Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 327, 2005 г.

Шамоян Ф. А.

О ЦИКЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТАХ ОПЕРАТОРА СДВИГА В ВЕСОВЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛИКРУГЕ ФУНКЦИЙ

1. Пусть $\mathbf{D^n} = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n),\ |z_j| < 1,\ j = 1, \dots, n\}$ – единичный поликруг в n-мерном комплексном пространстве $\mathbf{C^n}$, $\mathbf{T^n}$ – его остов, $\mathbf{X}$ – некоторое топологическое пространство голоморфных в $\mathbf{D^n}$ функций, в котором множество всех многочленов от $z_1, z_2, \dots, z_n$ всюду плотно, при этом операторы

$$S(f)(z) = z_1 \dots z_n f(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad \Phi_z(f) = f(z),$$
$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{D^n}$$

являются непрерывными в $\mathbf{X}$.

Определение. *Функция $f \in \mathbf{X}$ называется циклическим элементом оператора S, если существует последовательность многочленов $\{P_k\}_{k=1}^{+\infty}$ такая, что*

$$\lim_{k\to+\infty} P_k(z)f(z) = 1, \quad z \in \mathbf{D}^n,$$

причем сходимость имеет место в топологическом пространстве $\mathbf{X}$. Ясно, что цикличность функции f равносильна полноте системы $\{S^k(f)\}_{k\in\mathbf{Z}^n_+}$ в пространстве $\mathbf{X}$.

Проблематика цикличности теснейшим образом связана с задачами полноты алгебраических многочленов в весовых пространствах аналитических функций (см. [1–5]) и имеет существенные приложения в теории операторов и гармоническом анализе в целом (см. [7, 8]).

Вопросы цикличности исследовались, в основном, в пространствах аналитических функций одной переменной (см. [3–9]). В случае функций нескольких переменных эти задачи впервые исследовались в работах автора (см. [10, 11]). В указанных работах установлено, что в некоторых аспектах имеется существенное различие между одномерным и многомерным случаями. В работе [11] найдено необходимое и достаточное условие на весовые функции, при которых каждая ограниченная аналитическая функция, не имеющая корней в $\mathbf{D^n}$, является цикличной в соответствующем весовом пространстве. Однако указанное описание получено лишь в терминах соответствующих "нижних" и "верхних" функций Карлемана–Островского. Естественно возникает вопрос о такой же характеризации в терминах самих весовых функций.

При некоторых общих ограничениях на регулярность роста весов устанавливаются необходимое и достаточное условия непосредственно в терминах весовых функций, при которых каждая голоморфная функция указанного выше класса циклична в соответствующем весовом L^p-пространстве. Для более подробного изложения основных результатов работы введем обозначения.

Пусть $H(\mathbf{D^n})$ – множество всех голоморфных в $\mathbf{D^n}$ функций, $H^\infty(\mathbf{D^n}) = H^\infty$ – множество всех ограниченных аналитических в $\mathbf{D^n}$ функций, $\varphi_j(r_j)$ – положительные, монотонно растущие функции на $\mathbf{R}_+$, $\varphi(r) = (\varphi_1(r_1), \varphi_2(r_2), \dots, \varphi_n(r_n))$ – n-мерная вектор-функция, $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbf{R}_+^\mathbf{n}$, причем

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi_j(x)}{\ln x} = +\infty, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Такие вектор-функции φ мы назовем весовыми. Символом $A^p(\varphi)$, $0 < p < +\infty$, обозначим следующее пространство голоморфных в $\mathbf{D^n}$ функций:

$$A^p(\varphi) = \Bigg\{ f \in H(\mathbf{D^n}) \, : \, ||f||_{A^p(\varphi)} =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbf{D^n}} |f(z)| \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|z|} \right) \right) dm_{2n}(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \Bigg\},$$

$$\text{где} \quad \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|z|} \right) \right) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\varphi_j\left(\frac{1}{1-|z_j|} \right) \right),$$

