Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 327, 2005 г.

С. П. Хэкало

ПОТЕНЦИАЛЫ РИССА, АССОЦИИРОВАННЫЕ СО СЛОЖНОЙ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ НА ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

0. Введение. Пусть φ – бесконечно дифференцируемая функция с быстро убывающими производными на пространстве $M_{n,m}$ вещественных прямоугольных $(n \times m)$-матриц $(n \geqslant m \geqslant 1)$, $x \in M_{n,m}$, $'x$ – транспонированная матрица, $\alpha \in \mathbf{C}$, $|x|^{\alpha} = (\det {'x}x)^{\alpha/2}$ и

$$\mathrm{H}_{n,m}(\alpha) = 2^{\alpha m}\, \pi^{nm/2}\, \frac{\Gamma_m\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma_m\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)},\ \Gamma_m(\alpha) = \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} \prod_{i=1}^{m} \Gamma\left(\alpha - \frac{i-1}{2}\right)$$

соответственно гамма-функции пространства $M_{n,m}$ и конуса V_m положительно определенных вещественных симметрических $(m \times m)$-матриц, $\Gamma(\cdot)$ – стандартная гамма-функция Эйлера.

Для одномерного параметра $\alpha \in \mathbf{C}$ потенциалы Рисса на $M_{n,m}$

$$\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{|\cdot|}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\mathrm{H}_{n,m}(\alpha)} \int\limits_{M_{n,m}} |y|^{\alpha-n}\varphi(x-y)dy, \tag{0.1}$$

$$\operatorname{Re}\alpha > m-1, \quad \alpha \neq n-m+k, \quad k \in \mathbf{N},$$

ассоциированные со степенной функцией $|x|^{\alpha}$, обладают следующими свойствами [1–5]:

1. *Потенциал* $\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{|\cdot|}\varphi\right)(x)$ *аналитически продолжается как мероморфная функция на всю комплексную плоскость с полюсами в тех же точках и того же порядка, что и у функции* $\Gamma_m((n-\alpha)/2)$.

2. $\left(\mathcal{I}^{0}_{|\cdot|}\varphi\right)(x) = \varphi(x)$.

$\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{|\cdot|}(\Delta_m\varphi)\right)(x) = \left(\Delta_m\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{|\cdot|}\varphi\right)\right)(x) = (-1)^m\, \left(\mathcal{I}^{\alpha-2}_{|\cdot|}\varphi\right)(x)$,

Работа выполнена при поддержке "Фонда содействия отечественной науке".

$\Delta_m = \det('\partial\partial), \quad \partial = \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}.$

3.
$$\left(\mathcal{I}_{|\cdot|}^{\alpha}\left(\mathcal{I}_{|\cdot|}^{\beta}\varphi\right)\right)(x) = \left(\mathcal{I}_{|\cdot|}^{\alpha+\beta}\varphi\right)(x), \quad n \geqslant 3m-2. \qquad (0.2)$$

Доказательство полугруппового свойства (0.2) в работе [4] основано на связи потенциалов Рисса (0.1) и ядра теплопроводности. Эта связь дает возможность доказать свойство (0.2) только при $n \geqslant 3m-2$.

В работе [6] введена дзета-функция Игузы, связанная со сложной степенной функцией на пространстве $M_{n,m}$ и, тем самым, зависящая от многомерного комплексного параметра $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{C}^m$. Изучение дзета-функции показало, что в случае многомерного комплексного параметра в $\mathbf{C}^m$ нашлась открытая область, в которой главное функциональное равенство задается одновременно абсолютно сходящимися интегралами (а не их аналитическими продолжениями, как в классическом случае дзета-функции одного комплексного параметра [4]). При этом сужение параметра $\lambda \in \mathbf{C}^m$ на одномерную диагональ $\lambda_1 = \dots = \lambda_m$ дало выполнение классического равенства для дзета-функции Игузы одного комплексного параметра без ограничений на размеры n и m прямоугольной матрицы [1, 4].

Таким образом, естественно рассмотреть *потенциалы Рисса с многомерным комплексным параметром* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{C}^m$ и ассоциированные со сложной степенной функцией $r^{\lambda}(x)$, $x \in M_{n,m}$. При этом можно надеяться, что выход в область многомерного параметра $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{C}^m$ с последующим сужением на одномерную диагональ $\lambda = (\alpha, \dots, \alpha)$ позволит установит полугрупповое свойство (0.2) для потенциалов Рисса (0.1) с одномерным комплексным параметром $\alpha \in \mathbf{C}$ при более слабой зависимости между параметрами n и m.

Пусть $\lambda^* = (\lambda_m, \dots, \lambda_1) \in \mathbf{C}^m$, $\bar{n} = (n, \dots, n) \in \mathbf{N}^m$, $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_m \in \mathbf{C}$ и

$$\Gamma_{V_m}(\lambda) = \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} \prod_{i=1}^{m} \Gamma\left(\frac{\lambda_i + i - m}{2}\right),$$

$$\Gamma_{n,m}(\lambda) = 2^{|\lambda|}\, \pi^{nm/2}\, \frac{\Gamma_{V_m}(\lambda)}{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})},$$

соответственно гамма-функции конуса V_m и пространства $M_{n,m}$, зависящие от многомерного комплексного параметра.

Потенциалы Рисса на $M_{n,m}$ задаются формулой

$$\left(\mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\alpha)} \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar{n}}(y)\varphi(x-y)dy, \tag{0.3}$$

$$\lambda \in \mathbf{C}^m, \quad \operatorname{Re}\lambda_i > m-i, \quad \lambda_i \neq n-i-1+2k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Задача статьи состоит в установлении для потенциалов (0.3) аналогов свойств 1–3 потенциалов Рисса (0.1) одного комплексного параметра и в улучшении оценки на параметры n и m для полугруппового свойства (0.2).

