Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 328, 2005 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СКАЧКООБРАЗНОГО ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

1. Скачкообразные диффузионные процессы. Пусть $N(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Пуассона с параметром $\lambda_1 > 0$. Процесс $N(t)$ может быть представлен в следующем виде

$$N(t) = \max\Big\{l : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t\Big\} = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{I}_{[0,\infty)}\Big(t - \sum_{k=1}^{l} \tau_k\Big),$$

где τ_k, $k = 1, 2, \ldots$, – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ_1 случайные величины ($\mathbf{P}(\tau_k \geqslant t) = e^{-\lambda_1 t}$). Процесс N является процессом с независимыми приращениями, распределенными при $s < t$ по формуле

$$\mathbf{P}(N(t) - N(s) = m) = \frac{(\lambda_1(t-s))^m}{m!} e^{-\lambda_1(t-s)}.$$

Характеристическая функция приращений имеет вид

$$\mathbf{E}e^{i\eta(N(t)-N(s))} = \exp\big(-\lambda_1 t\big(1 - e^{i\eta}\big)\big), \qquad \eta \in \mathbf{R}.$$

Пусть Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, – независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от процесса N. Процесс

$$N_c(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k,$$

называется *сложным пуассоновским* процессом.

Характеристическая функция φ процесса $N_c(t)$ имеет вид

$$\varphi(\eta) = \exp\big(-\lambda_1 t\big(1 - \mathbf{E}e^{i\eta Y_1}\big)\big) = \exp\Big(\lambda_1 t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(e^{i\eta y} - 1\big)\, dF(y)\Big),$$

Настоящая работа частично поддерживалась грантами РФФИ-ННИО 04-01-04000, РФФИ 05-01-00911 и INTAS 03-51-5018.

где F – функция распределения Y_1. Правая часть этой формулы является представлением Леви–Хинчина процесса с $\Pi_t(dy) = \lambda_1 t dF(y)$.

Пусть $W(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс броуновского движения. Рассмотрим однородный диффузионный процесс X, являющийся решением стохастического диффузионного уравнения

$$dX(t) = \mu(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dW(t), \qquad X(0) = x, \tag{1.1}$$

где функции $\mu(x)$, $\sigma(x)$ удовлетворяют условию Липшица и $\sigma(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Интегральная форма (1.1) имеет вид: для любых $s \leqslant t \leqslant T$

$$X(t) = X(s) + \int_s^t \mu(X(u))\,du + \int_s^t \sigma(X(u))\,dW(u). \tag{1.2}$$

Определим процесс J следующим образом: при $\sum\limits_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t < \sum\limits_{k=1}^{l+1} \tau_k$ этот процесс является решением стохастического дифференциального уравнения

$$J(t) = J\Big(\sum_{k=1}^{l} \tau_k -\Big) + Y_l + \int\limits_{\sum\limits_{k=1}^{l} \tau_k}^{t} \mu(J(u))\,du + \int\limits_{\sum\limits_{k=1}^{l} \tau_k}^{t} \sigma(J(u))\,dW(u). \tag{1.3}$$

Здесь и далее $q- = \lim\limits_{s \uparrow q} s$. Рассмотрим семейство $X_{s,x}(t)$, $x \in \mathbf{R}$, $t \in [s,T]$, решений стохастических дифференциальных уравнений

$$X_{s,x}(t) = x + \int_s^t \mu(X_{s,x}(u))\,du + \int_s^t \sigma(X_{s,x}(u))\,dW(u). \tag{1.5}$$

Тогда с вероятностью единица для каждого фиксированного s

$$X(t) = X_{s,X(s)}(t), \qquad s \leqslant t \leqslant T,$$

Ясно, что при $\sum\limits_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t < \sum\limits_{k=1}^{l+1} \tau_k$

$$J(t) = X_{\sum\limits_{k=1}^{l} \tau_k,\, J\left(\sum\limits_{k=1}^{l} \tau_k -\right) + Y_l}(t). \tag{1.6}$$

Процесс J назовем *скачкообразным диффузионным процессом*.

Важным примером скачкообразного диффузионного процесса служит процесс, являющийся суммой броуновского движения с линейным сносом и сложного пуассоновского процесса. Пусть $W^{(\mu)}(t) = \mu t + \sigma W(t)$ – броуновское движение с линейным сносом. Предположим, что броуновское движение, процесс Пуассона и величины $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимы в совокупности. Положим

$$Z^{(\mu)}(t) := W^{(\mu)}(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k.$$

Этот процесс является также процессом с независимыми приращениями.