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{D^n},$$

dm_{2n} – $2n$-мерная мера Лебега на $\mathbf{D^n}$, φ – произвольная весовая вектор-функция.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ *– весовая вектор-функция, причем* φ_j *– непрерывно-дифференцируемые функции,* $x\varphi_j(x)$ $(j = 1, \dots, n)$ *монотонно растут на* $\mathbf{R}_+$. *Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Каждая функция* $f \in H^\infty(\mathbf{D^n})$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D^n}$, *циклична в пространстве* $A^p(\varphi)$, $1 \leqslant p < +\infty$.
2. $$\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{\varphi_j(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Если при некотором j_0, $1 \leqslant j_0 \leqslant n$, *последний интеграл сходится, то можно построить функцию* $f \in H^\infty(\mathbf{D^n})$ *такую, что* $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D^n}$, *и* f *не является цикличной ни в одном пространстве* $A^p(\varphi)$, $1 \leqslant p < +\infty$.

Доказательство теоремы мы приведем только при $n = 2$, поскольку при $n > 2$ появляются лишь технические усложнения, а основная идея такая же, как и при $n = 2$.

2. Для доказательства теоремы сначала установим несколько вспомогательных утверждений. Пусть $f \in A^p(\varphi)$. Обозначим через $E(f)$ замыкание множества $\Im f$ в пространстве $A^p(\varphi)$, где $\Im$ – множество всех алгебраических многочленов от z_1 и z_2. Следующие две леммы установлены в работе автора [11].

Лемма 1. *Пусть* φ *– весовая вектор-функция,* $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in H^\infty(\mathbf{D^2})$,

$$D_j f(z_1, z_2) = D_{z_j}(f)(z_1, z_2) \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial z_j}(z_j f(z_1, z_2)) \quad (j = 1, 2)$$

$$z = (z_1, z_2) \in \mathbf{D^2}.$$

Тогда при произвольных $k = (k_1, k_2) \in \mathbf{Z}_+^2$ *функции*

$$D^k f = D_1^{k_1} D_2^{k_2}(f) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}} f(z_1, z_2)$$

принадлежат множеству $E(f)$.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ – *весовая вектор-функция, и пусть* $\Phi \in (A^p(\varphi))^*$, $1 \leqslant p < +\infty$. *Тогда если* $f \in A^p(\varphi)$ *и*

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{k_2=0}^{+\infty} a_{k_1,k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbf{D^2}, \tag{3}$$

то справедливо представление

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{k_2=0}^{+\infty} a_{k_1,k_2} \Phi(\delta_{k_1,k_2}) \rho^{k_1+k_2}, \tag{4}$$

где

$$\delta_{k_1,k_2}(z_1, z_2) = z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2}, \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbf{D^2}, \quad k = (k_1, k_2) \in \mathbf{Z^2_+}. \tag{5}$$

Лемма 3. *Пусть* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ – *весовая вектор-функция, пусть* $\Phi \in (A^p(\varphi))^*$, *и*

$$m_k^{(j)} = \sup \left\{ r^k \exp\left(-\frac{1}{p}\varphi_j\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)\right\}, \quad j = 1, 2. \tag{6}$$

Тогда справедлива оценка

$$|\Phi(\delta_{k_1,k_2})| \leqslant ||\Phi|| m_{k_1}^{(1)} \cdot m_{k_2}^{(2)}. \tag{7}$$

Доказательство. По определению

$$|\Phi(\delta_{k_1,k_2})| \leqslant ||\Phi|| \cdot ||\delta_{k_1,k_2}||_{A^p(\varphi)}. \tag{8}$$

Оценим норму $||\delta_{k_1,k_2}||_{A^p(\varphi)}$. Имеем

$$||\delta_{k_1,k_2}||_{A^p(\varphi)} = \left(\int_{\mathbf{D^2}} \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right) |\delta_{k_1,k_2}(z_1, z_2)|^p \, dm_4(z) \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{4}{\pi^2} \int_0^1 r_1^{k_1 p+1} \exp\left(-\varphi_1\left(\frac{1}{1-r_1}\right)\right) dr_1 \right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left(\int_0^1 r_2^{k_2 p+1} \exp\left(-\varphi_2\left(\frac{1}{1-r_2}\right)\right) dr_2 \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant m_{k_1}^{(1)} \cdot m_{k_2}^{(2)}.$$