Метод работы, состоящий в аналитическом продолжении потенциалов при помощи выхода в область многомерного комплексного параметра, как уже отмечено, использовался в работе [6] для доказательства функционального свойства дзета-функции Игузы и позднее в [7] для обобщения понятия дзета интеграла.

Опишем кратко содержание работы. В пункте 1 приводятся сведения о сложной степенной функции Гиндикина на конусе положительно определенных вещественных симметрических матриц и на пространстве вещественных прямоугольных матриц [6, 8]. Пункт 2 посвящен введению понятия бета-функции на $M_{n,m}$. В пункте 3 даются основные сведения из [6] о дзета интеграле, ассоциированном со сложной степенной функцией на пространстве прямоугольных матриц. В пункте 4 вводится определение потенциалов Рисса (0.3) и приводятся их простейшие свойства. В пункте 5, по схеме монографии [9] (стр. 55), устанавливается полугрупповое свойство потенциалов Рисса. В заключительном, 6-м пункте, строится решение интегрального уравнения со сложным степенным ядром.

1. Сложные степенные функции Гиндикина на V_m и $M_{n,m}$. Пусть $g \in GL(m)$ и $'g$ – матрица, транспонированная к g. На конусе V_m транзитивно действует группа преобразований

$$V_m \ni a \to {}'gag \in V_m.$$

Инвариантная мера на V_m имеет вид

$$\mu(da) = \frac{da}{(\det a)^{(m+1)/2}}, \quad da = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m} da_{ij}.$$

Обозначим через $\nabla_i(a)$ главный нижний угловой минор i-го порядка матрицы a, $i = 1, ..., m$, $\nabla_0(a) \equiv 1$. Сложная степенная функция Гиндикина [8], связанная с конусом V_m, с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$a^\lambda = \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{\nabla_{m-i+1}(a)}{\nabla_{m-i}(a)}\right]^{\lambda_i/2}, \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m.$$

Относительно операции сопряжения на V_m

$$V \ni a = (a_{ij}) \to a^* = (a^*_{ij}) \in V, \quad a^*_{ij} = a_{m-j+1,m-i+1}, \;\; i = 1, ..., m,$$

двойственная сложная степенная функция Гиндикина [8] на V_m имеет вид

$$a^\lambda_* = \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{\nabla^*_i(a)}{\nabla^*_{i-1}(a)}\right]^{\lambda_i/2}, \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m.$$

Здесь $\nabla^*_i(a)$ – главный верхний угловой минор i-го порядка матрицы a, $\nabla^*_0(a) \equiv 1$.

Пусть T^+_m – множество нижних треугольных $(m \times m)$-матриц t с положительными диагональными элементами. Имеют место следующие свойства [8, 6, 7]: *пусть* $a, b \in V_m$, *тогда*

$$a^\lambda a^\mu = a^{\lambda+\mu}, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{C}^m; \quad ({}'\tau a \tau)^\lambda = a^\lambda ({}'\tau\tau)^\lambda, \quad \tau \in T^+_m;$$

$$(a^{-1})^\lambda = a^{-\lambda}_*; \quad a^\lambda_* = (a^*)^{\lambda^*}, \quad \lambda^* = (\lambda_m, ..., \lambda_1);$$

$$\int\limits_{V_m} \mathbf{e}^{-\operatorname{tr}(ab^{-1})}\, a^\lambda \mu(da) = \Gamma_{V_m}(\lambda)\, b^\lambda; \quad \int\limits_{V_m} \mathbf{e}^{-\operatorname{tr} ab}\, a^\lambda\, \mu(da) = \Gamma_{V_m}(\lambda)\, b^{-\lambda}_*.$$

Пусть далее

$$M^*_{n,m} = \{x \in M_{n,m} \,|\, \det {}'xx \neq 0\}$$

подмножество в $M_{n,m}$, состоящее из матриц максимального ранга m; $O(n)$ – группа ортогональных $(n \times n)$-матриц. На $M^*_{n,m}$ транзитивно действует группа преобразований

$$x \to \rho x \tau, \quad \rho \in O(n), \quad \tau \in T^+_m,$$

относительно которой инвариантная мера имеет вид

$$\mu(dx) = \frac{dx}{(\det {}'xx)^{n/2}}, \quad dx = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} dx_{ij}.$$

Вырожденные матрицы в $M_{n,m}$ составляют множество меры нуль. Поэтому сложную степенную функцию Гиндикина на $M_{n,m}$ можно определить равенством [6]:

$$r^{\lambda}(x) = ({}'xx)^{\lambda}, \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m.$$

Относительно операции сопряжения на $M_{n,m}$

$$x = (x_1, ..., x_m) \to x^* = (x_m, ..., x_1), \quad x_i \in \mathbf{R}^n,$$

двойственная сложная степенная функция Гиндикина имеет вид

$$r_*^{\lambda}(x) = ({}'xx)_*^{\lambda}.$$

Очевидно, что имеет место следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Сложная степенная функция обладает перечисленными ниже свойствами:*

$$r^{\lambda}(x)r^{\mu}(x) = r^{\lambda+\mu}(x); \quad r_*^{\lambda}(x)r_*^{\mu}(x) = r_*^{\lambda+\mu}(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbf{C}^m;$$

$$r^{(\lambda,...,\lambda)}(x) = r_*^{(\lambda,...,\lambda)}(x) = (\det {}'xx)^{\lambda/2}, \quad \lambda \in \mathbf{C}; \tag{1.1}$$

$$r^{\lambda}(\rho x \tau) = \pi_{\lambda}(\tau) r^{\lambda}(x), \quad r_*^{\lambda}(\rho x \,{}'\tau) = \pi_{\lambda}(\tau) r_*^{\lambda}(x), \quad \rho \in O(n), \quad \tau \in T_m^+.$$

Здесь

$$\pi_{\lambda}(\tau) = \prod_{i=1}^{m} \tau_{ii}^{\lambda_i}, \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbf{C}^m,$$

есть мультипликативный характер группы T_m^+.

