Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 328, 2005 г.

Ю. И. Ингстер, И. А. Суслина

ОЦЕНИВАНИЕ И ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ ДЛЯ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА АРГУМЕНТОВ

1. Введение

1.1. Модель. В этой статье мы рассматриваем наблюдения вида

$$X = f + \varepsilon N, \tag{1}$$

где $f = f(t)$, $t = (t_1, \dots, t_n, \dots) \in [0,1]^\infty$ – функция бесконечного числа переменных, $f \in L_2^\infty = L^2([0,1]^\infty)$, и N – бесконечномерный гауссовский белый шум на $[0,1]^\infty$. Поясним эту модель.

Интервал $[0,1]$ мы рассматриваем как вероятностное пространство с борелевской σ-алгеброй и мерой Лебега λ, а $[0,1]^\infty$ как произведение вероятностных пространств с цилиндрической σ-алгеброй и произведением мер λ^∞. Пространство L_2^∞ состоит из вещественнозначных функций $f(t)$, $t \in [0,1]^\infty$, таких, что

$$\int f^2(t)\lambda^\infty(dt) < \infty$$

и снабжено стандартным скалярным произведением. Пусть $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ есть множество функций $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ и $L_2^n = L_2([0,1]^n)$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим стандартную проекцию $p_n : [0,1]^\infty \to [0,1]^n$. Ей соответствует вложение $p^n : \mathcal{F}([0,1]^n) \to \mathcal{F}([0,1]^\infty)$. Рассмотрим вложения

$$p^1 L_2^1 \subset \dots \subset p^n L_2^n \subset p^{n+1} L_2^{n+1} \subset \dots \subset \mathcal{F}([0,1]^\infty).$$

Нетрудно видеть, что множество L_2^∞ является замыканием множества $\cup_{n\in\mathbb{N}} p^n L_2^n$ относительно этих вложений. Ясно, что L_2^∞ сепарабельное гильбертово пространство и, если $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, $g = \lim_{n\to\infty} g_n$, то $(f,g) = \lim_{n\to\infty}(f_n, g_n)$.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 05-01-00920, ведущих научных школ NSh 2258.2003.1 и PICS 2715.

Напомним, что n-мерный гауссовский белый шум на $[0,1]^n$ представляет из себя такую функцию $N_n : L_2^n \to G_0$, где G_0 есть множество центрированных гауссовских случайных величин, что, если $\xi = N_n(f)$, $\eta = N_n(g)$, $f, g \in L_2^n$, то $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = (f, g)$. Бесконечномерный гауссовский белый шум на $[0,1]^\infty$ есть такая функция $N : L_2^\infty \to G_0$, что выполнено аналогичное свойство: если $\xi = N(f)$, $\eta = N(g)$, $f, g \in L_2^\infty$, то $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = (f, g)$. Смотри, например, [11].

В рассматриваемой модели "наблюдение" $X = f + \varepsilon N$ есть такая функция $X : L_2^\infty \to G$, где G – множество гауссовских случайных величин, что, если $\xi = X(\phi)$, $\eta = X(\psi)$, $\phi, \psi \in L_2^\infty$, то $E(\xi) = (f, \phi)$, $E(\eta) = (f, \psi)$, $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = \varepsilon^2(\phi, \psi)$. Для любой $f \in L_2^\infty$, наблюдение (1) определяет гауссову меру $P_{\varepsilon,f}$ на гильбертовом пространстве L_2^∞ с математическим ожиданием f и ковариационным оператором $\varepsilon^2 I$. Смотри, например, [3].

1.2. Постановка задачи. Пусть задано $\mathcal{F} \subset L_2^\infty$. Мы будем изучать задачу минимаксного оценивания функции $f \in \mathcal{F}$ по наблюдениям (1). Для оценки $\hat{f}_\varepsilon$ (то есть измеримой функции наблюдений X, принимающей значения в L_2^∞), рассмотрим ее квадратичный риск

$$R_\varepsilon^2(\hat{f}_\varepsilon, \mathcal{F}) = \sup_{f \in \mathcal{F}} E_{\varepsilon,f} \|f - \hat{f}_\varepsilon\|_2^2,$$

где $E_{\varepsilon,f}$ есть математическое ожидание по мере $P_{\varepsilon,f}$, соответствующей наблюдению (1). Минимаксный квадратичный риск оценивания $R_\varepsilon^2(\mathcal{F})$ определяется соотношением

$$R_\varepsilon^2 = R_\varepsilon^2(\mathcal{F}) = \inf_{\hat{f}_\varepsilon} R_\varepsilon^2(\hat{f}_\varepsilon, \mathcal{F}), \tag{2}$$

где инфимум берется по всем оценкам $\hat{f}_\varepsilon$. В задаче оценивания мы будем изучать асимптотику при $\varepsilon \to 0$ минимаксного квадратичного риска оценивания. В задаче проверки гипотез мы будем проверять гипотезу об отсутствии сигнала $H_0 : f = 0$ против альтернативы $H_1 : f \in \mathcal{F}(r_\varepsilon)$, где множество $\mathcal{F}(r_\varepsilon)$ состоит из функций $f \in \mathcal{F}$ отделенных от нулевой функции. Точнее, выбирая положительное семейство $r_\varepsilon \to 0$, полагаем

$$\mathcal{F}(r_\varepsilon) = \{f \in \mathcal{F} : \|f\|_2 \geq r_\varepsilon\}. \tag{3}$$

Нас будут интересовать условия асимптотической различимости в этой задаче. То есть, условия при которых "минимаксная вероятность ошибки" $\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}(r_\varepsilon))$ стремится к нулю (состоятельная различимость) или единице (неразличимость).

Для теста ψ_ε – измеримой функции наблюдения X_ε со значениями в промежутке $[0,1]$, положим

$$\alpha_\varepsilon(\psi_\varepsilon) = E_{\varepsilon,0}\psi_\varepsilon, \quad \beta_\varepsilon(\psi_\varepsilon, f) = E_{\varepsilon,f}(1-\psi_\varepsilon),$$
$$\gamma_\varepsilon(\psi_\varepsilon, f) = \alpha_\varepsilon(\psi_\varepsilon) + \beta_\varepsilon(\psi_\varepsilon, f).$$

Минимаксная вероятность ошибки γ_ε определяется соотношениями

$$\gamma_\varepsilon(\psi_\varepsilon, \mathcal{F}(r_\varepsilon)) = \sup_{f\in\mathcal{F}(r_\varepsilon)} \gamma_\varepsilon(\psi_\varepsilon, f),$$
$$\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon(\mathcal{F}(r_\varepsilon)) = \inf_{\psi_\varepsilon} \gamma_\varepsilon(\psi_\varepsilon, \mathcal{F}(r_\varepsilon)).$$

Также нас будут интересовать "критические радиусы" в рассматриваемой задаче.

Мы назовем *критическими радиусами* для альтернативы (3) такое семейство r_ε^*, что

$$\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}(r_\varepsilon)) \to 0, \quad \text{если} \quad r_\varepsilon \gg r_\varepsilon^*,$$
$$\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}(r_\varepsilon)) \to 1, \quad \text{если} \quad r_\varepsilon \ll r_\varepsilon^*.$$

Это означает, что для малых ε, можно обнаружить любую функцию $f \in \mathcal{F}(r_\varepsilon)$, если отношение $r_\varepsilon/r_\varepsilon^*$ велико, если же это отношение мало, то различимость с малой вероятностью ошибки нулевой гипотезы и альтернативы $\mathcal{F}(r_\varepsilon)$ невозможна.