Отсюда, учитывая оценку (8), получаем утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть* $f \in H^\infty(\mathbf{D^2})$ *и* f *– разложение вида* (3). *Тогда*

$$\sum_{k_1=0,k_2=0}^{+\infty} \frac{|a_{k_1,k_2}|}{(k_1+1)(k_2+1)} \leqslant \pi^2 ||f||_\infty. \qquad (9)$$

Доказательство непосредственно следует из неравенства Харди для случая бикруга (см. [12]):

$$\sum_{k_1=0,k_2=0}^{+\infty} \frac{|a_{k_1,k_2}|}{(k_1+1)(k_2+1)} \leqslant \pi^2 \int_{T^2} |f(\zeta)| dm_2(\zeta) \leqslant \pi^2 ||f||_\infty.$$

Что и требовалось доказать.

Следующая лемма вытекает из результатов работ [4] и [11].

Лемма 5. *Пусть* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ *– вектор-функция, удовлетворяющая условиям теоремы,* $m_{k_j}^{(j)}$, $j = 1, 2$, *определяются по формулам* (6),

$$M_k^{(j)} = \sup_{s \geqslant 1} \{m_s^{(j)} s^k\}, \quad T_j(r) = \sup_{k \geqslant 1} \frac{r^k}{M_k^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \quad r \in \mathbf{R}_+. \quad (10)$$

Тогда интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T_j(r)}{r^{3/2}} dr \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} \left(\frac{\varphi_j(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx, \quad j = 1, 2,$$

являются равнорасходящимися.

3. Доказательство теоремы. Сначала отметим, что импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из леммы 5 и из результатов работы [11]. Поэтому приступим к доказательству импликации 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\Phi \in (A^p(\varphi))^*$ – такой функционал, что $\Phi(g) = 0$ при $g \in E(f)$. Напомним, что $E(f)$ – замыкание множества $\Im f$ в пространстве $A^p(\varphi)$, $f \in H^\infty(\mathbf{D^2})$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D^2}$. Пусть далее

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1=0,k_2=0}^{+\infty} a_{k_1,k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbf{D^2}. \qquad (11)$$

Тогда из лемм 1 и 2 следует равенство

$$\Phi(D_1^{n_1}, D_2^{n_2} f)$$
$$= \lim_{\rho \to 1-0} \sum_{k_1=0,k_2=0}^{+\infty} a_{k_1,k_2} \rho^{k_1+k_2} (k_1+1)^{m_1} (k_2+1)^{m_2} \Phi(\delta_{k_1,k_2}) = 0$$

при всех $m = (m_1, m_2) \in \mathbf{Z}_+^2$. Учитывая результаты работы [11], имеем

$$\sum_{k_1=0,k_2=0}^{+\infty} a_{k_1,k_2}(k_1+1)^{m_1}(k_2+1)^{m_2}\Phi(\delta_{k_1,k_2}) = 0, \tag{12}$$

при этом, как установлено в [11], последний ряд абсолютно сходится при всех $m = (m_1, m_2) \in \mathbf{Z}_+^2$. Теперь зафиксируем $m_2 = n_2$ и введем в рассмотрение функцию

$$F_1(z) = \sum_{k_1=0}^{+\infty}\sum_{k_2=0}^{+\infty} \frac{a_{k_1,k_2}(k_2+1)^{n_2}}{k_1+1+z^2}\Phi(\delta_{k_1,k_2}). \tag{13}$$

Нетрудно заметить, что функция F_1 голоморфна в области $\mathbf{C} \setminus \{i\mathbf{Z}\}$, причем точки im, $m \in \mathbf{Z}$, являются полюсами первого порядка для функции $F_1(z)$. Учитывая простое равенство

$$\frac{1}{k_1+1+z^2} = \sum_{p=0}^{n_1} \frac{(-1)^p(k_1+1)^p}{z^{2(p+1)}} + \frac{(-1)^{n_1+1}(k_1+1)^{n_1+1}}{z^{2(n_1+2)}(k_1+1+z^2)}, \quad n_1 \in \mathbf{Z}_+^1, \tag{14}$$