2. Экспоненциально распределенный момент времени. Рассмотрим метод вычисления распределений интегральных функционалов

$$A(t) := \int_0^t f(J(s))\,ds, \qquad f \geqslant 0,$$

и функционалов инфимума и супремума $\inf\limits_{0\leq s\leq t} J(s)$, $\sup\limits_{0\leq s\leq t} J(s)$.

Для броуновского движения задача о вычислении распределений интегральных функционалов впервые была решена М. Кацем [1], [2]. Для процессов с независимыми приращениями интегро–дифференциальное уравнение для преобразования Фурье интегрального функционала получено в монографии [4]. Бакстер и Донскер в [3] вычислили двойное преобразование Лапласа для вероятности супремума процесса со стационарными независимыми приращениями. Изучению распределений супремума и инфимума процессов с независимыми приращениями, не имеющих положительных скачков, посвящена работа [5]. Явные формулы распределения для супремума процесса, являющегося суммой броуновского процесса с линейным сносом и сложного пуассоновского с экспоненциально распределенными скачками получил Мордецкий в [6].

Пусть τ – не зависимый от процесса $\{X(s),\ s \geq 0\}$ и величин τ_k, Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание относительно процесса J при условии $J(0) = x$. Для краткости мы используем следующее обозначение $\mathbf{E}\{\xi; A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{I}_A\}$.

Теорема 2.1. *Пусть $\Phi(x)$ и $f(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$. Тогда функция*

$$Q(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(J(s))\,ds\Big); a \leqslant \inf_{0\leq s\leq\tau} J(s),\ \sup_{0\leq s\leq\tau} J(s) \leqslant b\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q(x) = M(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}G_{z-Y_1}(x)\,Q(z)\,dz, \tag{2.1}$$

где $M(x)$ при $x \in (a,b)$ является единственным решением задачи

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2(x)M''(x) + \mu(x)M'(x) - (\lambda + \lambda_1 + f(x))M(x) = -\lambda\Phi(x), \tag{2.2}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 0, \tag{2.3}$$

а $G_z(x)$ при $x \in (a,b) \setminus \{z\}$ является единственным непрерывным решением задачи

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2(x)G''(x) + \mu(x)G'(x) - (\lambda_1 + \lambda + f(x))G(x) = 0, \tag{2.4}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda_1/\sigma^2(z), \tag{2.5}$$

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = 0. \tag{2.6}$$

Полагаем $M(x) = 0$, $G_z(x) = 0$ при $x, z \notin (a,b)$.

Замечание 2.1. Функция $Q(x)$ удовлетворяет уравнению

$$Q(x) = M(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\,\mathbf{E}Q(z+Y_1)\,dz. \tag{2.7}$$

Замечание 2.2. Функция $Q(x)$, $x \in (a,b)$, является решением следующего интегро-дифференциального уравнения

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2(x)Q''(x) + \mu(x)Q'(x) - (\lambda + \lambda_1 + f(x))Q(x) =$$

$$= -\lambda\Phi(x) - \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(x+y)\, dF(y), \tag{2.8}$$

с граничными условиями

$$Q(a) = 0, \qquad Q(b) = 0. \tag{2.9}$$

Действительно, $G_z(x)$ является функцией Грина, т.е. при $x \in [a,b]$, функция

$$U(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\, h(z)\, dz$$

является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U''(x) + \mu(x)U'(x) - (\lambda + \lambda_1 + f(x))U(x) = -\lambda_1 h(x), \quad x \in (a,b), \tag{2.10}$$

$$U(a) = 0, \qquad U(b) = 0. \tag{2.11}$$

Согласно замечанию 2.1, для $h(x) = \mathbf{E}Q(x + Y_1)$ выполняется равенство

$$Q(x) = M(x) + U(x).$$

Сумма функций M и U удовлетворяет задаче (2.8), (2.9).

Доказательство теоремы 2.1. Положим

$$M(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ \Phi(X(\tau)) \exp\Big(-\int\limits_0^{\tau} (\lambda_1 + f(X(s)))\, ds \Big); \\ a \leqslant \inf_{0 \leq s \leq \tau} X(s), \sup_{0 \leq s \leq \tau} X(s) \leqslant b \Big\}.$$

Тогда M является решением задачи (2.2), (2.3).