Хорошо известно, что не существует состоятельных оценок и критических радиусов $r_\varepsilon^* \to 0$ для "достаточно широких" множеств $\mathcal{F}$; чтобы получить нетривиальную задачу необходимо ввести некоторые "регулярные ограничения" на рассматриваемые функции. Для функций n переменных, обычно эти ограничения имеют вид некоторых предположений о " гладкости" функций f и задаются в терминах некоторых норм (соболевских, бесовских, гельдеровских, и так далее), измеряющих гладкость. Часто эти ограничения могут быть заданы в пространстве последовательностей, что соответствует разложению функций из рассматриваемого множества по некоторому ортогональному в L_2^n базису.

Типичный результат выглядит следующим образом. Пусть $\sigma > 0$ – гладкость функции f в соболевской норме $\|\cdot\|_{\sigma,2}$ (это соответствует гладкости в L_2-норме производной порядка σ функции f) и множество $\mathcal{F} \subset L_2^n$ есть шар в соболевской норме

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_n = \{f \in L_2^n : \|f\|_{\sigma,2} \le C\}, \tag{4}$$

где $C > 0$ фиксированная константа. Тогда минимаксный квадратичный риск оценивания имеет порядок (смотри, например, [9, 12, 3]),

$$R_\varepsilon = R_{\varepsilon,n}(\sigma) \asymp \varepsilon^{2\sigma/(2\sigma+n)}, \tag{5}$$

критические радиусы в задаче проверки гипотез имеют вид

$$r_\varepsilon^* = r_{\varepsilon,n}^*(\sigma) = \varepsilon^{4\sigma/(4\sigma+n)}. \tag{6}$$

Точная асимптотика была получена в предположении, что изучаемые функции допускают 1-периодическое, σ-гладкое продолжение по любой переменной на $\mathbb{R}^n$. Одномерный случай задачи оценивания изучался Пинскером [10], а задачи проверки гипотез – Ермаковым [1]. Случай $n > 1$ был изучен в [8] для двух вариантов соболевских полунорм.

Пусть $\sigma \in \mathbb{N}$ целое. Первый вариант соболевских полунорм соответствует сумме L_2-норм частных производных порядка σ по каждой переменной:

$$\|f\|_{\sigma,2}^2 = \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial^\sigma f}{\partial t_k^\sigma} \right\|_2^2. \tag{7}$$

Второй вариант соответствует сумме L_2-норм всех смешанных частных производных порядка σ:

$$\|f\|_{\sigma,2}^2 = \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_\sigma=1}^{n} \left\| \frac{\partial^\sigma f}{\partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_\sigma}} \right\|_2^2. \tag{8}$$

В общем случае $\sigma > 0$, определим полунорму в терминах коэффициентов Фурье

$$\theta_l = (f, \phi_l), \quad l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$$

по отношению к ортогональному в L_2^n базису

$$\phi_l(t) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{l_k}(t_k),$$

где

$$\phi_0(u) = 1, \quad \phi_j(u) = \sqrt{2}\cos(2\pi j u), \quad \phi_{-j}(u) = \sqrt{2}\sin(2\pi j u)$$
$$\text{при} \quad j > 0, \ u \in R.$$

Ясно, что

$$\|f\|_2^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \theta_l^2.$$

Предположим, что рассматриваемые функции удовлетворяют *условиям периодичности*, т. е, для любой производной $f^{(k)}$ порядка $0 \le k \le \sigma$, выполнено

$$f^{(k)}(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_n) = f^{(k)}(t_1, \dots, t_{j-1}, 1, t_{j+1}, \dots, t_n), \tag{9}$$
$$1 \le j \le n.$$

При условии (9) полунорма (7) соответствует

$$\|f\|_{\sigma,2}^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \theta_l^2 c_l^2, \quad c_l^2 = \sum_{k=1}^{n} |2\pi l_k|^{2\sigma}, \tag{10}$$

в свою очередь полунорма (8) соответствует

$$\|f\|_{\sigma,2}^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \theta_l^2 c_l^2, \quad c_l^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} (2\pi l_k)^2\right)^{\sigma}. \tag{11}$$

В пространстве последовательностей коэффициентов Фурье, занумерованных индексами $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$, множество $\mathcal{F}_n$ соответствует эллипсоиду с полуосями c_l^{-1}, где c_l определены соотношениями (10) или (11).

Приведем точную асимптотику изучаемых характеристик в рассматриваемых задачах (здесь и далее мы полагаем $C = 1$ в соотношении (4)). Для задачи оценивания риск R_ε:

$$R_\varepsilon = R_{\varepsilon,n}(\sigma) \sim c(\sigma, n)\varepsilon^{2\sigma/(2\sigma+n)}. \tag{12}$$

Величины $\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}_{\varepsilon,n})$ и $u_{\varepsilon,n}$ для задачи проверки гипотез:

$$\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}_{\varepsilon,n}) = 2\Phi(-u_{\varepsilon,n}/2) + o(1), \quad u_{\varepsilon,n} \sim d(\sigma, n) r_\varepsilon^{2+n/2\sigma}\varepsilon^{-2}. \tag{13}$$

Константы $c(\sigma, n), d(\sigma, n)$ зависят от вида соболевской полунормы.

Случай $n = n_\varepsilon \to \infty$ был, в свою очередь, изучен в [8].

2. Основные результаты

2.1. Ограничения гладкости. В этой работе для функций бесконечного числа аргументов мы рассмотрим следующие "ограничения гладкости".

Предположим сначала, что $\sigma \in \mathbb{N}$ (натуральное число). Рассмотрим следующий дифференциальный оператор

$$I_k^\sigma f = \frac{\partial^\sigma f}{\partial t_k^\sigma}.$$

Пусть задана последовательность $\mathbf{a} = \{a_k\}$, $a_k > 0$, положим

$$\|f\|^2_{\sigma,\mathbf{a}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|I_k^\sigma f\|_2^2.$$

Будем предполагать выполненными ограничения периодичности, сравни с (9): для любой производной $f^{(k)}$ порядка $0 \le k \le \sigma$ справедливо

$$f^{(k)}(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots) = f^{(k)}(t_1, \dots, t_{j-1}, 1, t_{j+1}, \dots), \quad j \ge 1. \tag{14}$$

Рассмотрим множества функций, удовлетворяющих условию (14) и следующему условию (15)

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}} = \{f \in L_2^\infty : \|f\|_{\sigma,\mathbf{a}} \le 1\}, \quad \mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}}(r_\varepsilon) = \{f \in \mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}},\ \|f\|_2 \ge r_\varepsilon\}. \tag{15}$$

Чтобы определить норму $\|f\|_{\sigma,\mathbf{a}}$ в случае нецелого $\sigma > 0$, фиксируем в L_2^∞ базис, состоящий из функций

$$\phi_l(t) = \prod_k \phi_{l_k}(t_k), \quad l \in \mathbb{Z}_*^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_*^n.$$

Здесь мы полагаем $\mathbb{Z}_*^n = (l_1, \dots, l_n, 0, \dots, 0, \dots) \subset \mathbb{Z}^\infty$, то есть множество индексов $\mathbb{Z}_*^\infty$ состоит из последовательностей с конечным числом $l_k \ne 0$.