2. Бета-функция на $M_{n,m}$**.** Пусть $a \in V_m$, e_m – единичная $(m \times m)$-матрица и

$$a > e_m \Leftrightarrow a - e_m \in V_m, \quad a < e_m \Leftrightarrow e_m - a \in V_m.$$

На пространстве $M_{n,m}$ рассмотрим интеграл

$$\mathrm{B}_{n,m}(\lambda, \mu) = \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda - \bar{n}}(x)\, r^{\mu - \bar{n}}(e^* - x) dx, \tag{2.1}$$

$$\lambda \in \mathbf{C}^m, \quad \mu \in \mathbf{C}^m, \quad \bar{n} = (n, ..., n) \in \mathbf{N}^m, \quad e^* = \begin{pmatrix} e_m \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n,m}.$$

Теорема 2.1. *В области*

$$\{(\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^m\times\mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\lambda_i > m-i,\ \operatorname{Re}\mu > m-i, \operatorname{Re}(\lambda_i+\mu_i) < n-i+1\}$$

(которая непуста при $n \geqslant 2m-1$*) интеграл* $\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)$ *абсолютно сходится и имеет место равенство*

$$\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu) = \mathrm{B}_{n,m}(\mu,\lambda).$$

Доказательство. Введем обозначения

$$I_0^\lambda = \int\limits_{M_0} r^\lambda(x)\mu(dx), \quad I_\infty^\lambda = \int\limits_{M_\infty} r^\lambda(x)\mu(dx),$$

$$M_0 = \{x \in M_{n,m} | 'xx < e_m\}, \quad M_\infty = \{x \in M_{n,m} | 'xx > e_m\},$$

$$V_0 = \{a \in V_m | a < e_m\}, \quad V_\infty = \{a \in V_m | a > e_m\},$$

$$T_0 = \{t \in T_m^+ | 'tt < e_m\}.$$

Установим связь между I_0^λ и I_∞^λ. Пусть

$$x \in M_{n,m}, \quad a \in V_m, \quad \omega \in U_{n,m} = \{x \in M_{n,m} | 'xx = e_m\}.$$

Тогда [10, 3]

$$x = \omega a^{1/2}, \quad \mu(dx) = 2^m\, d\omega\, \mu(da)$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} I_\infty^\lambda &= c\int\limits_{V_\infty} a^\lambda \mu(da) = c\int\limits_{V_0} (a^{-1})^\lambda \mu(da) \\ &= c\int\limits_{V_0} a_*^{-\lambda}\mu(da) = c\int\limits_{V_0} (a^*)^{-\lambda^*}\mu(da^*) \\ &= c\int\limits_{V_0} a^{-\lambda^*}\mu(da) = I_0^{-\lambda^*}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $x = \omega t$, $\omega \in U_{n,m}$, $t \in T_m^+$, тогда [3]

$$\mu(dx) = \prod_{i=1}^m t_{ii}^{i-m-1}\, d\omega dt$$

и
$$I_0^\lambda = c \int\limits_{T_0} \prod_{i=1}^{m} t_{ii}^{\lambda_i+i-m-1}\, dt.$$

В результате, интеграл I_0^λ абсолютно сходится в области
$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, \operatorname{Re}\lambda_i > m-i\},$$
а интеграл I_∞^λ – в области
$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, \operatorname{Re}\lambda_i < 1-i\}.$$

Таким образом, интеграл (2.1) абсолютно сходится в области, которая определяется требованием сходимости интегралов I_0^λ, I_0^μ и $I_\infty^{\lambda+\mu-\bar{n}}$, то есть в области
$$\{(\lambda,\mu)\in \mathbf{C}^m\times\mathbf{C}^m \,|\, \operatorname{Re}\lambda_i > m-i,\ \operatorname{Re}\mu_i > m-i,\ \operatorname{Re}(\lambda_i+\mu_i) < n-i+1\}.$$

Очевидно, что эта область непуста, если для всех $i=1,...,m$ выполняется неравенство
$$(m-i)+(m-i) < n-i+1 \Leftrightarrow i > -n+2m-1.$$
Таким образом, интеграл $\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)$ абсолютно сходится в указанной области, если $n \geqslant 2m-1$. При этом в указанной области выполнение равенства
$$\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu) = \mathrm{B}_{n,m}(\mu,\lambda)$$
очевидно. Доказательство завершено.

Теорема позволяет ввести следующее определение.

Определение. *Бета-функцией на $M_{n,m}$, $n \geqslant 2m-1$, называется функция, которая получается аналитическим продолжением интеграла* (2.1) *из области его сходимости.*

3. Дзета интеграл на $M_{n,m}$. Пусть $\mathcal{S}(M_{n,m})$ – пространство Шварца бесконечно дифференцируемых функций с быстро убывающими производными на $M_{n,m}$. Для $\varphi(x) \in \mathcal{S}(M_{n,m})$ положим
$$Z_{|x|}(\varphi,\alpha-n) = \int\limits_{M_{n,m}} |x|^{\alpha-n}\,\varphi(x)\,dx, \quad |x| = (\det {}'xx)^{1/2},\ \ \alpha\in\mathbf{C}. \tag{3.1}$$

Этот интеграл называется *дзета интегралом, ассоциированным со степенной функцией* $|x|$, а соответствующая ему функция $\alpha \mapsto Z_{|x|}(\varphi, \alpha - n)$ называется *дзета-функцией Игузы на* $\mathbf{C}$ [4].

В монографии [1] для произвольных n и $m \leqslant n$ было установлено функциональное соотношение

$$\frac{Z_{|x|}(\varphi, \alpha - n)}{\Gamma_m(\alpha/2)} = \pi^{-nm/2}\, 2^{m(\alpha-n)}\, \frac{Z_{|x|}(\mathcal{F}\varphi, -\alpha)}{\Gamma_m((n-\alpha)/2)}, \quad \alpha \in \mathbf{C},$$

левая и правая части которого на $\mathbf{C}$ понимаются в смысле аналитического продолжения. Здесь

$$\mathcal{F}\varphi(y) = \int\limits_{M_{n,m}} \mathrm{e}^{-i\ \mathrm{tr}\ {}^{t}yx}\, \varphi(x) dx \tag{3.2}$$

– преобразование Фурье функции φ.