Положим

$$G_z(x) := \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x \Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1} (\lambda + f(X(s)))\, ds \Big); \\ a \leqslant \inf_{0 \leq s \leq \tau_1} X(s), \sup_{0 \leq s \leq \tau_1} X(s) \leqslant b, X(\tau_1) < z \Big\}.$$

Тогда G_z является решением задачи (2.4)–(2.6).

Важно, что для всех $x \in \mathbf{R}$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} G_{z-Y_1}(x)\, dz \leqslant \mathbf{E}_x \exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1} (\lambda + f(X(s)))\, ds\Big) \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1} < 1.$$

Это влечет, что уравнение (2.1) имеет единственное ограниченное решение.

В силу представления (1.6), при условии $X(\tau_1) = z$ и $Y_1 = y$ процесс $J_1(s) = J(s+\tau_1)$, $s \geqslant 0$, не зависит от Y_1 и процесса $X(s)$ до момента τ_1, и распределен как процесс $J(s)$, $s \geqslant 0$, при условии $X(0) = z + y$. Используя это свойство, получаем

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X(\tau))\times \\
&\times \exp\Big(-\int\limits_0^{\tau} f(X(s))\, ds\Big); a \leqslant \inf_{0\leq s\leq \tau} X(s), \sup_{0\leq s\leq \tau} X(s) \leqslant b, \tau \leqslant \tau_1\Big\} \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\tau)) \exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1} f(X(s))ds - \int\limits_{\tau_1}^{\tau} f(J(s))\, ds\Big); a \leqslant \inf_{0\leq s\leq \tau_1} X(s), \\
&\sup_{0\leq s\leq \tau_1} X(s) \leqslant b, X(\tau_1) \in dz, a \leqslant \inf_{\tau_1\leq s\leq \tau} J(s), \sup_{\tau_1\leq s\leq \tau} J(s) \leqslant b, \tau_1 < \tau\Big\} \\
&= M(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1} (\lambda + f(X(s)))\, ds\Big); a \leqslant \inf_{0\leq s\leq \tau_1} X(s), \\
&\sup_{0\leq s\leq \tau_1} X(s) \leqslant b, X(\tau_1) \in dz\Big\} \mathbf{E}\Big\{\mathbf{E}_{z+Y_1}\Big\{\Phi(J_1(\tilde\tau)) \exp\Big(-\int\limits_0^{\tilde\tau} f(J_1(s))ds\Big); \\
&a \leqslant \inf_{0\leq s\leq \tilde\tau} J_1(s), \sup_{0\leq s\leq \tilde\tau} J_1(s) \leqslant b\Big\}\Big\} = M(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\, \mathbf{E} Q(z+Y_1)\, dz.
\end{aligned}$$

В предпоследнем равенстве мы воспользовались независимостью момента τ от процесса $J(s)$ и τ_1. Это позволило заменить $\tau - \tau_1$ на $\tilde\tau$, где $\tilde\tau$ – экспоненциально распределенный с параметром λ момент времени, не зависящий от процесса $J_1(s)$, $s \geqslant 0$. В связи с такой заменой появилось слагаемое λ перед функцией f в показателе первой экспоненты. Теорема доказана. $\square$

3. Момент первого выхода. Важное значение для различных приложений имеет момент $H_{a,b} := \min\{s : J(s) \notin (a,b)\}$, который является *моментом первого выхода* скачкообразного диффузионного процесса из интервала (a,b). Если начальное значение $x \notin (a,b)$ полагаем $H_{a,b} = 0$.

Рассмотрим задачу о вычислении распределений интегральных функционалов от скачкообразного диффузионного процесса, остановленного в момент времени $H_{a,b}$.

Теорема 3.1. *Пусть $\Phi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$, а Φ ограничена. Тогда функция*

$$R(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big); J(H_{a,b}) \geqslant b\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$R(x) = M_b(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}G_{z-Y_1}(x)\,R(z)\,dz, \tag{3.1}$$

где $M_b(x)$ является единственным решением задачи

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2(x)M''(x) + \mu(x)M'(x) - (\lambda_1 + f(x))M(x) = 0, \qquad x \in (a,b), \tag{3.2}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = \Phi(b), \tag{3.3}$$

а $G_z(x)$ при $x \in (a,b) \setminus \{z\}$ является единственным непрерывным решением задачи

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2(x)G''(x) + \mu(x)G'(x) - (\lambda_1 + f(x))G(x) = 0, \tag{3.4}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda_1/\sigma^2(z), \tag{3.5}$$

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = 0. \tag{3.6}$$

Полагаем $G_z(x) = 0$ при $x, z \notin (a,b)$ и $M_b(x) = 0$ при $x \leqslant a$, $M_b(x) = \Phi(x)$ при $x \geqslant b$.