из (13) и (14) получаем:

$$F_1(z) = \sum_{k_1=0}^{+\infty}\sum_{k_2=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n_1}\frac{(-1)^p(k_1+1)^p}{z^{2(p+1)}}\right)a_{k_1,k_2}(k_2+1)^{n_2}\Phi(\delta_{k_1,k_2})$$

$$+\frac{(-1)^{n_1+1}}{z^{2(n_1+2)}}\sum_{k_1=0}^{+\infty}\sum_{k_2=0}^{+\infty}\frac{a_{k_1,k_2}(k_1+1)^{n_1+1}(k_2+1)^{n_2}}{k_1+1+z^2}\Phi(\delta_{k_1,k_2}). \tag{15}$$

Теперь, используя равенство (12), нетрудно убедиться, что

$$F_1(z) = \frac{(-1)^{n_1+1}}{z^{2(n_1+1)}}\sum_{k_1=0}^{+\infty}\sum_{k_2=0}^{+\infty}\frac{(k_1+1)^{n_1+1}(k_2+1)^{n_2}a_{k_1,k_2}\Phi(\delta_{k_1,k_2})}{k_1+1+z^2}. \tag{16}$$

Приступим к оценке функции $F_1(z)$ в полуплоскости $\Pi_1 = \{z : \operatorname{Re} z \geqslant 1\}$. Имеем

$$|F_1(z)| \leqslant \frac{\sup\limits_{k_1\geqslant 0}\left\{(k_1+1)^{n_1+2}(k_2+1)^{n_2+1}|\Phi(\delta_{k_1,k_2})|\right\}}{|z|^{2(n_1+2)}}$$

$$\times \sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{k_2=0}^{+\infty} \frac{|a_{k_1,k_2}|}{(k_1+1)(k_2+1)}$$

$$\leqslant \frac{\pi^2 ||f||_\infty ||\Phi||}{|z|^{2(n_1+2)}} \sup_{k_1 \geqslant 0} \left\{(k_1+1)^{n_1+2}(k_2+1)^{n_2+1} m_{k_1}^{(1)} \cdot m_{k_2}^{(2)}\right\}. \qquad (17)$$

В последнем неравенстве мы воспользовались леммами 3 и 4. Таким образом,

$$|F_1(z)| \leqslant (e\pi)^2 ||f||_\infty ||\Phi||_\infty M_{n_2+1}^{(2)} \frac{M_{n_1+2}^{(1)}}{|z|^{2(n_1+2)}}$$

$$\leqslant C(f, \Phi, n_2) \frac{M_{n_1+2}^{(1)}}{|z|^{2(n_1+2)}}, \ z \in \Pi_1. \qquad (18)$$

Учитывая теорему единственности Карлемана (см. [13]), из последней оценки и из леммы 5 получаем:

$$F_1(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in \Pi_1$$

и, следовательно, при всех $z \in \mathbf{C} \setminus \{i\mathbf{Z}\}$. Таким образом,

$$\sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{k_2=0}^{+\infty} \frac{(k_2+1)^{n_2} a_{k_1,k_2} \Phi(\delta_{k_1,k_2})}{k_1+1+z^2} = 0, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \{i\mathbf{Z}\}. \qquad (19)$$

Записывая последнее равенство в виде

$$\sum_{k_1=0}^{+\infty} \frac{b_{k_1}}{k_1+1+z^2} = 0, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \{i\mathbf{Z}\},$$

$$\text{где} \quad b_{k_1} = \sum_{k_2=0}^{+\infty} (k_2+1)^{n_2} a_{k_1,k_2} \Phi(\delta_{k_1,k_2}),$$

отсюда легко вывести, что $b_{k_1} = 0$, $k_1 = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно,

$$\sum_{k_2=0}^{+\infty} (k_2+1)^{n_2} a_{k_1,k_2} \Phi(\delta_{k_1,k_2}) = 0 \quad \text{при всех} \quad n_2 = 0, 1, 2, \ldots.$$

Точно таким же образом, как выше, исследуя функцию

$$F_2(z) = \sum_{k_2=0}^{+\infty} \frac{a_{k_1,k_2} \Phi(\delta_{k_1,k_2})}{k_2+1+z^2}, \quad z \in \Pi_1,$$