В терминах коэффициентов Фурье $\theta_l = (f, \phi_l)$, $l \in \mathbb{Z}_*^\infty$, будем иметь

$$\|f\|^2_{\sigma,\mathbf{a}} = \sum_{l \in \mathbb{Z}_*^\infty} \theta_l^2 c_l^2, \quad c_l^2 = \sum_k a_k^2 |2\pi l_k|^{2\sigma}. \tag{16}$$

В пространстве последовательностей коэффициентов Фурье множество $\mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}}$ соответствует эллипсоиду с полуосями c_l^{-1}, $l \in \mathbb{Z}_*^\infty$, определенными соотношением (16). Величины a_k определяют ограничения на k-ю производную рассматриваемых функций.

Нас будет интересовать случай $a_k \to \infty$, поскольку, если $\liminf_{k\to\infty} a_k < \infty$, то как задача оценивания, так и задача проверки гипотез тривиальны в следующем смысле.

Предложение 1. *Пусть* $a_* = \liminf_{k\to\infty} a_k < \infty$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Задача проверки гипотез тривиальна в следующем смысле:*

$$\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}}(r_\varepsilon)) \equiv 1 \quad \forall \ \ \varepsilon > 0, \ r_\varepsilon \in (0, r_*), \ r_* = (2\pi)^{-\sigma} a_*^{-1}.$$

(2) *В задаче оценивания не существует состоятельной последовательности оценок* $\hat{f}_\varepsilon$ *такой, что* $R_\varepsilon^2(\hat{f}_\varepsilon, \mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}}) \to 0$.

В частности, задачи оценивания и проверки гипотез тривиальны в "изотропном" случае постоянной последовательности a_k.

Доказательство предложения 1 приведено в разделе 3.1.

Мы будем рассматривать при $a_k \to \infty$ последовательности степенного $a_k = k^\alpha$, $\alpha > 0$ и показательного $a_k = \exp(\lambda k)$, $\lambda > 0$ типа. Соответственно, обозначим

$$\mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}} = \mathcal{F}_{p,\sigma}^{\alpha} \quad \text{при} \quad a_k = k^\alpha, \qquad \mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}} = \mathcal{F}_{\exp,\sigma}^{\lambda} \quad \text{при} \quad a_k = \exp(\lambda k). \tag{17}$$

2.2. Результаты для задачи проверки гипотез. Введем следующие величины

$$r_{p,\varepsilon}^* = A/(\log \varepsilon^{-1})^{\alpha+1/2},$$
$$r_{\exp,\varepsilon}^* = A_1(\log\varepsilon^{-1})^{-1/4}\exp\left(-2\sqrt{2\lambda\sigma\log\varepsilon^{-1}}\right). \tag{18}$$

Теорема 2.1.
(1) *Пусть* $a_k = k^\alpha$, $\alpha > 0$. *Тогда существует константа* $A = A(\sigma,\alpha) > 0$ *в первом выражении* (18) *такая, что:*

(a) *если* $\liminf r_\varepsilon/r_{p,\varepsilon}^* > 1$, *то* $\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}_{p,\sigma}^\alpha(r_\varepsilon)) \to 0$;

(b) *если* $\limsup r_\varepsilon/r_{p,\varepsilon}^* < 1$, *то* $\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}_{p,\sigma}^\alpha(r_\varepsilon)) \to 1$.

(2) *Пусть* $a_k = \exp(\lambda k)$, $\lambda > 0$. *Тогда существует константа* $A_1 = A_1(\sigma,\lambda) > 0$ *во втором выражении* (18) *такая, что:*

(a) *если* $\liminf r_\varepsilon/r_{\exp,\varepsilon}^* > 1$, *то* $\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}_{\exp,\sigma}^\lambda(r_\varepsilon)) \to 0$;

(б) *если* $\limsup r_\varepsilon/r^*_{\exp,\varepsilon} < 1$, *то* $\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}^\lambda_{\exp,\sigma}(r_\varepsilon)) \to 1$.

Теорема 2.1 утверждает, что величины (18) являются критическими радиусами в рассматриваемой задаче. Константы A и A_1 определяются при доказательстве.

2.3. Результаты для задачи оценивания

Теорема 2.2. (1) *Пусть* $a_k = k^\alpha$, $\alpha > 0$. *Тогда существует постоянная* $B = B(\sigma, \alpha) > 0$ *такая, что*

$$R_\varepsilon(\mathcal{F}^\alpha_{p,\sigma}) \sim B/(\log\varepsilon^{-1})^{\alpha+1/2}.$$

(2) *Пусть* $a_k = \exp(\lambda k)$, $\lambda > 0$. *Тогда существует постоянная* $B_1 = B_1(\sigma, \lambda) > 0$ *такая, что*

$$R_\varepsilon(\mathcal{F}^\alpha_{p,\sigma}) \sim B_1(\log\varepsilon^{-1})^{-1/4}\exp\left(-2\sqrt{\lambda\sigma\log\varepsilon^{-1}}\right).$$

Константы B и B_1 будут определены при доказательстве теоремы.

3. Доказательства

3.1. Доказательство предложения 1. Предположим, что $a_* = \liminf\limits_{k\to\infty} a_k < \infty$ и $0 < r_\varepsilon < r_*(1-\delta)$, $\delta \in (0,1)$. Тогда существует возрастающая последовательность k_j, $j \in \mathbb{N}$ такая, что $a_{k_j}(1-\delta) < a^*$. Выберем последовательность $l^j = (l^j_1, \dots, l^j_s, \dots) \in \mathbb{Z}^\infty_*$ вида $l^j_s = 0$, $s \neq k_j$, $l^j_{k_j} = 1$ и рассмотрим набор функций

$$\mathcal{F}_\varepsilon = \{f_j(t) = r_\varepsilon\phi_{l^j}(t) = r_\varepsilon\sqrt{2}\cos(2\pi t_{k_j}),\ j \in \mathbb{N}\}.$$

Ясно, что

$$\|f_j\|_2 = r_\varepsilon, \quad \|f\|_{\sigma,\mathbf{a}} = a_{k_j}(2\pi)^\sigma r_\varepsilon < a_{k_j}(2\pi)^\sigma r_*(1-\delta) < a^*(2\pi)^\sigma r_* = 1.$$

Это влечет $\mathcal{F}_\varepsilon \subset \mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}}(r_\varepsilon)$, и достаточно показать, что $\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}_\varepsilon) = 1$.

Пусть $\mathcal{F}^n_\varepsilon = \{f_j,\ 1 \le j \le n\}$. Так как функции $\{f_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ ортогональны в L^∞_2, из [7], Следствие 4.5 (2), формула (4.145) следует, что при $n \to \infty$

$$\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}_\varepsilon) \ge \gamma_\varepsilon(\mathcal{F}^n_\varepsilon) = \Phi(\sqrt{\log n} - r_\varepsilon/\varepsilon) + o(1) \to 1.$$

Предложение 1 (1) доказано.