Замечание 3.1. Функция $R(x)$ удовлетворяет уравнению

$$R(x) = M_b(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\,\mathbf{E}R(z+Y_1)\,dz. \tag{3.7}$$

Доказательство теоремы 3.1. Положим при $x \in \mathbf{R}$

$$M_b(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X(H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}}(\lambda_1 + f(X(s)))\,ds\Big); X(H_{a,b}) = b\Big\}.$$

Тогда $M_b(x)$ при $x \in (a,b)$ является решением задачи (3.2), (3.3).

Пусть функция $G_z(x)$ определена так же как при доказательстве теоремы 2.1 для $\lambda = 0$. Тогда G_z – решение задачи (3.4)–(3.6).

Важно, что

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}G_{z-Y_1}(x)\,dz \leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}}\mathbf{P}_x\Big(a \leqslant \inf_{0\leq s\leq\tau_1}X(s),\ \sup_{0\leq s\leq\tau_1}X(s) \leqslant b\Big) < 1.$$

Отсюда следует, что уравнение (3.1) имеет единственное ограниченное решение.

В силу представления (1.6), при условии $X(\tau_1) = z$ и $Y_1 = y$, процесс $J_1(s) = J(s+\tau_1)$, $s \geqslant 0$, распределен как процесс $J(s)$, $s \geqslant 0$, при условии $X(0) = z + y$. Используя это свойство, получаем

$$R(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X(H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}}f(X(s))\,ds\Big); X(H_{a,b}) = b, H_{a,b} < \tau_1\Big\}$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1}f(X(s))\,ds - \int\limits_{\tau_1}^{H_{a,b}}f(J(s))\,ds\Big);$$

$$a \leqslant \inf_{0\leq s\leq\tau_1}X(s),\ \sup_{0\leq s\leq\tau_1}X(s) \leqslant b, J(H_{a,b}) \geqslant b, X(\tau_1)\in dz\Big\} = M_b(x) +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau_1}f(X(s))\,ds\Big); a \leqslant \inf_{0\leq s\leq\tau_1}X(s),\ \sup_{0\leq s\leq\tau_1}X(s) \leqslant b,$$

$$X(\tau_1)\in dz\Big\}\mathbf{E}\Big\{\mathbf{E}_{z+Y_1}\Big\{\Phi(J_1(\widetilde{H}_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{\widetilde{H}_{a,b}}f(J_1(s))ds\Big);$$

$$J_1(\widetilde{H}_{a,b}) \geqslant b\Big\}\Big\} = M_b(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty}G_z(x)\,\mathbf{E}R(z+Y_1)\,dz.$$

В предпоследнем равенстве мы заменили $H_{a,b} - \tau_1$ на

$$\widetilde{H}_{a,b} := \min\{s : J_1(s) \notin (a,b)\},$$

поскольку при $X(\tau_1) = z$ и при условии $\tau_1 \leqslant H_{a,b}$, которое эквивалентно условию

$$a \leqslant \inf_{0 \leq s \leq \tau_1} X(s), \ \sup_{0 \leq s \leq \tau_1} X(s) \leqslant b,$$

процесс $J_1(s)$ начинается заново из точки $z + Y_1$. Теорема доказана. □

4. Примеры. Пусть $X = W^{(\mu)}$ – броуновское движение с линейным сносом, $Z^{(\mu)}(t) := W^{(\mu)}(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$. Рассмотрим величину

$$\mathbf{E}_x \left\{ e^{-\gamma(Z^{(\mu)}(H_{a,b})-b)} e^{-\lambda H_{a,b}}; Z^{(\mu)}(H_{a,b}) \geqslant b \right\}, \quad \gamma > 0, \lambda > 0. \tag{4.1}$$

Для ее вычисления, при определенных предположениях на распределение величин Y_1, воспользуемся теоремой 3.1 при $\sigma(x) \equiv \sigma$, $\mu(x) \equiv \mu$, $\Phi(x) = e^{-\gamma(x-b)}$, $f(x) \equiv \lambda$. Функция M_b является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2 M''(x) + \mu M'(x) - (\lambda + \lambda_1) M(x) = 0, \qquad x \in (a,b), \tag{4.2}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 1. \tag{4.3}$$

