Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 328, 2005 г.

А. Г. Берлинков

РАЗМЕРНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ РЕКУРСИВНЫХ МНОЖЕСТВ

Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $n \geqslant 2$, $\Delta = \{1, 2, \ldots, n\}$, если $n \in \mathbb{N}$, и $\Delta = \mathbb{N}$, если $n = \infty$, $\Delta^* = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} \Delta^j$ является множеством всех конечных последовательностей элементов Δ, а $\Delta^{\mathbb{N}}$ множеством всех их бесконечных последовательностей. Результат составления из двух последовательностей σ и τ из Δ^* одной путём выписывания их в соответствующем порядке обозначается $\sigma * \tau$. Длина конечной последовательности σ обозначается $|\sigma|$. Если $k \in \mathbb{N}$ и σ является последовательностью длины не меньше k, то последовательность, составленная из первых k элементов σ обозначается $\sigma|_k$.

Случайная рекурсивная конструкция была впервые определена в статье [7]. Предположим, что J является компактным подмножеством $\mathbb{R}^d$, таким что $J = \mathrm{Cl}\,(\mathrm{Int}\,(J))$, без потери общности его диаметр можно предполагать равным 1. Случайная рекурсивная конструкция состоит из вероятностного пространства (Ω, Σ, P) и семейства случайных компактных подмножеств $\mathbb{R}^d$, $\{J_\sigma(w) | w \in \Omega, \sigma \in \Delta^*\}$, таких что

(i) $J_\emptyset = J$ почти наверное,

(ii) Отображения $w \to J_\sigma(w)$ измеримы относительно Σ,

(iii) Множества J_σ, если они не являются пустыми, геометрически подобны J,

(iv) $J_{\sigma * i}$ является собственным подмножеством J_σ для всех $\sigma \in \Delta^*$ и $i \in \Delta$ при условии, что $J_\sigma \neq \emptyset$,

(v) Конструкция удовлетворяет условию случайного открытого множества: если ω и τ являются двумя последовательностями одинаковой длины, то $\mathrm{Int}\,(J_\omega) \cap \mathrm{Int}\,(J_\tau) = \emptyset$, и, наконец,

(vi) Если мы определим для конечной последовательности $\sigma \in \Delta^*$, $\mathrm{diam}\,(J_{\sigma * i}) = \mathrm{diam}\,(J_\sigma) T_{\sigma * i}$, то случайные вектора $\tau_\sigma = (T_{\sigma * 1}, \ldots, T_{\sigma * n})$ являются независимыми и имеют то же распределение, что и $(T_1, \ldots, T_n)$ при условии, что $J_\sigma \neq \emptyset$.

Объектом исследования является случайное рекурсивное множество (фрактал) $K(w) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\sigma \in \Delta^k} J_\sigma(w)$. Данное выше определение не учитывает расположение множеств $J_{\sigma * i}$ в J_σ. Пусть $l_\sigma = \operatorname{diam}(J_\sigma)$, $S_k^\beta = \sum_{|\sigma|=k} l_\sigma^\beta$. Примем стандартное обозначение размерностей Хаусдорфа, нижней и верхней размерности Минковского, упаковочной размерности множества A через $\dim_H A$, $\overline{\dim}_B A$, $\underline{\dim}_B A$ и $\dim_P A$ соответственно, определения которых можно найти в книге [4]. Там же можно найти определения и свойства упаковочных мер и мер Хаусдорфа в размерности α, обозначаемые $\mathcal{P}^\alpha$ и $\mathcal{H}^\alpha$, соответственно.

Следующее предложение обобщает теорему 1 из статьи [1]. Ввиду того, что доказательство почти целиком сохраняется, оно не приводится.

Предложение 1. *Предположим, что случайная рекурсивная конструкция* $\mathbf{J}$ *с параметром* $n < \infty$ *удовлетворяет лишь свойствам ii, iii, iv, и для некоторого* $\beta > 0$

(1) *для почти всех* $w \in \Omega$ $\lim_{k\to\infty} \sup_{|\sigma|=k} l_\sigma = 0$, *и*

(2) $\overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\log E[S_k^\beta]}{k} < 0$.