Предложение 1 (2) следует из предложения 1 (1). Действительно, если существует состоятельная последовательность оценок $\hat{f}_\varepsilon$, то, используя процедуру “подстановки”, можно построить семейство тестов ψ_ε, такое что $\gamma_\varepsilon(\psi_\varepsilon, \mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}}(r_\varepsilon)) \to 0$ для некоторого семейства $r_\varepsilon \to 0$, смотри предложение 2.17 в [7]. $\square$

3.2. Доказательство теоремы 2.1. В пространстве последовательностей, точная асимптотика в задаче проверки гипотез для эллипсоидов с удаленным шаром имеет вид (сравни с (13), смотри [7], п. 4.3.3))

$$\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}}(r_\varepsilon)) = 2\Phi(-u_\varepsilon/2) + o(1), \tag{19}$$

где $u_\varepsilon^2 = u^2(\varepsilon, r_\varepsilon)$ есть значение экстремальной задачи

$$u^2(\varepsilon, r_\varepsilon) = \inf \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}_*^\infty} v_l^4, \quad \text{при ограничениях}$$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}_*^\infty} v_l^2 \geq (r_\varepsilon/\varepsilon)^2, \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}_*^\infty} c_l^2 v_l^2 \leq \varepsilon^{-2}. \tag{20}$$

Кроме того, условие неразличимости принимает вид

$$\gamma_\varepsilon(\mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}}(r_\varepsilon)) \to 1 \quad \text{при} \quad u_\varepsilon \to 0. \tag{21}$$

Решение экстремальной задачи (20), имеет вид

$$\bar{v}_l^2 = u_0^2(1 - (c_l/T)^2)_+, \tag{22}$$

где величины $u_0 > 0$, $T > 0$ определяются из соотношений

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}_*^\infty} \bar{v}_l^2 = u_0^2 \sum_{c_l < T} (1 - (c_l/T)^2) = (r_\varepsilon/\varepsilon)^2, \tag{23}$$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}_*^\infty} c_l^2 \bar{v}_l^2 = u_0^2 \sum_{c_l < T} c_l^2 (1 - (c_l/T)^2) = (1/\varepsilon)^2, \tag{24}$$

$$T \geq r_\varepsilon^{-1} \to \infty, \tag{25}$$

при этом значение экстремальной задачи принимает вид

$$u_\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}_*^\infty} \bar{v}_l^4 = \frac{1}{2} u_0^4 \sum_{c_l < T} (1 - (c_l/T)^2)^2. \tag{26}$$

Ср. с теоремой 2 в [8].

Положим

$$I_1 = \sum_{c_l<T} (1 - (c_l/T)^2), \tag{27}$$

$$I_2 = \sum_{c_l<T} (c_l/T)^2(1 - (c_l/T)^2), \tag{28}$$

$$I_0 = \sum_{c_l<T} (1 - (c_l/T)^2)^2 = I_1 - I_2. \tag{29}$$

Из (23), (24), (26) следует, что

$$T^2 = r_\varepsilon^{-2} I_1/I_2, \tag{30}$$

$$u_\varepsilon^2 = \frac{1}{2}(r_\varepsilon/\varepsilon)^4 I_0/I_1^2. \tag{31}$$

Изучим асимптотику величин I_k, $k = 0, 1, 2$ при $T \to \infty$. Мы используем вероятностные методы изучения, базирующиеся на технике теории больших уклонений.

Для любого $u > 0$ введем вероятностную меру P_u на $\mathbb{Z}$, полагая

$$P_u(l) = \exp(-u|l|^{2\sigma} - Z(u)),\ Z(u) = Z_\sigma(u) = \log\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \exp(-u|l|^{2\sigma})\right) > 0.$$

Эта мера определена корректно, поскольку

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \exp(-u|l|^{2\sigma}) \le 1 + 2\int_0^\infty \exp(-ux^{2\sigma})\,dx = 1 + u^{-1/2\sigma}\Gamma(1/2\sigma)/\sigma.$$

Полагая $u = m^{-2\sigma}$, мы получим

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \exp(-u|l|^{2\sigma}) = m\left(m^{-1}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \exp(-|l/m|^{2\sigma})\right) \sim 2m\int_0^\infty \exp(-x^{2\sigma})\,dx$$

$$= u^{-1/2\sigma}\Gamma(1/2\sigma)/\sigma, \quad \text{при} \quad u \to 0,$$

$$Z(u) = (1/2\sigma)\log(1/u) + D + o(1), \quad \text{при} \quad u \to 0; \tag{32}$$

$$Z(u) \asymp 1, \quad \text{при} \quad u \asymp 1, \tag{33}$$

где

$$D = \log(\Gamma(1/2\sigma)/\sigma) = \log(2\Gamma(1 + 1/2\sigma)).$$

Кроме того, справедливо соотношение

$$Z(u) = \log(1 + 2e^{-u} + o(e^{-u})) \sim 2e^{-u} \quad \text{при} \quad u \to \infty. \tag{34}$$

Проверим (34). Полагая $\eta = 2\sigma$, будем иметь

$$G_u = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \exp(-u|l|^\eta) = 1 + 2e^{-u} + \exp(-2^\eta u) f(u),$$

где

$$f(u) = \sum_{2 \le |l| < \infty} \exp(-u(|l|^\eta - 2^\eta)).$$

Ясно, что $f(u)$ убывает по u, и при $u > 1$

$$1 \le f(u) \le f(1) \le \exp(2^\eta) G_1 \asymp 1.$$

Из этого следует, что, если $u \to \infty$, то

$$G_u = 1 + 2e^{-u} + O(\exp(-2^\eta u)) \sim 1 + 2e^{-u}, \tag{35}$$

и соотношение (34) справедливо.

Положим

$$D(\alpha, \sigma) = \int_0^\infty y^{\alpha - 1} Z(y) dy < \infty. \tag{36}$$

В силу (32), (33), (34), интегралы (36) сходятся для любого $\alpha > 0$. Легко видеть, что функция $Z(u)$ бесконечно дифференцируема при $u > 0$.

Обозначим через $Z^{(k)}(u)$ производную k-го порядка функции $Z(u)$, $u > 0$. Аналогично соотношениям (32)–(34) для любого $k \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$(-1)^k Z^{(k)}(u) \asymp 1, \quad \text{при} \quad u \asymp 1, \tag{37}$$

$$(-1)^k Z^{(k)}(u) \sim (1/2\sigma)(k-1)!\, u^{-k}, \quad \text{при} \quad u \to 0, \tag{38}$$

$$(-1)^k Z^{(k)}(u) \sim 2e^{-u}, \quad \text{при} \quad u \to \infty. \tag{39}$$

Интегрируя по частям, будем иметь для любых $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}$:

$$D_k(\alpha, \sigma) = (-1)^k \int_0^\infty y^{\alpha + k - 1} Z^{(k)}(y) dy = (\alpha + k - 1)(\alpha + k - 2) \ldots \alpha\, D(\alpha, \sigma).$$

В частности,

$$D_1(\alpha,\sigma) = -\int_0^\infty y^\alpha Z'(y)dy = \alpha\, D(\alpha,\sigma). \tag{40}$$

По отношению к введенной на $\mathbb{Z}$ мере P_u, рассмотрим случайную величину $X = |l|^{2\sigma}$. В силу равномерной сходимости почленно продифференцированного ряда на любом компакте из $(0,\infty)$, будем иметь

$$E_u X = -Z'(u), \quad \operatorname{Var}_u X = Z''(u). \tag{41}$$

Кроме того, введем обозначения

$$\mu_u^4(X) = E_u(X - E_u(X))^4 = s_u^4(X) + 3(\operatorname{Var}_u X)^2,$$

где $s_u^4(X) = Z^{(4)}(u)$ есть 4-й семиинвариант случайной величины X по мере P_u.