Согласно [3, 6], *дзета интегралом, ассоциированным со сложной степенной функцией* $r^{\lambda}(x)$, $\lambda \in \mathbf{C}^m$, называется интеграл

$$Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar{n}) = \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda}(x)\varphi(x)\, \mu(dx), \quad \bar{n} = (n, ..., n) \in \mathbf{N}^m.$$

При $\lambda = (\alpha, ..., \alpha) \simeq \mathbf{C}$ и $\mathrm{Re}\, \alpha > m - 1$ имеет место равенство

$$Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar{n}) = Z_{|x|}(\varphi,\, \alpha - n)$$

(см. формулы (3.1) и (1.1)).

Предложение 3.1 ([6]). *В области*

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, \mathrm{Re}\, \lambda_i > m - i, \quad i = 1, ..., m\}$$

дзета интеграл абсолютно сходится и может быть продолжен на $\mathbf{C}^m$ *как мероморфная функция с полюсами в тех точках* λ, *для которых* $\lambda_i = m - i - 2k$, $k \in \mathbf{Z}_+$, *хотя бы при одном* $i = 1, ..., m$.

В результате нормированная дзета-функция Игузы

$$\lambda \to Z_r^{norm}(\varphi,\, \lambda - \bar{n}) \equiv \frac{Z_r(\varphi,\, \lambda - \bar{n})}{\Gamma_{V_m}(\lambda)}$$

является целой по параметру $\lambda \in \mathbf{C}^m$.

Имеют место следующие простейшие свойства дзета-функции [6]:

$$Z_r^{norm}(\varphi,\,-\bar n) = Z_{r_*}^{norm}(\varphi,\,-\bar n) = \frac{\pi^{nm/2}\varphi(0)}{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)};$$

$$Z_r^{norm}(\varphi,\,-\bar n) = \frac{Z_{r_*}^{norm}(\mathcal{F}\varphi,\,0)}{(4\pi)^{nm/2}}.$$

Теорема 3.1 ([6]). *В области*

$$\{\lambda\in\mathbf{C}^m\,|\,m-i<\mathrm{Re}\;\lambda_i<n-i+1,\quad i=1,...,m\}$$

имеет место равенство Планшереля

$$\frac{\pi^{nm/2}}{\Gamma_{V_m}(\lambda)}\int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar n}(x)\varphi(x)dx = \frac{2^{|\lambda|-nm}}{\Gamma_{V_m}(-\lambda^*+\bar n)}\int\limits_{M_{n,m}} r_*^{-\lambda}(x)\mathcal{F}\varphi(x)dx$$

двух абсолютно сходящихся интегралов и, таким образом, на всем $\mathbf{C}^m$ *дзета-функция Игузы удовлетворяет функциональному равенству*

$$Z_r^{norm}(\varphi,\,\lambda-\bar n) = \frac{2^{|\lambda|}}{(4\pi)^{nm/2}}\;Z_{r_*}^{norm}(\mathcal{F}\varphi,\,-\lambda), \tag{3.3}$$

левая и правая части которого вне указанной области понимаются на $\mathbf{C}^m$ *в смысле аналитического продолжения.*

Следствие 3.1. *В области*

$$\{\lambda\in\mathbf{C}^m\,|\,\lambda_i\neq -n+m-i-2k,\quad i=1,...,m,\quad k\in\mathbf{Z}_+\}$$

преобразование Фурье $\mathcal{F}(r^\lambda)$ *обобщенной функции* r^λ*, отвечающей* $r^\lambda(x)$*, имеет вид*

$$\mathcal{F}(r^\lambda) = \Gamma_{n,m}(\lambda+\bar n)\,r_*^{-\lambda-\bar n}. \tag{3.4}$$

4. Потенциалы Рисса. Простейшие свойства. Из функционального свойства (3.3) для дзета интеграла имеем

$$\frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^*+\bar n)}{2^{|\lambda|}\pi^{nm/2}\Gamma_{V_m}(\lambda)}\,Z_r(\varphi,\lambda-\bar n) = \frac{1}{(2\pi)^{nm}}\,Z_r(\mathcal{F}\varphi,-\lambda),\quad \varphi\in\mathcal{S}(M_{n,m}),$$

где $\mathcal{F}\varphi$ – преобразование Фурье функции φ (3.2).

Обозначим $\varphi_x(y)=\varphi(x-y)$ и в соответствии с [3] введем следующее определение.

Определение 4.1. *Потенциалом Рисса, ассоциированным со сложной степенной функцией на $M_{n,m}$, назовем функцию*

$$\left(\mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right)(x) = \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{2^{|\lambda|}\pi^{nm/2}\Gamma_{V_m}(\lambda)} Z_r(\varphi_x, \lambda - \bar{n}) \equiv \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)} Z_r(\varphi_x, \lambda - \bar{n}), \tag{4.1}$$

где $\lambda \in \mathbf{C}^m$, $\varphi \in \mathcal{S}(M_{n,m})$.

Из определения 4.1 и предложения 3.1 следует, что в области

$$\{\lambda \in \mathbf{C}^m \,|\, \mathrm{Re}\,\lambda_i > m - i, \quad \lambda_i \neq n - i - 1 + 2k, \quad k \in \mathbf{N}\}$$

потенциал Рисса может быть записан в виде абсолютно сходящегося интеграла

$$\left(\mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)} \int\limits_{M_{n,m}} r^\lambda(y)\, \varphi(x-y)\, \mu(dy).$$

В силу предложения 3.1 *потенциал Рисса* $\left(\mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right)(x)$ *есть мероморфная по аргументу* $\lambda \in \mathbf{C}^m$ *функция с полюсами в тех же точках и того же порядка, что и у функции* $\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})$.