Положим для краткости $\Upsilon = \sqrt{2(\lambda + \lambda_1)\sigma^2 + \mu^2}$. Решение M_b имеет вид

$$M_b(x) = \frac{e^{\mu(b-x)/\sigma^2} \operatorname{sh}((x-a)\Upsilon/\sigma^2)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon/\sigma^2)}.$$

При этих условиях $G_z(x)$ – единственное решение задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2 G''(x) + \mu G'(x) - (\lambda + \lambda_1) G(x) = 0, \qquad x \in (a,b) \setminus \{z\}, \tag{4.4}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda_1/\sigma^2, \tag{4.5}$$

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = 0. \tag{4.6}$$

Тогда при $x \in (a,b)$, $z \in (a,b)$

$$G_z(x) = \frac{\lambda_1 e^{\mu(z-x)/\sigma^2} (\operatorname{ch}((b-a-|z-x|)\Upsilon/\sigma^2) - \operatorname{ch}((b+a-z-x)\Upsilon/\sigma^2))}{\Upsilon \operatorname{sh}((b-a)\Upsilon/\sigma^2)}.$$

При $x \notin (a,b)$ или $z \notin (a,b)$ полагаем $G_z(x) = 0$. Для $a \leqslant x \leqslant b$ выполняется равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x) e^{\rho z}\, dz = \frac{2\lambda_1}{2\lambda + 2\lambda_1 - \rho^2\sigma^2 - 2\rho\mu}\Big(e^{\rho x} -$$

$$- \frac{e^{\rho a} e^{\mu(a-x)/\sigma^2} \operatorname{sh}((b-x)\Upsilon/\sigma^2) + e^{\rho b} e^{\mu(b-x)/\sigma^2} \operatorname{sh}((x-a)\Upsilon/\sigma^2)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon/\sigma^2)}\Big). \qquad (4.7)$$

Справедливость (4.7) может быть проверена с помощью решения задачи (2.10), (2.11) при $h(x) = e^{\rho x}$, $\sigma(x) \equiv \sigma$, $\mu(x) \equiv \mu$, $f(x) \equiv 0$.

Пример 4.1. Пусть плотность распределения Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, имеет вид

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}(Y_1 < y) = \begin{cases} \varkappa\theta e^{\theta y}, & y < 0, \\ (1-\varkappa)\eta e^{-\eta y}, & y \geqslant 0. \end{cases}$$

где $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$, $\theta > 0$, $\eta > 0$.

Величину

$$R(x) := \mathbf{E}_x\big\{e^{-\gamma(Z^{(\mu)}(H_{a,b})-b)} e^{-\lambda H_{a,b}}; Z^{(\mu)}(H_{a,b}) \geqslant b\big\}$$

будем искать в следующем виде

$$R(x) = e^{-\gamma(x-b)}\, \mathbb{1}_{(b,\infty)}(x) + \sum_{k=1}^{4} A_k e^{\rho_k x}\, \mathbb{1}_{[a,b]}(x). \qquad (4.8)$$

При $a \leqslant x \leqslant b$ имеем

$$\mathbf{E}R(x + Y_1) = e^{-\gamma(x-b)}\mathbf{E}\big\{e^{-\gamma Y_1}\, \mathbb{1}_{(b-x,\infty)}(Y_1)\big\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{4} A_k e^{\rho_k x}\mathbf{E}\big\{e^{\rho_k Y_1}\, \mathbb{1}_{[a-x,b-x]}(Y_1)\big\} =$$

$$= \frac{(1-\varkappa)\eta}{\gamma+\eta} e^{-\eta(b-x)} + \sum_{k=1}^{4} A_k \Big(\frac{\varkappa\theta}{\theta+\rho_k} + \frac{(1-\varkappa)\eta}{\eta-\rho_k}\Big) e^{\rho_k x} -$$

$$- \varkappa \sum_{k=1}^{4} \frac{A_k \theta e^{\rho_k a}}{\theta+\rho_k} e^{-\theta(x-a)} - (1-\varkappa) \sum_{k=1}^{4} \frac{A_k \eta e^{\rho_k b}}{\eta-\rho_k} e^{-\eta(b-x)}.$$

Подставляя это выражение в (3.7) и принимая во внимание (4.7), мы имеем

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{A_k e^{\rho_k a}}{\theta + \rho_k} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{4} \frac{A_k e^{\rho_k b}}{\eta - \rho_k} = \frac{1}{\gamma + \eta}. \tag{4.9}$$