Для любого $h > 0$ положим

$$u_k = a_k^2, \quad P_{k,h} = P_{hu_k}, \quad Z_h = \sum_{k\in\mathbb{N}} Z(hu_k)$$

и введем продакт-меру

$$P_h^\infty = \prod_{k\in\mathbb{N}} P_{k,h},$$

соответствующую последовательности независимых случайных величин

$$Y_k = u_k|l_k|^{2\sigma}, \ k\in\mathbb{N}.$$

При $l = \{l_k\} \in \mathbb{Z}_*^\infty$ имеем

$$P_h^\infty(l) = \prod_{k\in\mathbb{N}} P_{k,h}(l_k) = \exp(-h\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k|l_k|^{2\sigma} - Z_h).$$

Эта мера определена на прямом произведении $\mathbb{Z}^\infty = \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$. Заметим, что она сосредоточена на множестве $\mathbb{Z}_*^\infty$. Действительно, множество $\mathbb{Z}_*^n$ состоит из последовательностей $l = (l_1,\dots,l_n,0,\dots,0\dots)$ и

$$P_h^\infty(\mathbb{Z}_*^n) = \sum_{l\in\mathbb{Z}_*^n} \exp(-\sum_{k=1}^n hu_k|l_k|^{2\sigma} - Z_h) = \exp(-\sum_{k=n+1}^\infty Z(hu_k)).$$

Так как $\mathbb{Z}_*^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{Z}_*^n$, и ряд для Z_h сходится, то

$$P_h^\infty(\mathbb{Z}_*^\infty) = \lim_{n\to\infty} P_h^\infty(\mathbb{Z}_*^n) = 1.$$

Положим

$$S = \sum_{k=1}^\infty Y_k.$$

Заметим, что $\{S < H\} \subset \mathbb{Z}_*^\infty$ для любого $H > 0$ и $P_h^\infty(S < \infty) = 1$. Рассмотрим функции $f_j(t),\ j = 0, 1, 2$

$$f_1(t) = 1 - t,\ f_2(t) = t(1-t),\ f_0(t) = f_1^2(t); \quad 0 \le f_j(t) \le 1 \quad \text{при} \quad t \in [0, 1].$$

Положим

$$T^2 = (2\pi)^{2\sigma} H, \quad H \to \infty.$$

Соотношения (27)–(29) можно преобразовать к следующему виду:

$$I_j = \exp(Z_h) E_{h,\infty} \{f_j(S/H) \exp(hS) \mathbb{I}_{S<H}\}, \quad j = 0, 1, 2. \tag{42}$$

Здесь и далее $E_{h,\infty}(\cdot)$ есть математическое ожидание по мере P_h^∞.

Выберем $h = h(H)$ так, что

$$E_{h,\infty} S = H. \tag{43}$$

В силу (41), это соотношение можно преобразовать к виду

$$H = \sum_{k\in\mathbb{N}} E_{hu_k} Y_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k E_{hu_k} X_k = -\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k Z'(hu_k). \tag{44}$$

Заметим, что $H \to \infty$ влечет $h \to 0$. Действительно, в силу (37), (39) для любого $h > 0$ имеем

$$-u_k Z'(hu_k) \sim 2u_k \exp(-hu_k), \quad \text{при} \quad u_k \to \infty,$$

и легко видеть, что, если h отделено от 0, то правая часть (44) ограничена. Следовательно, необходимо изучить соотношение (44) при $h \to 0$.

3.2.1. Случай степенной последовательности. Введем обозначения

$$m = h^{-1/2\alpha} \to \infty, \quad hu_k = (k/m)^{2\alpha} = y_k^{2\alpha}, \quad y_k = k/m.$$

Преобразуем (44) к виду

$$H = -\frac{m}{h}\left(\frac{1}{m}\sum_{k\in\mathbb{N}} y_k^{2\alpha} Z'(y_k^{2\alpha})\right) \sim -\frac{m}{h}\int_0^\infty y^{2\alpha} Z'(y^{2\alpha})dy = C_1 m^{1+2\alpha},$$

где, ввиду (40),

$$\begin{aligned} C_1 &= -\int_0^\infty y^{2\alpha} Z'(y^{2\alpha})dy = -(2\alpha)^{-1}\int_0^\infty t^{1/2\alpha} Z'(t)dt \\ &= (2\alpha)^{-1} D_1(1/2\alpha,\sigma) = (2\alpha)^{-2} D(1/2\alpha,\sigma). \end{aligned} \tag{45}$$

Таким образом, мы показали, что справедливы следующие соотношения:

$$hH \sim C_1 m; \quad H \sim C_1 m^{1+2\alpha}. \tag{46}$$

Аналогично,

$$Z_h = \sum_{k\in\mathbb{N}} Z(hu_k) = m\left(\frac{1}{m}\sum_{k\in\mathbb{N}} Z(y_k^{2\alpha})\right) \sim C_0 m, \tag{47}$$

где

$$C_0 = \int_0^\infty Z(y^{2\alpha})dy = (2\alpha)^{-1}\int_0^\infty t^{1/2\alpha-1} Z(t)dt = (2\alpha)^{-1} D(1/2\alpha,\sigma). \tag{48}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \sigma_h^2 = \mathrm{Var}_{h,\infty} S, \quad s_h^4 &= \sum_{k\in\mathbb{N}} s_{hu_k}^4(Y_k), \\ \mu_h^4 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_{hu_k}^4(Y_k) &= s_h^4 + 3\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Var}_{hu_k}^2(Y_k). \end{aligned} \tag{49}$$

Проведя аналогичные вычисления, будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_h^2 &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Var}_{hu_k} Y_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k^2 Z''(hu_k)\\ &= \frac{m}{h^2}\left(\frac{1}{m}\sum_{k\in\mathbb{N}} y_k^{4\alpha} Z''(y_k^{2\alpha})\right)\\ &\sim \frac{m}{h^2}\int_0^\infty y^{4\alpha} Z''(y^{2\alpha})dy \asymp \frac{m}{h^2}, \qquad (50)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Var}^2_{hu_k}(Y_k) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k^4 (Z''(hu_k))^2 = \frac{m}{h^4}\left(\frac{1}{m}\sum_{k\in\mathbb{N}} y_k^{8\alpha}(Z''(y_k^{2\alpha}))^2\right)\\ &\asymp \frac{m}{h^4} = h^{-(4+1/2\alpha)}; \qquad (51)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_h^4 &= \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k^4 Z^{(4)}(hu_k) = \frac{m}{h^4}\left(\frac{1}{m}\sum_{k\in\mathbb{N}} y_k^{8\alpha} Z^{(4)}(y_k^{2\alpha})\right)\\ &\asymp \frac{m}{h^4} = h^{-(4+1/2\alpha)}. \qquad (52)\end{aligned}$$

Соотношения (49)–(52) влекут

$$\frac{\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu^4_{hu_k}(Y_k)}{\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Var}_{hu_k} Y_k\right)^2} = \frac{\mu_h^4}{\sigma_h^4} \asymp \frac{1}{m} \to 0 \quad \text{при} \quad H\to\infty. \qquad (53)$$

Положим

$$\lambda_h = (S-H)/\sigma_h.$$

Условие (53) по теореме Ляпунова является достаточным для асимптотической $\mathcal{N}(0,1)$-нормальности случайной величины λ_h по P_h^∞-вероятности.