Рассмотрим полугруппу линейных дифференциальных операторов на $M_{n,m}$, порожденную операторами Кэли–Лапласа [11]

$$\Delta_i = \det \begin{pmatrix} '\partial_1\partial_1 & \cdots & '\partial_1\partial_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ '\partial_i\partial_1 & \cdots & '\partial_i\partial_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, ..., m.$$

Здесь ∂_i – вектор-столбец частных производных такой, что

$$'\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_{1i}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{ni}}\right).$$

Пусть

$$\Delta^p = r_*^p(\partial_x), \quad \partial_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right),$$

где

$$p = \sum_{i=1}^m p_i q_i, \quad p_i \in \mathbf{Z}_+, \quad q_i = (2, ..., 2_i, 0, ..., 0)$$

(символ 2_i означает, что цифра 2 стоит на i-ой позиции).

Тогда, с точностью до постоянного множителя, указанная полугруппа состоит из операторов вида [11]

$$\Delta^p = \Delta_1^{p_1} ... \Delta_m^{p_m}.$$

Утверждение 4.1. *Для потенциалов Рисса* $\left(\mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right)(x)$ *имеют место следующие равенства:*

$$\left(\Delta^p \mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right)(x) = \left(\mathcal{I}_r^\lambda \Delta^p \varphi\right)(x) = (-1)^{|p|/2} \left(\mathcal{I}_r^{\lambda-p} \varphi\right)(x), \tag{4.2}$$

$$\left(\mathcal{I}_r^0 \varphi\right)(x) = \varphi(x). \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть обычной функции $\left(\mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right)(x)$ соответствует обобщенная функция

$$\mathcal{I}_r^\lambda \varphi = \frac{r^{\lambda-\bar{n}}}{\Gamma_{n,m}(\lambda)} * \varphi,$$

где $*$ – операция свертки. Тогда по формуле (3.4) имеем

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^\lambda \varphi\right) = r_*^{-\lambda}\, \mathcal{F}\varphi. \tag{4.4}$$

В результате

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^0 \varphi\right) = \mathcal{F}\left(\varphi\right).$$

Далее, поскольку функции φ и $\mathcal{F}(\varphi)$ из пространства Шварца, из результатов статьи [12] получается, что последнее равенство верно и в смысле обычных функций. Таким образом, равенство (4.3) доказано.

Аналогично, в смысле обобщенных функций

$$\Delta^p \mathcal{I}_r^\lambda \varphi = \Delta^p \left(\frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{2^{|\lambda|}\pi^{nm/2}}\ \frac{r^{\lambda-\bar{n}}}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} * \varphi \right)$$
$$= \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{2^{|\lambda|}\pi^{nm/2}}\ \frac{r^{\lambda-\bar{n}}}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} * (\Delta^p \varphi) = \mathcal{I}_r^\lambda(\Delta^p \varphi).$$

Далее, из равенства (3.4) имеет место формула Кэли Δ^p-дифференцирования [11]

$$\Delta^p\, r^\lambda = (-4)^{|p|/2} \frac{\Gamma_{V_m}(\lambda + \bar{n})\, \Gamma_{V_m}(-\lambda^* + p^*)}{\Gamma_{V_m}(\lambda + \bar{n} - p)\, \Gamma_{V_m}(-\lambda^*)}\ r^{\lambda-p}$$

и

$$\Delta^p \mathcal{I}_r^\lambda \varphi$$
$$= \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}{2^{|\lambda|}\pi^{nm/2}} (-4)^{|p|/2}\ \frac{\Gamma_{V_m}(\lambda)\, \Gamma_{V_m}(-\lambda^* + p^* + \bar{n})}{\Gamma_{V_m}(\lambda - p)\, \Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})}\ \frac{r^{\lambda-p-\bar{n}}}{\Gamma_{V_m}(\lambda)} * \varphi$$
$$= (-1)^{|p|/2} \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + p^* + \bar{n})}{2^{|\lambda-p|}\pi^{nm/2}}\ \frac{r^{\lambda-p-\bar{n}}}{\Gamma_{V_m}(\lambda - p)} * \varphi$$
$$= (-1)^{|p|/2} \mathcal{I}_r^{\lambda-p} \varphi.$$

Тогда

$$\Delta^p \mathcal{I}_r^\lambda \varphi = \mathcal{I}_r^\lambda(\Delta^p \varphi) = (-1)^{|p|/2} \mathcal{I}_r^{\lambda-p}\varphi$$

в смысле обобщенных функций. Остается отметить, что в области регулярности функционала $\mathcal{I}_r^{\lambda-p}\varphi$ функционал $\mathcal{I}_r^\lambda \varphi$ также регулярен и равенство (4.2) справедливо в обычном смысле. Доказательство завершено.

5. Полугрупповое свойство потенциалов Рисса. В этом пункте доказывается следующий факт.

Теорема 5.1. *При $n \geqslant 2m-1$ в области*

$$\{(\lambda,\mu)\in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \,|\, \operatorname{Re}\lambda_i > m-i,\ \operatorname{Re}\mu_i > m-i,\ \operatorname{Re}(\lambda_i+\mu_i) < n+1-i\}$$

имеет место полугрупповое свойство для потенциалов Рисса (4.1)

$$\left(\mathcal{I}_r^\lambda \left(\mathcal{I}_r^\mu \varphi\right)\right)(x) = \left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu}\varphi\right)(x). \tag{5.1}$$