убедимся, что $F_2(z) = 0$ при всех $z \in \mathbf{C} \setminus \{i\mathbf{Z}\}$ и потому $a_{k_1,k_2}\Phi(\delta_{k_1,k_2}) = 0$ при всех $k = (k_1, k_2) \in \mathbf{Z}_+^2$. Положив $k_1 = k_2 = 0$, приходим к равенству $a_{0,0}\Phi(\delta_{0,0}) = f(0)\Phi(1) = 0$. Так как по условию теоремы $f(0) \neq 0$, то $\Phi(1) = 0$. По теореме Хана–Банаха f является циклическим элементом в пространстве $A^p(\varphi)$, $1 \leqslant p < +\infty$. Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что при $n = 1$ и при более жестких ограничениях на φ_1 аналогичное утверждение установлено в работах [4, 9].

Замечание 2. Нетрудно убедиться, что доказательство теоремы проходит не только для функции из класса $H^\infty(\mathbf{D^2})$, но и для произвольной функции $f \in H(\mathbf{D^2})$, допускающей оценку

$$|f(z_1, z_2)| \leqslant C_f \exp\left(\alpha\varphi_1\left(\frac{1}{1-|z_1|}\right) + \beta\varphi_2\left(\frac{1}{1-|z_2|}\right)\right),$$

$$(z_1, z_2) \in \mathbf{D^2}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad 0 \leqslant \beta < 1,$$

C_f – некоторая константа, зависящая только от f. В частности, теорема сохраняет силу, если f из класса Харди $H^p(\mathbf{D^2})$ или из весовых пространств Бергмана $B^p(\alpha)$, $0 < p < +\infty$.

Литература

1. М. В. Келдыш, *Sur l'aproximation en moyenne par polynômes, des fonctions d'une variable complexe.* — Mat.sb. **16 (18)** (1945), 1–20.
2. С. Н. Мергелян, *Весовые приближения многочленами.* — Успехи мат. наук **9**, No. 5 (1956), 107–152.
3. H. S. Shapiro, *Weakly invertible elements in cartain function spaces and generaters in l^1.* — Mich. Math. Journal **11**, No. 2 (1964), 161–169.
4. Н. К. Никольский, *Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа.* — Труды МИАН СССР **120**, 270.
5. Ф. А. Шамоян, *Описание замкнутых идеалов и некоторые вопросы факторизации в алгебрах растущих функций в круге.* — Изв. АН Арм.ССР, Серия Матем. **5** (1970), 419–433.
6. Ф. А. Шамоян, *О слабой обратимости в весовых пространствах аналитических функций.* — Изв. РАН, Серия Матем. **60**, No. 5 (1996), 190–212.
7. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* Наука, М. (1980).
8. N. K. Nikolski, *Operators, Functions and Systems* v. 1. — Amer. Math. Soc. (2002).
9. A. Beurling, *A critical topology in harmonic analysis on semigroups.* — Acta Math. **112**, No. 3–4 (1964), 215–228.

10. Ф. А. Шамоян, *О слабой обратимости в весовых анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций.* — Успехи мат. наук **5**, No. 2 (2000), 152–154.
11. Ф. А. Шамоян, *Слабо обратимые элементы в весовых анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций.* — Матем. сб. **193**, No. 6 (2002), 141–160.
12. У. Рудин, *Теория функций в поликруге.* Мир, М. (1974).
13. С. Мандельбройт, *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.* Изд. иностр. лит., М. (1955).

Shamoyan F. A. On the cyclic elements of the shift operator in a weighted anisotropic space of holomorphic function in the polydisc.

Let $\varphi(r) = (\varphi_1(r_1), \dots, \varphi_n(r_n))$ be a vector-valued function on $\mathbf{R}_+^n$. A necessary and sufficiently condition is obtained for every $f \in H^\infty(\mathbf{D}^n)$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{D^n}$ to be cyclic in the corresponding $L^p(\varphi)$ weighted space, where $\mathbf{D^n}$ is unit polydisc in $\mathbf{C}^n$.

Брянский
государственный университет
E-mail: root@shamoyan.bitmcnit.bryansk.su

Поступило 22 сентября 2005 г.