Преобразуем (42) к следующему виду:

$$I_j = \exp(Z_h + hH)E_j, \quad E_j = E_{h,\infty}\left(g_{j,H}(\lambda_h)\exp(h\sigma_h\lambda_h)\mathbb{1}_{\lambda_h<0}\right), \quad j=0,1,2, \qquad (54)$$

где

$$\begin{aligned}g_{1,H}(\lambda_h) &= -\sigma_h\lambda_h/H,\\ g_{2,H}(\lambda_h) &= (1+\sigma_h\lambda_h/H)g_{1,H}(\lambda_h),\\ g_{0,H}(\lambda_h) &= g^2_{1,H}(\lambda_n) = g_{1,H}(\lambda_h) - g_{2,H}(\lambda_h).\end{aligned}$$

Как показывают предыдущие вычисления,

$$\sigma_h/H \asymp m^{-1/2} \to 0.$$

Ясно, что $E_j \le 1$. С другой стороны, если $\lambda_h \in (-2\delta, -\delta)$, где $\delta > 0$ любое фиксированное число, то при достаточно большом H

$$g_{1,H}(\lambda_h) \ge \delta\sigma_h/H, \quad g_{2,H}(\lambda_h) \ge (1 - 2\delta\sigma_h/H)\delta\sigma_h/H,$$
$$g_{0,H}(\lambda_h) \ge (\delta\sigma_h/H)^2.$$

Таким образом,

$$E_j \ge (\delta\sigma_h/H)^2 \exp(-2\delta h\sigma_h)\, P_h^\infty(\lambda_h \in (-2\delta, -\delta))$$
$$\ge \exp(-2\delta h\sigma_h - O(\log(m))),$$

в силу

$$P_h^\infty(\lambda_h \in (-2\delta, -\delta)) \asymp 1,$$

что следует из асимптотической нормальности λ_h. Используя (46), (47), (50), из (54), имеем

$$\log(I_j) = Z_h + hH + o(h\sigma_h) - O(\log m) = Cm + o(m^{1/2}), \quad C = C_0 + C_1. \tag{55}$$

Более того, для любого $B > 0$ справедливо

$$g_1(\lambda_h) \ge g_2(\lambda_h) \ge g_1(\lambda_h)(1 - B\sigma_h/H), \quad \text{если} \quad \lambda_h \in (-B, 0],$$
$$E_{h,\infty}\left(g_{j,H}(\lambda_n)\exp(h\sigma_h\lambda_h)\mathbb{1}_{\{\lambda_h < -B\}}\right) \le \exp(-Bh\sigma_h) = o(E_j).$$

Отсюда имеем

$$I_1 \sim I_2. \tag{56}$$

Из (30), (31), (56) следует, что

$$T^2 = (2\pi)^{2\sigma}H \sim r_\varepsilon^{-2}, \quad u_\varepsilon^2 \asymp \frac{I_0}{H^2\varepsilon^4 I_1^2}. \tag{57}$$

Определим критические радиусы $r_{p,\varepsilon}^*$ из соотношения $u_\varepsilon^2 \asymp 1$. В силу (55), (57), (46) это влечет следующее уравнение для определения m,

$$4\log\varepsilon^{-1} = 2\log H + Cm + o(m^{1/2}) = Cm + o(m^{1/2}).$$

Снова используя (46), получим

$$m \sim \frac{4}{C}\log\varepsilon^{-1}, \quad r^*_{p,\varepsilon} \sim (2\pi)^{-\sigma}H^{-1/2} \sim A/(\log\varepsilon^{-1})^{\alpha+1/2},$$

где

$$A=(2\pi)^{-\sigma}C_1^{-1/2}(C/4)^{\alpha+1/2},\ C=C_0+C_1=D(1/2\alpha,\sigma)(2\alpha+1)(2\alpha)^{-2}.$$

Легко видеть, что из соотношения (57) следует $u_\varepsilon \to \infty$, если $\liminf r_\varepsilon/r^*_{p,\varepsilon} > 1$ и $u_\varepsilon \to 0$, если $\limsup r_\varepsilon/r^*_{p,\varepsilon} < 1$. Теорема 2.1 (1) доказана.

3.2.2. Случай экспоненциальной последовательности. Аналогично разделу 3.2.1 положим

$$h=\exp(-2\lambda m),\ \ m\to\infty, \quad hu_k=\exp(2\lambda(k-m))=y(k-m),$$
$$y(j)=\exp(2\lambda j)$$

и перепишем (44):

$$\begin{aligned}-hH &= \sum_{k=1}^{\infty} y(k-m)Z'(y(k-m))\\ &= \sum_{-m+1\le j<\infty} y(j)Z'(y(j)) = S_1+S_2+S_3,\end{aligned}$$

где

$$S_1=\sum_{-m+1\le j<-M} y(j)Z'(y(j)), \quad S_2=\sum_{-M\le j<M} y(j)Z'(y(j)), \tag{58}$$

$$S_3=\sum_{M\le j<\infty} y(j)Z'(y(j)), \quad M\asymp\log m\to\infty. \tag{59}$$

Используя соотношения (37)–(39) при $k=1$ и в силу

$$\exp(x)\ge 1+x>x, \quad \exp(-x)\le 1/x, \quad x\exp(-x)\le 1/x \ \ \forall\ x>0, \tag{60}$$

мы получим асимптотику

$$-S_1\sim\frac{m}{2\sigma}, \qquad -S_2\asymp M,$$
$$0\le -S_3\le 2\sum_{j\ge M} y^{-1}(j) = 2\sum_{j\ge M}\exp(-2\lambda j)=o(1).$$

Отсюда следует асимптотика

$$hH \sim \frac{m}{2\sigma}, \quad H \sim \frac{m\exp(2\lambda m)}{2\sigma}, \quad m \to \infty. \tag{61}$$

Оценим величину Z_h. Аналогично предыдущему, имеем

$$Z_h = \sum_{k\in\mathbb{N}} Z(hu_k) = \sum_{k=1}^{\infty} Z(y(k-m)) = \sum_{-m+1\le j<\infty} Z(y(j)) = S_1+S_2+S_3,$$