Доказательство проводится по схеме из [9] (стр. 55). Напомним, что

$$\Gamma_{n,m}(\lambda) = \frac{2^{|\lambda|}\pi^{nm/2}\,\Gamma_{V_m}(\lambda)}{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})},$$

$$\Gamma_{V_m}(\lambda) = \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} \prod_{i=1}^{m} \Gamma\left(\frac{\lambda_i + i - m}{2}\right),$$

$$\lambda^* = (\lambda_m, \dots, \lambda_1).$$

Тогда

$$\left(\mathcal{I}_r^\lambda \left(\mathcal{I}_r^\mu \varphi\right)\right)(x) = \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)} \int\limits_{M_{n,m}} r^\lambda(z)\,\left(\mathcal{I}_r^\mu \varphi\right)(x-z)\,\mu(dz)$$

$$= \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)\Gamma_{n,m}(\mu)} \int\limits_{M_{n,m}} r^\lambda(z)\,\mu(dz) \int\limits_{M_{n,m}} r^\mu(y)\varphi(x-y-z)\,\mu(dy)$$

$$= \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)\Gamma_{n,m}(\mu)} \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar{n}}(z)\,dz \int\limits_{M_{n,m}} r^{\mu-\bar{n}}(x-y-z)\varphi(y)\,dy.$$

Перейдем в последнем равенстве (пока формально) к другому повторному интегралу. Тогда

$$\left(\mathcal{I}_r^\lambda \left(\mathcal{I}_r^\mu \varphi\right)\right)(x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)\Gamma_{n,m}(\mu)} \int\limits_{M_{n,m}} \varphi(y)\,dy \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar{n}}(z)\,r^{\mu-\bar{n}}(x-y-z)\,dz.$$

Обозначим

$$J^{\lambda,\mu}_{n,m}(x) = \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar{n}}(y)\,r^{\mu-\bar{n}}(x-y)\,dy$$

и положим $x-y=zt$, где матрица $t\in T^+_m$ является матрицей разложения $x=\omega t$, $\omega\in U_{n,m}$. В результате

$$dy = (\det t)^n\,dz = (\det {}'xx)^{n/2}\,dz = r^{\bar{n}}(x)\,dz$$

и

$$J^{\lambda,\mu}_{n,m}(x) = \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar{n}}(x-zt)\,r^{\mu-\bar{n}}(zt)\,r^{\bar{n}}(x)\,dz.$$

Поскольку из формул (1.1) следует соотношение

$$r^{\mu}(zt) = r^{\mu}(z)\,r^{\mu}(x),$$

имеем

$$J^{\lambda,\mu}_{n,m}(x) = r^{\lambda+\mu-\bar{n}}(x) \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar{n}}(xt^{-1}-z)\,r^{\mu-\bar{n}}(z)\,dz.$$

Далее, из левой $O(n)$-инвариантности сложной степенной функции $r^{\lambda}(x)$ для $\rho\in O(n)$ получаем

$$\begin{aligned} J^{\lambda,\mu}_{n,m}(x) &= r^{\lambda+\mu-\bar{n}}(x) \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar{n}}(\rho xt^{-1}-\rho z)\,r^{\mu-\bar{n}}(\rho z)\,d(\rho z) \\ &= r^{\lambda+\mu-\bar{n}}(x) \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar{n}}(\rho\omega tt^{-1}-\rho z)\,r^{\mu-\bar{n}}(\rho z)\,d(\rho z) \\ &= r^{\lambda+\mu-\bar{n}}(x) \int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda-\bar{n}}(\rho\omega-z)\,r^{\mu-\bar{n}}(z)\,d(z). \end{aligned}$$

Остается подобрать $\rho\in O(n)$ по $\omega\in U_{n,m}$ так, чтобы

$$\rho\omega = \begin{pmatrix} e_m \\ 0 \end{pmatrix} = e^* \in U_{n,m} \subset M_{n,m}.$$

Таким образом, из формулы (2.1) и теоремы 2.1 в области

$$\{(\lambda,\mu)\in \mathbf{C}^m\times\mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\lambda_i > m-i,\ \operatorname{Re}\mu_i > m-i,\ \operatorname{Re}(\lambda_i+\mu_i) < n+1-i\}$$

(которая непуста при $n \geqslant 2m-1$) интеграл $J^{\lambda,\mu}_{n,m}(x)$ абсолютно сходится и имеет место формула

$$J^{\lambda,\mu}_{n,m}(x) = r^{\lambda+\mu-\bar{n}}(x)\ \mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu).$$

В результате

$$\left(\mathcal{I}^{\lambda}_r\left(\mathcal{I}^{\mu}_r\varphi\right)\right)(x) = \frac{\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)}{\Gamma_{n,m}(\lambda)\Gamma_{n,m}(\mu)}\int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda+\mu-\bar{n}}(x-y)\varphi(y)\,dy$$

и

$$\left(\mathcal{I}^{\lambda}_r\left(\mathcal{I}^{\mu}_r\varphi\right)\right)(x) = \frac{\Gamma_{n,m}(\lambda+\mu)}{\Gamma_{n,m}(\lambda)\Gamma_{n,m}(\mu)}\,\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)\ \left(\mathcal{I}^{\lambda+\mu}_r\varphi\right)(x).$$

Отметим теперь, что абсолютная сходимость бета интеграла и абсолютная сходимость интеграла $\left(\mathcal{I}^{\lambda+\mu}_r\varphi\right)(x)$ в области

$$\{(\lambda,\mu)\in \mathbf{C}^m\times\mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\lambda_i > m-i,\ \operatorname{Re}\mu_i > m-i,\ \operatorname{Re}(\lambda_i+\mu_i) < n+1-i\}$$

влекут по теореме Фубини абсолютную сходимость исходного повторного интеграла.

Остается доказать, что константа

$$c_{n,m}(\lambda,\mu) = \frac{\Gamma_{n,m}(\lambda+\mu)}{\Gamma_{n,m}(\lambda)\Gamma_{n,m}(\mu)}\,\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)$$

тождественна равна 1.

Для этого в пространстве Шварца $\mathcal{S}(M_{n,m})$ введем подпространство функций $\mathcal{S}_0(M_{n,m})$ Семянистого–Самко [3, 13] таких, что для функции $\varphi_0\in\mathcal{S}_0(M_{n,m})$ ее преобразование Фурье $\mathcal{F}\varphi_0$ вместе со всеми своими производными обращается в нуль на матрицах $x\in M_{n,m}$, ранг которых менее m.