Тогда $\overline{\dim}_B K(w) \leqslant \beta$ *п.н.*

Данное предложение позволяет найти размерность Минковского и упаковочную размерность случайных рекурсивных конструкций с конечной памятью, рассмотренных Дряхловым и Темпельманом в [2]. В их конструкции $n < \infty$, но она определяется другими свойствами:

(1) J_σ являются подмножествами полного метрического пространства $\mathbb{M}$ и для почти всех $w \in \Omega$ и $\sigma \in \Delta^*$, $J_\sigma(w) \neq \emptyset$,

(2) $\lim_{k\to\infty} \max_{|\sigma|=k} \operatorname{diam}(J_\sigma) = 0$,

(3) если $\eta \prec \sigma$, то $J_\sigma \subset J_\eta$,

(4) $\operatorname{diam}(J_\sigma(w)) \leq l_\sigma(w)$ для некоторого семейства положительных случайных величин $\{l_\sigma | \sigma \in \Delta^*\}$, удовлетворяющих следующим условиям для п.в. $w \in \Omega$:

   (a) данное семейство монотонно, т.е. $l_{\sigma * p}(\omega) < l_\sigma(\omega)$ для всех $\sigma \in \Delta^*$ и всех $p \in \Delta$,

(b) для всех $\pi \in \Delta^{\mathbb{N}}$ $\lim\limits_{k\to\infty} l_{\pi|_k}(w) = 0$, и

(c) для всех $\pi \in \Delta^{\mathbb{N}}$ $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\log l_{\pi|_{k+1}}(w)}{\log l_{\pi|_k}(w)} = 1$,

(5) случайные вектора $(T_{\sigma*1}, \dots, T_{\sigma*n}), \sigma \in \Delta^*$, независимы, где $T_{\sigma*i} = l_{\sigma*i}/l_\sigma$,

(6) существует целое $m \geqslant 1$, такое что для всех $\sigma \in \Delta^*$ и любого $\eta \in \Delta^{m-1}$ случайные вектора $(T_{\sigma*\eta*1}, \dots, T_{\sigma*\eta*n})$ и $(T_{\eta*1}, \dots, T_{\eta*n})$ одинаково распределены,

(7) если ни $\sigma < \eta$, ни $\eta < \sigma$, то для п.в. $w \in \Omega$ $J_\eta(w) \cap J_\sigma(w) \cap K(w) = \emptyset$,

(8) существует $b = b(\omega) > 0$, такое что *индекс Морана* конструкции $\mathbf{J}$, соответствующий b, $\gamma_w(b) < \infty$.

Индекс Морана имеет следующее определение. Рассмотрим последовательность $\pi \in \Delta^{\mathbb{N}}$ и положительные числа r и b. Если $bl_{\pi|_m} \geqslant r$, натуральное число $k(r,\pi,b) > m$ определяется следующим образом: $bl_{\pi|_{k(r,\pi,b)+1}} < r \leqslant bl_{\pi|_{k(r,\pi,b)}}$; если $bl_{\pi|_m} < r$, мы полагаем $k(r,\pi,b) = m$. $\gamma_w(b)$ определяется как минимальное число, обладающее следующим свойством: для любого $x \in \mathbb{M}$, любого $\pi \in \Delta^{\mathbb{N}}$ и $k > m$ существует не более $\gamma_w(b)$ попарно непересекающихся множеств $J_{\eta^{(t)}|k(bl_{\pi|_k},\eta^{(t)},b)}$, $t \in \mathbb{N}$, таких что $B(x, bl_{\pi|_k}) \cap \mathrm{Cl}\,(J_{\eta^{(t)}|k(bl_{\pi|_k}),\eta^{(t)},b)}) \neq \emptyset$; если такое число $\gamma_w(b)$ не существует, мы полагаем $\gamma_w(b) = \infty$.