Приравнивая коэффициенты при $e^{\rho_k x}$, получаем, что ρ_k являются решениями уравнения

$$\left(\frac{\varkappa\theta}{\theta + \rho} + \frac{(1-\varkappa)\eta}{\eta - \rho}\right) \frac{2\lambda_1}{2\lambda + 2\lambda_1 - \rho^2\sigma^2 - 2\rho\mu} = 1, \tag{4.10}$$

или, эквивалентно, уравнения

$$\frac{\sigma^2}{2}\rho^2 + \mu\rho - \frac{\lambda_1\varkappa\rho}{\theta + \rho} + \frac{\lambda_1(1-\varkappa)\rho}{\eta - \rho} = \lambda. \tag{4.11}$$

Для корней этого уравнения выполняются неравенства $\rho_4 < -\theta < \rho_3 < 0 < \rho_2 < \eta < \rho_1$.

Приравнивая коэффициенты при

$$e^{\mu(a-x)/\sigma^2} \operatorname{sh}((b-x)\Upsilon/\sigma^2), \qquad e^{\mu(b-x)/\sigma^2} \operatorname{sh}((x-a)\Upsilon/\sigma^2),$$

имеем

$$\sum_{k=1}^{4} A_k e^{\rho_k a} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{4} A_k e^{\rho_k b} = 1. \tag{4.12}$$

Эти условия отвечают естественным требованиям, что $R(a) = 0$ и $R(b) = 1$. В результате, рассматриваемая величина выражается формулой (4.8), где ρ_k, $k = 1, 2, 3, 4$, являются решениями уравнения (4.11), и коэффициенты A_k являются решениями системы алгебраических уравнений (4.9), (4.12).

Пример 4.2. Пусть $\mu = 0$ и плотность распределения величин Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, имеет вид

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}(Y_1 < y) = \frac{1}{2}\eta e^{-\eta|y|}, \qquad \eta > 0.$$

В этом случае $Z^{(0)}(t) = \sigma W(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$ является симметричным случайным процессом ($-Z^{(0)}(t)$ распределен так же как $Z^{(0)}(t)$). Вычислим явное выражение для

$$\mathbf{E}_x\left\{e^{-\gamma(Z^{(0)}(H_{a,b})-b)} e^{-\lambda H_{a,b}}; Z^{(0)}(H_{a,b}) \geqslant b\right\}.$$

Уравнение (4.11) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\sigma^2\rho^2}{2}+\frac{\lambda_1\rho^2}{\eta^2-\rho^2}=\lambda. \tag{4.13}$$

Корни уравнения выражаются формулами

$$\rho_1=\sqrt{\frac{\lambda+\lambda_1}{\sigma^2}+\frac{\eta^2}{2}+\left(\left(\frac{\lambda+\lambda_1}{\sigma^2}+\frac{\eta^2}{2}\right)^2-\frac{2\lambda\eta^2}{\sigma^2}\right)^{1/2}},$$

$$\rho_2=\sqrt{\frac{\lambda+\lambda_1}{\sigma^2}+\frac{\eta^2}{2}-\left(\left(\frac{\lambda+\lambda_1}{\sigma^2}+\frac{\eta^2}{2}\right)^2-\frac{2\lambda\eta^2}{\sigma^2}\right)^{1/2}},$$

и $\rho_4=-\rho_1$, $\rho_3=-\rho_2$. При этом $\rho_2<\eta<\rho_1$.

Решение может быть найдено в следующем виде:

$$R(x)=e^{-\gamma(x-b)}\mathbb{1}_{(b,\infty)}(x)+\left[B\frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)}+A\frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)}-\right.$$
$$\left.-B\frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}+(1-A)\frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}\right]\mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

В таком представлении учтены условия (4.12), а именно, $R(a)=0$ и $R(b)=1$.