Пусть $\mathcal{I}^{\mu}_r\varphi_0$, $\varphi_0\in\mathcal{S}_0(M_{n,m})$, – обобщенная функция, отвечающая в области

$$\{\mu\in\mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\mu_i > m-i,\quad i=1,\dots,m\}$$

обычной функции $(\mathcal{I}^{\mu}_r\varphi_0)(x)$. Тогда в силу (3.4)

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}^{\mu}_r\varphi_0\right) = r_*^{-\mu}\mathcal{F}(\varphi_0). \tag{5.2}$$

По предложению 3.1 в области

$$\{\mu \in \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Re}\mu_i < n+1-i, \quad i = 1, ..., m\}$$

функционал $r_*^{-\mu}\mathcal{F}(\varphi_0)$ регулярен. Тогда из результатов монографии [12] получается, что в области

$$\{\mu \in \mathbf{C}^m \,|\, \operatorname{Re}\mu_i > m-i\} \cap \{\mu \in \mathbf{C}^m \,|\, \operatorname{Re}\mu_i < n+1-i\}$$

(которая всегда непуста) равенство (5.2) имеет место в обычном смысле. А так как $r_*^{-\mu}(x)\mathcal{F}(\varphi_0)(x) \in \mathcal{S}(M_{n,m})$, то из (5.2) функция $(\mathcal{I}_r^\mu \varphi_0)(y)$ лежит в $\mathcal{S}(M_{n,m})$.

Тогда в области

$$\{(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \,|\, \operatorname{Re}\lambda_i > m-i, \quad m-i < \operatorname{Re}\mu_i < n+1-i\}$$

в смысле обобщенных функций имеет место равенство

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^\lambda \left(\mathcal{I}_r^\mu \varphi_0\right)\right) = r_*^{-\lambda}\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^\mu \varphi_0\right) = r_*^{-\lambda}\, r_*^{-\mu}\, \mathcal{F}(\varphi_0) = r_*^{-(\lambda+\mu)}\, \mathcal{F}(\varphi_0).$$

Таким образом, в области

$$\{(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m | m-i < \operatorname{Re}\lambda_i < n+1-i, \quad m-i < \operatorname{Re}\mu_i < n+1-i\}$$

имеет место равенство функций из пространства $\mathcal{S}_0(M_{n,m})$

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^\lambda \left(\mathcal{I}_r^\mu \varphi_0\right)\right)(y) = r_*^{-(\lambda+\mu)}(y)\, \mathcal{F}(\varphi_0)(y). \tag{5.3}$$

Остается заметить, что для обобщенной функции, отвечающей обычной функции $\left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu}\varphi_0\right)(x)$ в области

$$\{(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \,|\, \operatorname{Re}(\lambda_i + \mu_i) > m-i\},$$

имеет место равенство

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu}\varphi_0\right) = r_*^{-(\lambda+\mu)}\, \mathcal{F}(\varphi_0).$$

Следовательно, в области

$$\{(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m | m-i < \operatorname{Re}(\lambda_i + \mu_i) < n+1-i\}$$

имеет место равенство основных функций

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu}\varphi_0\right)(y) = r_*^{-(\lambda+\mu)}(y)\, \mathcal{F}(\varphi_0)(y). \tag{5.4}$$

Наконец, из равенств (5.3) и (5.4) в области

$$\{(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \,|\, \operatorname{Re}\lambda_i > m-i,\, \operatorname{Re}\mu_i > m-i,\ \operatorname{Re}(\lambda_i+\mu_i) < n+1-i\}$$

получаем

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\left(\mathcal{I}_r^{\mu}\varphi_0\right)\right)(y)=\mathcal{F}\left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu}\varphi_0\right)(y)$$

и на подпространстве функций Семянистого–Самко

$$\left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\left(\mathcal{I}_r^{\mu}\varphi_0\right)\right)(x)=\left(\mathcal{I}_r^{\lambda+\mu}\varphi_0\right)(x).$$

Таким образом, $c_{n,m}(\lambda,\mu)\equiv 1$. Доказательство теоремы 5.1 завершено.

Следствие 5.1. *Бета-функция* (2.1) *на* $M_{n,m}$ *связана с гамма-функцией* $\Gamma_{n,m}(\lambda)$ *формулой*

$$\mathrm{B}_{n,m}(\lambda,\mu)=\frac{\Gamma_{n,m}(\lambda)\Gamma_{n,m}(\mu)}{\Gamma_{n,m}(\lambda+\mu)}.$$

В случае, когда $\lambda_1=\ldots=\lambda_m$ и $\mu_1=\ldots=\mu_m$, это равенство было доказано в [5].

6. Интегральное уравнение со сложным степенным ядром на $M_{n,m}$. Пусть $\psi(x)\in\mathcal{S}(M_{n,m})$, $n>2m$.

Определение 6.1. *Интегральным уравнением со сложным степенным ядром на* $M_{n,m}$, $n>2m$, *называется уравнение вида*

$$\int\limits_{M_{n,m}} r^{\lambda}(y)\varphi(x-y)\mu(dy)=\psi(x), \tag{6.1}$$

$$\left\{\lambda\in\mathbf{C}^m \,|\, \operatorname{Re}\lambda_i>m-i,\quad \lambda_i\neq n-i-1+k,\quad k\in\mathbf{N},\quad i=1,\ldots,m\right\}. \tag{6.2}$$

Ясно, что в области (6.2) уравнение (6.1) может быть записано в виде

$$\left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)}\,\psi(x), \tag{6.3}$$