где S_l, $l=1,2,3$ есть суммы подобные суммам (58)–(59). Используя соотношения (32)–(34), (60) получим

$$\begin{aligned} S_1 &= D(m-M-1) - \frac{\lambda}{\sigma}\sum_{-m+1\le j<-M} j + o(m) \\ &= Dm + \frac{\lambda m(m-1)}{2\sigma} + o(m), \\ S_2 &= \sum_{-M\le j<M} Z(y(j)) = O(MZ(y(-M))) = O(M^2) = o(m), \\ S_3 &= o(1). \end{aligned}$$

Таким образом

$$Z_h = \frac{\lambda m^2}{2\sigma} + D_1 m + o(m), \quad D_1 = D - \frac{\lambda}{2\sigma}. \tag{62}$$

Аналогичные вычисления и (37)–(39) при $k=2,4$ приводят к подобным (50)–(52), соотношениям

$$h^2\sigma_h^2 = h^2\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Var}_{hu_k} Y_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} y^2(k-m)Z''(y(k-m)) \sim \frac{m}{2\sigma}, \tag{63}$$

$$h^4\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Var}^2_{hu_k}(Y_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} y^4(k-m)(Z''(y(k-m)))^2 \asymp m; \tag{64}$$

$$h^4 s_h^4 = \sum_{k\in\mathbb{N}} y^4(k-m)Z^{(4)}(y(k-m)) \asymp m. \tag{65}$$

Соотношения (49), (63)–(65) влекут (53) и асимптотическую $\mathcal{N}(0,1)$-нормальность случайной величины $\lambda_h = (S-H)/\sigma_h$ по P_h^{∞}-вероятности.

Следующие рассуждения повторяют рассуждения 3.2.1, начиная с соотношений (54). Используя (61), (62) аналогично (55), получим

$$\log(I_j) = Z_h + hH + o(h\sigma_h) - O(\log m) = (\lambda/2\sigma)m^2 + D_2 m + o(m), \quad (66)$$

где $D_2 = D_1 + 1/2\sigma$. Далее мы получаем (56), (57). Определим критические радиусы $r^*_{\exp,\varepsilon}$ из соотношения $u_\varepsilon^2 \asymp 1$. В виду (66), (57), отсюда находим уравнение для определения m,

$$4\log\varepsilon^{-1} = (\lambda/2\sigma)m^2 + 2\log H + D_2 m + o(m) = (\lambda/2\sigma)m^2 + D_3 m + o(m), \quad (67)$$

где $D_3 = D_2 + 4\lambda$. Из (67) следует

$$m = \left(\frac{8\sigma}{\lambda}\log\varepsilon^{-1}\right)^{1/2} + E_1 + o(1), \quad E_1 = -\frac{\sigma D_3}{\lambda}. \quad (68)$$

Используя (61) и (68) находим

$$H \sim \frac{m}{2\sigma}\exp(2\lambda m) \sim E_2(\log\varepsilon^{-1})^{1/2}\exp\left(4\sqrt{2\lambda\sigma\log\varepsilon^{-1}}\right),$$

$$r^*_{\exp,\varepsilon} \sim (2\pi)^{-\sigma}H^{-1/2} \sim A_1(\log\varepsilon^{-1})^{-1/4}\exp\left(-2\sqrt{2\lambda\sigma\log\varepsilon^{-1}}\right),$$

где

$$E_2 = \exp(2\lambda E_1)\sqrt{\frac{2}{\lambda\sigma}}, \quad A_1 = \frac{1}{(2\pi)^\sigma {E_2}^{1/2}}.$$

Из (57) легко видеть, что $u_\varepsilon \to \infty$, если $\liminf r_\varepsilon / r^*_{\exp,\varepsilon} > 1$, и $u_\varepsilon \to 0$, если $\limsup r_\varepsilon / r^*_{\exp,\varepsilon} < 1$. Теорема 2.1 (2) доказана. □

3.3. Доказательство теоремы 2.2. Отметим вначале общий результат в задаче оценивания, вытекающий из [10].

Предложение 2. *Пусть* $\mathcal{F}^\alpha_{p,\sigma}$ *множество, определенное соотношениями* (15), (17), (16), *а* $E^2_{\varepsilon,\infty}$ *является решением экстремальной задачи на множестве вещественных последовательностей* $\{v_l,\ l\in\mathbb{Z}^\infty_*\}$:

$$E^2_{\varepsilon,\infty} = \varepsilon^2 \sup \sum_{l\in\mathbb{Z}^\infty_*} \frac{v_l^2}{v_l^2+1}, \quad \textit{при условии} \quad \sum_{l\in\mathbb{Z}^\infty_*} c_l^2 v_l^2 \le \varepsilon^{-2}. \quad (69)$$

Тогда

$$R_\varepsilon(\mathcal{F}^\alpha_{p,\sigma}) \le E_{\varepsilon,\infty}. \quad (70)$$

Последовательность $\{\bar v_l^2\}$, $l \in \mathbb{Z}_*^\infty$, *на которой достигается экстремум в* (69) *имеет вид*

$$\bar v_l^2 = (T/c_l - 1)_+ \tag{71}$$

(*положим* $\bar v_l^2 = \infty$, *если* $c_l = 0$), *где величины* $T = T_\varepsilon > 0$ *таковы, что*

$$\sum_{c_l<T} c_l^2 \bar v_l^2 = T^2 \sum_{c_l<T} (c_l/T - (c_l/T)^2) = \varepsilon^{-2}, \tag{72}$$

и значение экстремума представляется в виде

$$E_{\varepsilon,\infty}^2 = \varepsilon^2 \sum_{c_l<T} (1 - c_l/T). \tag{73}$$

Предположим, что $T_\varepsilon \to \infty$, *тогда* $R_\varepsilon(\mathcal{F}_{p,\sigma}^\alpha) \geq E_{\varepsilon,\infty}(1+o(1))$. *Совместно с* (70) *это влечет*

$$R_\varepsilon(\mathcal{F}_{p,\sigma}^\alpha) \sim E_{\varepsilon,\infty}. \tag{74}$$

Асимптотически минимаксная оценка является оценкой линейного вида:

$$f_\varepsilon^* = \sum_{c_l<T} \alpha_{\varepsilon,l}^* X(\phi_l), \quad \alpha_{\varepsilon,l}^* = 1 - c_l/T.$$

Доказательство. Задача минимаксного оценивания для эллипсоидов общего вида была изучена в [10]. Обозначения [10] в нашем случае соответствуют $\sigma_l = \varepsilon$, $a_l = c_l^2$, $P = 1$ (имеется несущественная разница в том, что $l \in \mathbb{Z}$ в [10] и $l \in \mathbb{Z}_*^\infty$ в нашем случае). Соотношение (19) в [10] соответствует

$$N(t) = \#\{l \in \mathbb{Z}_*^\infty : c_l \leq t\} = \#\{l \in \mathbb{Z}^{k(t)} : c_l \leq t\} < \infty \quad \forall\ t > 0, \tag{75}$$

где $k(t) \in \mathbb{N}$ таково, что $(k(t)-1)^{2\alpha}(2\pi)^{2\sigma} < t \leq k(t)^{2\alpha}(2\pi)^{2\sigma}$. Это выполнено для рассматриваемых норм. Используя лемму 1 в [10] и, полагая $T = \mu^{-1/2}$, $v_l = \theta_l/\varepsilon$, мы приходим к экстремальной задаче (69). Последовательность, на которой достигается экстремум, имеет вид (71), (72), при этом значение экстремума может быть представлено в виде (73). Следовательно, неравенство (70) справедливо (см. [10, теорема 1 (1)]).