Обозначим $s_l:=\operatorname{sh}((b-a)\rho_l)$, $l=1,2$. Левое из условий (4.9) имеет вид

$$\frac{A-Be^{(a-b)\rho_1}}{2s_1(\eta+\rho_1)}+\frac{1-A+Be^{(a-b)\rho_2}}{2s_2(\eta+\rho_2)}-\frac{1-A+Be^{(b-a)\rho_2}}{2s_2(\eta-\rho_2)}-\frac{A-Be^{(b-a)\rho_1}}{2s_1(\eta-\rho_1)}=0.$$

Правое из условий (4.9) преобразуется в следующее:

$$\frac{Ae^{(b-a)\rho_1}-B}{2s_1(\eta-\rho_1)}+\frac{(1-A)e^{(b-a)\rho_2}+B}{2s_2(\eta-\rho_2)}-\frac{(1-A)e^{(a-b)\rho_2}+B}{2s_2(\eta+\rho_2)}-\frac{Ae^{(a-b)\rho_1}-B}{2s_1(\eta+\rho_1)}=\frac{1}{\gamma+\eta}.$$

Суммируя эти равенства, мы получаем уравнение для $A+B$, из которого следует, что

$$D_+:=A+B=\frac{\frac{\rho_2\operatorname{th}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\eta^2-\rho_2^2}-\frac{1}{\gamma+\eta}}{\frac{\rho_1\operatorname{th}((b-a)\rho_1/2)+\eta}{\rho_1^2-\eta^2}+\frac{\rho_2\operatorname{th}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\eta^2-\rho_2^2}}.$$

Вычитая вышеприведенные равенства, мы получаем уравнение для $A-B$, которое приводит к выражению

$$D_-:=A-B=\frac{\frac{\rho_2\operatorname{cth}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\eta^2-\rho_2^2}-\frac{1}{\gamma+\eta}}{\frac{\rho_1\operatorname{cth}((b-a)\rho_1/2)+\eta}{\rho_1^2-\eta^2}+\frac{\rho_2\operatorname{cth}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\eta^2-\rho_2^2}}.$$

Подставляя эти формулы в выражение для R, при $x \in (a,b)$ получаем

$$\mathbf{E}_x\left\{e^{-\gamma(Z^{(0)}(H_{a,b})-b)}e^{-\lambda H_{a,b}};\, Z^{(0)}(H_{a,b}) \geqslant b\right\} = \frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)} +$$
$$+ \frac{D_+}{2}\left(\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_1/2)} - \frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_2/2)}\right) +$$
$$+ \frac{D_-}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2/2)} - \frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1/2)}\right). \qquad (4.14)$$

Используя свойство симметрии процесса $Z^{(0)}$, при $x \in (a,b)$ имеем

$$\mathbf{E}_x\left\{e^{-\gamma(Z^{(0)}(H_{a,b})-b)}e^{-\lambda H_{a,b}};\, Z^{(0)}(H_{a,b}) \leqslant a\right\} = \frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)} +$$
$$+ \frac{D_+}{2}\left(\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_1/2)} - \frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_2/2)}\right) +$$
$$+ \frac{D_-}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1/2)} - \frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2/2)}\right). \qquad (4.15)$$

В этих формулах легко обращается преобразование Лапласа по γ, и не ясно как обращать преобразование Лапласа по λ.

Суммируя полученные формулы при $\gamma = 0$, имеем

$$\mathbf{E}_x e^{-\lambda H_{a,b}} = \frac{\widetilde{D}_+ \operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_1/2)} + \frac{(1-\widetilde{D}_+)\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_2/2)}, \quad (4.16)$$

где $\widetilde{D}_+ = D_+\big|_{\gamma=0}$ и $x \in (a,b)$. Для момента τ из п. 2 выполняется равенство

$$1 - \mathbf{E}_x e^{-\lambda H_{a,b}} = \mathbf{P}_x\Big(a \leqslant \inf_{0\leq s\leq\tau} Z^{(0)}(s),\ \sup_{0\leq s\leq\tau} Z^{(0)}(s) \leqslant b\Big).$$

Вычислим при $z > b$ вероятности

$$\mathbf{P}_x\big(Z^{(0)}(H_{a,b}) = b\big), \qquad \mathbf{P}_x\big(Z^{(0)}(H_{a,b}) \in dz\big),$$

используя предел в (4.14) при $\lambda \to 0$. Тогда $\rho_2 \to 0$, $\rho_1 \to \rho := \sqrt{2\lambda_1/\sigma^2 + \eta^2}$. Несложно убедиться, что

$$D_+ \to \frac{1}{\Delta_+}\big(1 - \frac{\eta}{\gamma+\eta}\big), \qquad D_- \to \frac{1}{\Delta_-}\big(1 + \frac{2}{\eta(b-a)} - \frac{\eta}{\gamma+\eta}\big),$$