Теорема 2. *В конструкции Дряхлова и Темпельмана с конечной памятью* $\dim_P K(w) = \overline{\dim}_B K(w) = \underline{\dim}_B K(w) = \dim_H K(w)$ *п.н.*

Доказательство. Рассмотрим $\beta > \dim_H K$ п.н. Согласно доказательству теорем 3.1 и лемме 3.3 в [2], $E[S_k^\beta] \leqslant c\gamma^k$ для $k \geqslant m$ и некоторых констант $c > 0$, $0 < \gamma < 1$. Доказательство заканчивается применением предложения 1. $\square$

В статье [1] был доказан закон нуля или единицы для случайных самоподобных множеств, т.е. случайных рекурсивных множеств, в процессе построения которых расположение множеств $J_{\sigma*i}$ в J_σ учитывается. Зафиксируем точку $a \in \mathbb{R}^d$ с $\mathrm{dist}\,(a, J) \geqslant 1$. Здесь число 1 можно заменить любым другим положительным числом. Для всех $\tau \in \Delta^*$, обозначим $S_\sigma^\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ случайное отображение подобия, такое что $S_\sigma^\tau(J_\tau) = J_{\tau*\sigma}$. Если $J_\tau = \emptyset$ или $J_{\tau*\sigma} = \emptyset$, то мы полагаем $S_\sigma^\tau(\mathbb{R}^d) = a$. Даже если n может быть бесконечным, то случайное самоподобное множество получается, когда вектора $(S_1^\sigma, S_2^\sigma, \dots)$ независимы и одинаково распределены при условии, что $J_\sigma \neq \emptyset$.

Гипотеза. Если вектора $(S_1^\sigma, S_2^\sigma, \dots)$ независимы при условии, что $J_\sigma \neq \emptyset$, то для любого $\beta > 0$ $P(\mathcal{P}^\beta(K(w)) = 0 | K(w) \neq \emptyset) = 0$ или 1.

Замечание 3. При условии, что для любого $i \in \mathbb{N}$ $P(T_i > 0) = 1$, доказательство гипотезы естественным образом вытекает из закона 0 или 1 Колмогорова.

Далее рассматриваются случайные распределения на [0,1], порожденные согласно схеме, предложенной в статье [6], и доказывается, что упаковочная размерность случайной вероятностной меры, порожденной согласно такой схеме, совпадает с ее размерностью Хаусдорфа почти наверное. *Упаковочная размерность и размерность Хаусдорфа вероятностной меры* π на $[0,1]$ определяются следующим образом:

$$\dim_H(\pi) = \inf\{\dim_H A | A \subset [0,1], \pi(A) = 1\},$$
$$\dim_P(\pi) = \inf\{\dim_P A | A \subset [0,1], \pi(A) = 1\}.$$

Пусть $\mathcal{P}([0,1])$ обозначает множество всех вероятностных мер на $[0,1]$. Пусть τ является отображением (или ядром перехода) из множества рациональных чисел, в приведенной форме которых в знаменателе стоит степень 2, $\mathcal{D}$ в $\mathcal{P}([0,1])$. Молдин и Монтисино в статье [6], в обозначениях и терминах которой далее ведется изложение, определили *масштабирующее отображение* $\theta : [0,1]^{\mathcal{D}} \to \mathcal{P}([0,1])$ следующим образом. Пусть $\mathcal{D}_n$ является множеством рациональных чисел, знаменатель приведенной формы которых является n-ой степенью 2. Для $t = (t(1/2), t(1/4), t(3/4), \dots) \in [0,1]^{\mathcal{D}}$, определим функцию $\theta(t)$ на $\mathcal{D}$ по индукции, полагая $\theta(t)(0) = 0$, $\theta(t)(1) = 1$, и далее, если $\theta(t)|_{\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i}$ уже определено, для $0 \leqslant j \leqslant 2^n - 1$ положим

$$\theta(t)\left(\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right) = \theta(t)\left(\frac{j}{2^n}\right) + \left(\theta(t)\left(\frac{j+1}{2^n}\right) - \theta(t)\left(\frac{j}{2^n}\right)\right) t\left(\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right).$$

Вероятностная мера на пространстве функций распределения, обозначаемая $\mathcal{R}_\tau$, индуцируется отображением θ и мерой $P_\tau = \prod_{d \in \mathcal{D}} \tau(d)$.