где по необходимости (в силу формулы (4.4))

$$(\mathcal{F}\varphi)(x)=r_*^{\lambda}(x)(\mathcal{F}\psi)(x).$$

Теорема 6.1. *При* $n>2m$ *в области*

$$\left\{\lambda\in\mathbf{C}^m \,|\, m-i<\operatorname{Re}\lambda_i<m-i+2,\quad i=1,\ldots,m\right\} \tag{6.4}$$

решение уравнения (6.1) *имеет вид*

$$\varphi(x) = C_{n,m}(\lambda, p) \int\limits_{M_{n,m}} r^{p-\lambda}(y) \left(\Delta^p \psi\right)(x-y)\mu(dy), \tag{6.5}$$

$$C_{n,m}(\lambda, p) = \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{2^{m(m+1)/2}\,\pi^{nm}} \frac{\Gamma_{V_m}(-\lambda^* + \bar{n})\Gamma_{V_m}(\lambda^* - p^* + \bar{n})}{\Gamma_{V_m}(\lambda)\Gamma_{V_m}(p-\lambda)},$$

$$p = \sum_{i=1}^{m} q_i, \quad q_i = (2, ..., 2_i, 0, ..., 0) \in \mathbf{N}^m,$$

и аналитически продолжается на всю область (6.2) *в виде потенциала Рисса*

$$\varphi(x) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)} \left(\mathcal{I}_r^{p-\lambda}\left(\Delta^p \psi\right)\right)(x). \tag{6.6}$$

Доказательство. Так как $p_k = 1$, $k = 1, ..., m$, то

$$\mathrm{Re}(p)_i = 2\sum_{k=i}^{m} p_k = 2(m-i+1).$$

Тогда в области

$$\left\{\lambda \in \mathbf{C}^m \mid \mathrm{Re}(p-\lambda)_i > m-i, \quad i = 1, ..., m\right\},$$

то есть в области

$$\left\{\lambda \in \mathbf{C}^m \mid \mathrm{Re}\,\lambda_i < m-i+2, \quad i = 1, ..., m\right\},$$

равенство (6.6) может быть записано в виде (6.5). При этом в силу неравенства $n > 2m$ имеем

$$\mathrm{Re}(p)_i = 2m - 2i + 2 < n - i + 1 + (1-i) \leqslant n - i + 1, \quad i = 1, ..., m.$$

Таким образом, при $n > 2m$ в области (6.4) выполнены неравенства

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i > m-i, \quad \mathrm{Re}(p-\lambda)_i > m-i, \quad \mathrm{Re}(p)_i < n-i+1, \quad i = 1, ..., m.$$

Далее, подставим (6.6) в (6.3) и применим в области (6.4) полугрупповое свойство потенциалов Рисса (5.1), тогда

$$\begin{aligned} I &= \left(\mathcal{I}_r^{\lambda}\left((-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)} \left(\mathcal{I}_r^{p-\lambda}\left(\Delta^p \psi\right)\right)\right)\right)(x) \\ &= (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)} \left(\mathcal{I}_r^{p}\left(\Delta^p \psi\right)\right)(x). \end{aligned}$$

Теперь по формуле (4.2) получаем

$$I = \frac{1}{\Gamma_{n,m}(\lambda)}\,\psi(x).$$

Функция, определенная равенством (6.5), удовлетворяет уравнению (6.3), а следовательно, и уравнению (6.1). Теорема доказана.

Литература

1. J. Faraut and A. Koranyi, *Analysis on symmetric cones.* — Clarendon Press, Oxford (1994).
2. С. П. Хэкало, *Потенциалы Рисса в пространстве прямоугольных матриц и изогюйгенсова деформация оператора Кэли–Лапласа.* — ДАН **376**, No. 2 (2001), 168–170.
3. E. Ournycheva and B. Rubin, *An analogue of the Fuglede formula in integral geometry on matrix space.* — Preprint, Math. FA/0401127, 1 (2004), 1–20.
4. B. Rubin, *Zeta integrals and integral geometry in the spase of rectangular matrices.* — Preprint, The Hebrew Univ. of Jerusalem, Feb. (2004), 1–48.
5. С. П. Хэкало, *Дифференциальный оператор Кэли–Лапласа на пространстве прямоугольных матриц.* — Известия АН, сер. мат., **69**, No. 1 (2005), 195–224.
6. С. П. Хэкало, *Дзета-функция Игузы, ассоциированная со сложной степенной функцией на пространстве прямоугольных матриц.* — Препринт ПОМИ, 10 (2004).
7. E. Ournycheva and B. Rubin, *The Composite Cosine Transform on the Stiefel Manifold and Generalized Zeta Integrals.* — Preprint, The Hebrew Univ. of Jerusalem, Feb. (2005), 1–21.
8. С. Г. Гиндикин, *Анализ в однородных областях.* — УМН, **19**, 4(118) (1964), 3–92.
9. С. Хелгасон, *Преобразование Радона.* — Мир, М. (1983).
10. C. Herz, *Bessel function of matrix argument.* — Ann. of Math. **61**, 3 (1955), 474–523.
11. С. П. Хэкало, *Сильно однородные дифференциальные операторы на пространстве прямоугольных матриц.* — Препринт ПОМИ РАН, 11 (2004), 1–13.
12. И. М Гельфанд и Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций. Вып. 2.* — Физматгиз, М. (1958).
13. G. S. Samko, *Hypersingular integrals and their applications.* — Analytical Methods and Special Functions, 5. Taylor and Francis, Ltd., London (2002).

Khekalo S. P. Riesz potentials associated with the composite power function on the space of rectangular matrices.

On the space of real rectangular matrices, Riesz potentials depending on a multidimensional complex parameter are studied. These potentials are in relationship with the composite power function of a matrix argument. For the potentials indicated, analogs of classical equalities are established. In particular, the semigroup property for the Riesz potentials with multidimensional complex parameter is proved under less restrictive limitations on the parameters of a rectangular matrix than the corresponding semigroup property for the Riesz potentials of one complex parameter.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: khekalo@pdmi.ras.ru

Поступило 15 сентября 2005 г.