где

$$\Delta_+ = 1 + \frac{\sigma^2\eta}{2\lambda_1}(\rho \operatorname{th}((b-a)\rho/2) + \eta),$$

$$\Delta_- = 1 + \frac{2}{\eta(b-a)} + \frac{\sigma^2\eta}{2\lambda_1}(\rho \operatorname{cth}((b-a)\rho/2) + \eta).$$

Поэтому,

$$\mathbf{E}_x\{e^{-\gamma(Z^{(0)}(H_{a,b})-b)};Z^{(0)}(H_{a,b})\geqslant b\}=\frac{x-a}{b-a}+$$
$$+\frac{1}{2\Delta_+}\Big(1-\frac{\eta}{\gamma+\eta}\Big)\Big(\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho/2)}-1\Big)+$$
$$+\frac{1}{2\Delta_-}\Big(1+\frac{2}{\eta(b-a)}-\frac{\eta}{\gamma+\eta}\Big)\Big(\frac{b+a-2x}{b-a}-\frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho/2)}\Big).$$

Обращая преобразование Лапласа по γ, имеем

$$\mathbf{P}_x\big(Z^{(0)}(H_{a,b})=b\big)=\frac{x-a}{b-a}\Big(1-\frac{1+\frac{2}{\eta(b-a)}}{\Delta_-}\Big)-\frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho/2)\operatorname{sh}((x-a)\rho/2)}{\Delta_+\operatorname{ch}((b-a)\rho/2)}+$$
$$+\Big(1+\frac{2}{\eta(b-a)}\Big)\frac{\operatorname{ch}((b-x)\rho/2)\operatorname{sh}((x-a)\rho/2)}{\Delta_-\operatorname{sh}((b-a)\rho/2)},\qquad(4.17)$$

и при $b<z$

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x\big(Z^{(0)}(H_{a,b})<z\big)=\eta e^{-\eta(z-b)}\Big[\frac{x-a}{(b-a)\Delta_-}+\frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho/2)\operatorname{sh}((x-a)\rho/2)}{\Delta_+\operatorname{ch}((b-a)\rho/2)}-$$
$$-\frac{\operatorname{ch}((b-x)\rho/2)\operatorname{sh}((x-a)\rho/2)}{\Delta_-\operatorname{sh}((b-a)\rho/2)}\Big].\qquad(4.18)$$

По свойству симметрии процесса $Z^{(0)}$, соответствующие формулы для выхода через границу a получаются из этих заменой $a\mapsto -b$, $b\mapsto -a$, $x\mapsto -x$.

Отметим один простой частный случай формулы (4.18), когда $\sigma\to 0$. В этом случае $\rho\to\infty$, $\Delta_+\to 1$, $\Delta_-\to 1+\frac{2}{\eta(b-a)}$ и

$$H_{a,b}:=\min\{s:N_c(s)\notin(a,b)\}.$$

В результате, при $b<z$ имеем

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}\Big(x+\sum_{k=1}^{N(H_{a,b})}Y_k<z\Big)=\frac{1+\eta(x-a)}{2+\eta(b-a)}\eta e^{-\eta(z-b)}.$$

Эта формула может быть проверена непосредственно.

Литература

1. Kac M., *On distribution of certain Wiener functionals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65** no. 1 (1949), 1–13.
2. Kac M., *On some connections between probability theory and differential and integral equations.* Proc. Second Berkley Symp. Math. Stat. Probab. (1951), pp. 189–215.

3. Baxter G., Donsker M. D., *On distribution of the supremum functionals for processes with stationary independent increments.* — Trans. Amer. Math. Soc. **85** no. 1 (1957), 73–87.
4. Скороход А. В., *Случайные процессы с независимыми приращениями.* М., Наука, 1964.
5. *Золотарев В. М., Момент первого прохождения уровня и поведение на бесконечности одного класса процессов с независимыми приращениями.* — Теория вероятн. и ее примен. **9**, № 4 (1964), 724–733.
6. Mordecki E., *Ruin probabilities for Lévy processes with mixed exponential negative jumps.* — Теория вероятн. и ее примен. **48**, № 1 (2003), 188–194.

Borodin A. N. Distributions of functionals of diffusions with jumps.

The paper deals with methods of computation of distributions of functionals of a diffusion process with jumps that occur in accordance with the compound Poisson process. For symmetric processes some exact formulae concerning the first exit time are derived.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 15 декабря 2005 г.