Обозначим функцию распределения вероятностной меры π на [0,1] через h_π. Ядро перехода $\tau : \mathcal{D} \to \mathcal{P}([0,1])$ называется центрированным, если для всех $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0,1/2)$, такое что $\tau(d)(\delta, 1-\delta) > 1-\varepsilon$ для всех $d \in \mathcal{D}$. Пусть $\{0,1\}^*$ обозначает множество всех конечных последовательностей нулей и единиц, включая пустую последовательность. Определим отображение $\beta : \{0,1\}^* \to \mathcal{D}$, полагая $\beta(\emptyset) = 1/2$, а для всех остальных $(b_1, \dots, b_n) \in \{0,1\}^*$, $\beta((b_1,\dots,b_n)) = 1/2 - \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{b_i}/2^{i+1}$. Для ядра перехода $\tau : \mathcal{D} \to \mathcal{P}([0,1])$ положим $\tau^* = \tau\beta : \{0,1\}^* \to \mathcal{P}([0,1])$. Для $x \in [0,1)$ и $n \geqslant 0$ определим $\alpha_n(x) = i/2^n \leqslant x < (i+1)/2^n$. И если $0, b_1 b_2 \dots b_n$ является двоичным разложением $i/2^n$, положим $b_0(i/2^n) = \emptyset$ и для $1 \leqslant k \leqslant n$ положим $b_k(i/2^n) = (b_1, \dots, b_k)$. Для ядра перехода τ и $b \in \{0,1\}^*$, положим $\gamma_b = \int\limits_{[0,1]} y\log(y) + (1-y)\log(1-y)d\tau^*(b)(y)$, и для $n \geqslant 1$, положим

$$\sigma_n^2 = \sup_{b\in\{0,1\}^*} \left\{ \int y(\log(y)-\gamma_b)^2 + (1-y)(\log(1-y)-\gamma_b)^2 d\tau^*(b)(y) \right\}.$$

Лемма 4. *Предположим, что $\pi \in \mathcal{P}([0,1])$ непрерывно и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Bigg(\log\Big(h_\pi(\alpha_n(x)+1/2^n) - h_\pi(\alpha_n(x))\Big)\Bigg) = \gamma_x$$

для h_π-почти всех $x \in [0,1]$. Если $\gamma_1 = \inf\{\gamma_x | x \in [0,1]\}$, то $\dim_P(\pi) \leqslant -\gamma_1/\log 2$.

Доказательство. Положим $\eta = -\gamma_1/\log 2 + \varepsilon$, и предположим, что x такая точка из [0,1], где выполнено условие лемммы. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Bigg(\log\Big(h_\pi(\alpha_n(x)+1/2^n) - h_\pi(\alpha_n(x))\Big)\Bigg) = \gamma_x \geqslant \gamma_1,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \Big(h_\pi(\alpha_n(x)+1/2^n) - h_\pi(\alpha_n(x))\Big)^{1/n} \geqslant e^{\gamma_1},$$

и существует N, такое что для всех $n \geqslant N$

$$\Big(h_\pi(\alpha_n(x)+1/2^n) - h_\pi(\alpha_n(x))\Big)^{1/n} \geqslant e^{\gamma_1 - \varepsilon\log 2/2},$$

из чего следует, что для всех $n \geqslant N$ $(h_\pi(\alpha_n(x)+1/2^n) - h_\pi(\alpha_n(x))2^{-n\gamma_1/\log 2}2^{n\varepsilon/2} \geqslant 1$.

