная сходимость в себе на K:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall k, l > N,\ \forall x \in K \quad |\omega_k(x) - \omega_l(x)| < \varepsilon$$

(здесь $|\omega_k(x) - \omega_l(x)|$ – норма внешней формы $\omega_k(x) - \omega_l(x)$, сопряженная к норме в пространстве n-векторов). Тогда

$$\int |\omega_k - \omega_l|\, d|\mu_M| = \int\limits_K |\omega_k(x) - \omega_l(x)|\, d|\mu_M| \leqslant \varepsilon|\mu_M|(K) \quad \text{при } k, l > N,$$

т.е. $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность Коши, при этом $\omega_k(x) \to \omega(x)$ для любого $x \in M$, значит, форма $\omega = \omega\chi_K$ интегрируема на K.●

§6. Некоторые нерешенные вопросы

1) Автор предполагает, что определения многообразия с локально конечными вариациями и стандартной n-векторной меры на самом деле не зависят от выбора базиса в объемлющем пространстве. Вероятно, многообразия с локально конечными вариациями — это многообразия с локально конечной мерой Фавара ([2, гл. III, §3.2]) или локально конечной мерой Хаусдорфа. Как будет доказано во второй части статьи, многообразия, гладко вложенные в $\mathbb{R}^n$, имеют локально конечные вариации, а для гладко вложенных многообразий независимость интеграла от выбора базиса – хорошо известный факт.

2) Автор предполагает, что примером (вообще говоря, не гладкого) $(n-1)$-мерного многообразия с локально конечными вариациями служит граница любого n-мерного выпуклого тела в $\mathbb{R}^n$, а для меньших размерностей – край k-мерного выпуклого множества (при $k < n$).

Литература

1. Г. Грауэрт, И. Либ, В. Фишер, *Дифференциальное и интегральное исчисление.* М. (1971).
2. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры.* М. (1987).
3. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной.* М. (1957).
4. Л. Шварц, *Анализ. т. II.* М. (1972).
5. А. Дольд, *Лекции по алгебраической топологии.* М. (1976).
6. Б. З. Вулих, *Краткий курс теории функций вещественной переменной.* М. (1973).
7. N. Dinculeanu, *Vector measures.* Berlin (1966).
8. Н. Бурбаки, *Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра.* М. (1962).

Potepun A. V. Integration of differential forms on manifolds with locally finite variations.

It is well known that one can integrate any compactly supported continuous differential n-form over n-dimensional C^1-manifolds in $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant n)$. For $n = 1$ the integral may be defined over any locally rectifiable curve. Another generalization is the theory of currents (linear functionals on the space of compactly supported C^∞-differential forms). The theme of the article is integration of measurable differential n-forms over n-dimensional C^0-manifolds in $\mathbb{R}^m$ with locally finite n-dimensional variations (a generalization of locally rectifiable curves to dimension $n > 1$).

The main result states that any such manifold generates an n-dimensional current in $\mathbb{R}^m$ (i.e., any compactly supported C^∞ n-form may be integrated over a manifold with the properties mentioned above).

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 3 октября 2005 г.