Заметим, что для всех $x \in [0,1]$ и $0 < r < 1$, если $2^{-k+1} > r \geqslant 2^{-k}$, то $x + r \geqslant \alpha_k(x) + 1/2^k$ и $x - r \leqslant \alpha_k(x)$. Поэтому для h_π-почти всех $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
&\underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\pi(B(x,r))}{r^\eta} = \underline{\lim}_{r\to 0}\frac{h_\pi(x+r) - h_\pi(x-r)}{r^\eta} \geqslant \\
&\geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{h_\pi(\alpha_n(x) + 1/2^n) - h_\pi(\alpha_n(x))}{2^{-n\eta}} = \\
&= \underline{\lim}_{n\to\infty}(h_\pi(\alpha_n(x) + 1/2^n) - h_\pi(\alpha_n(x)))2^{-n\gamma_1/\log 2}2^{n\varepsilon} = \infty.
\end{aligned}$$

Таким образом по теореме плотности мы заключаем, что существует $A \subset [0,1]$, $\pi(A) = 1$, такое что $\mathcal{P}^\eta(A) = 0$, т.е. $\dim_P A \leqslant \eta$, т.е. $\dim_P(\pi) \leqslant \eta$, из чего следует заключение леммы. $\square$

Сохраним за γ_1 обозначение, введенное в предыдущей лемме, и обозначим $\gamma_2 = \sup\{\gamma_x \mid [0,1]\}$. Тогда из леммы 5.1 и теоремы 5.2 в [6] и предыдущей леммы вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $\tau : \mathcal{D} \to \mathcal{P}([0,1])$ является центрированным ядром перехода. Предположим, что*

(i) $\int\limits_{[0,1]} |y\log y + (1-y)\log(1-y)| d\tau(d)(y) < \infty$ *для всех* $d \in \mathcal{D}$,

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2/n^2 < \infty$, *и*

(iii) $\gamma_x = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\gamma_{b_j(\alpha_n(x))}$ *существует для всех* $x \in [0,1]$.

Тогда для R_τ-почти всех π $\gamma_2/\log 2 \leqslant \dim_H(\pi) \leqslant \dim_P(\pi) \leqslant -\gamma_1/\log 2$.

Размерность Хаусдорфа (также как и упаковочная размерность) случайной функции распределения, порожденной согласно вышеописанной схеме, остается неизвестной.

Литература

1. A. Berlinkov and R. D. Mauldin, *Packing measure and dimension of random fractals.* — J. Theoret. Probab. **15**, No. 3 (2002) 695–713.
2. A. V. Dryakhlov and A. A. Tempelman, *On Hausdorff dimension of random fractals.* — New York J. Math. **7** (2001), 99-115.
3. S. Graf, R. D. Mauldin, and S. C. Williams, *The exact Hausdorff dimension in random recursive constructions.* — Mem. Amer. Math. Soc. **381**, (1988).
4. S. Graf, R. D. Mauldin, and S. C. Williams, *Random homeomorphisms.* — Adv. Math. **60** (1986), 239–259.

5. P. Mattilla, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces.* — Cambridge University Press, Cambridge (1995).
6. R. D. Mauldin and G. M. Monticino, *Randomly generated distributions.* — Israel J. Math. **91** (1995), 215–237.
7. R. D. Mauldin and S. C. Williams, *Random recursive constructions: asymtotic geometric and topological properties.* Trans. Amer. Math. Soc. **295**, No. 1 (1986), 325–346.

Berlinkov A. G. Dimensions of random recursive sets.

We prove a theorem that generalizes equality among packing, Hausdorff and upper and lower Mikowski dimensions for a general type of random recursive construction and apply it to the constructions with finite memory. Further we prove an upper bound on the packing dimension of certain random distribution funstions on $[0, 1]$.

С.-Петербурский государственный
Электротехнический Университет
E-mail: artemiberlinkov@pochtamt.ru

Поступило 7 октября 2005 г.