Соотношение (74) установлено в [10], теорема 1 (2) при условии $r = \varepsilon^{-2}E_{\varepsilon,\infty}^2 \to \infty$. Это условие следует из $T_\varepsilon \to \infty$ (смотри также [8, теорема 1]). $\square$

Доказательство теоремы 2.2 (1). Положим $T^2 = (2\pi)^{2\sigma} H$ и

$$I_{es,1} = \sum_{c_l < T} (1 - c_l/T), \tag{76}$$

$$I_{es,2} = \sum_{c_l < T} (c_l/T)(1 - c_l/T). \tag{77}$$

Из соотношений (72), (73) следует, что

$$T^2 = 1/(\varepsilon^2 I_{es,2}), \quad E^2_{\varepsilon,\infty} = \varepsilon^2 I_{es,1}. \tag{78}$$

Положим

$$f_{es,1} = 1 - \sqrt{t}, \quad f_{es,2} = \sqrt{t}(1 - \sqrt{t}).$$

Пусть $a_k = k^\alpha$, $\alpha > 0$. Также как при доказательстве теоремы 2.1, мы можем преобразовать соотношения (76), (77) к виду

$$I_{es,j} = \exp(Z_h) E_{h,\infty} \left\{ f_{es,j}(S/H) \exp(hS) \mathbb{1}_{S<H} \right\}, \quad j = 1, 2. \tag{79}$$

Аналогично пункту 3.2, из этого следует $I_{es,1} \sim I_{es,2}$ и $E^2_{\varepsilon,\infty} \sim T^{-2}$. Определим h при помощи соотношения (43). Как и в пункте 3.2.1 имеем $H \sim C_1 m^{1+2\alpha}$, где $m = h^{-1/2\alpha}$ и C_1 определено соотношением (45). Аналогично (55),

$$\log I_{es,j} = Cm + o(m^{1/2}), \quad C = C_0 + C_1, \qquad j = 1, 2,$$

где C_0 определено соотношением (48). Следовательно, используя первое из соотношений (78), мы будем иметь

$$\log I_{es,j} = Cm + o(m^{1/2}) = 2 \log \varepsilon^{-1} + O(\log m).$$

Это влечет

$$m \sim 2 \log \varepsilon^{-1}/C, \quad T^2 \sim (2\pi)^{2\sigma} C_1 (2 \log \varepsilon^{-1}/C)^{1+2\alpha}.$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(\mathcal{F}^\alpha_{p,\sigma}) \sim E_{\varepsilon,\infty} \sim T^{-1} &\sim ((2\pi)^{2\sigma} C_1 (2 \log \varepsilon^{-1}/C)^{1+2\alpha})^{-1/2} \\ &= B/(\log \varepsilon^{-1})^{\alpha+1/2}, \end{aligned}$$

где $B = (2\pi)^{-\sigma} C_1^{-1/2} (C/2)^{\alpha+1/2}$. $\square$

Доказательство теоремы 2.2 (2). Пусть $a_k = exp(\lambda k)$, $\lambda > 0$. Мы следуем схеме рассуждений раздела 3.2.2. Аналогично (61) имеем

$$hH \sim \frac{m}{2\sigma}, \quad H \sim \frac{m\exp(2\lambda m)}{2\sigma}, \quad m \to \infty.$$

Аналогично (66) получим

$$\log(I_{es,j}) = Z_h + hH + o(h\sigma_h) - O(\log m) = (\lambda/2\sigma)m^2 + D_2 m + o(m),$$

где $D_2 = D_1 + 1/2\sigma$ и D_1 определено (62). Напомним, что $T^2 = (2\pi)^{2\sigma}H$. Используя первое соотношение (78) имеем

$$\log I_{es,j} = (\lambda/2\sigma)m^2 + D_2 m + o(m) = 2\log\varepsilon^{-1} - 2\lambda m + O(\log m).$$

Это влечет

$$m \sim 2\sqrt{\frac{\sigma}{\lambda}\log\varepsilon^{-1}} + E_{es,1}, \quad T^2 \sim E_{es,2}\sqrt{\log\varepsilon^{-1}}\exp(4\sqrt{\lambda\sigma\log\varepsilon^{-1}}),$$

где

$$E_{es,1} = -2\sigma - \frac{\sigma}{\lambda}D_2, \qquad E_{es,2} = (2\pi)^{2\sigma}\exp(2\lambda E_{es,1})/\sqrt{\lambda\sigma}.$$

Отсюда

$$R_\varepsilon(\mathcal{F}^\alpha_{p,\sigma}) \sim E_{\varepsilon,\infty} \sim T^{-1} \sim (E_{es,2})^{-1/2}(\log\varepsilon^{-1})^{-1/4}\exp(-2\sqrt{\lambda\sigma\log\varepsilon^{-1}}).\square$$

Литература

1. М. С. Ермаков, *Минимаксное обнаружение сигнала в гауссовском белом шуме.*— Теория вероятностей и ее примен. **35**, No. 4 (1990), 704–715.
2. И. А. Ибрагимов и Р. З. Хасьминский, *Одна задача статистического оценивания в гауссовском белом шуме.* — Доклады АН СССР **236**, No. 6 (1977), 1300–1302.
3. I. A. Ibragimov and R. Z. Khasminskii, *Some estimation problems on Infinite dimensional Gaussian white noise.* — In: Festschrift for Lusien Le Cam. Research papers in Probability and Statictics, Springer-Verlag, NY (1997), 275–296.
4. Ю. И. Ингстер, *О минимаксном непараметрическом обнаружении сигнала в гауссовском белом шуме.* — Проблемы передачи информации **18**,No. 2 (1982), 61–73.
5. Yu. I. Ingster, *Asymptotically minimax testing of nonparametric hypotheses.* — In: Proc. 4th Vilnius Conference on Probab. Theory and Math. Stat., VNU Science Press, 1 (1987), 553–573.
6. Yu. I. Ingster, *Asymptotically minimax hypothesis testing for nonparametric alternatives.* I, II, III. — Math. Methods Statist. **2** (1993) 85–114, 171–189, 249–268.

7. Yu. I. Ingster and I. A. Suslina, *Nonparametric Goodness-of-Fit Testing under Gaussian Model.*— Lectures Notes in Statistics. **169**, Springer-Verlag, New York (2002).
8. Yu. I. Ingster and I. A. Suslina, *On estimation and detection of smooth function of many variables.* — Math. Methods Statist., **14**, No. 3 (2005), 299–331.
9. М. Нуссбаум, *Оптимальная фильтрация функции многих переменных в гауссовском белом шуме.* — Проблемы передачи информации **19**, No. 3 (1983), 23–29.
10. М. С. Пинскер, *Оптимальная фильтрация квадратично-интегрируемых функций в гауссовском шуме.* – Проблемы передачи информации **16**, No. 2 (1980), 52–68.
11. А. В. Скороход, *Интегрирование в гильбертовом пространстве.* Наука, М. (1975).
12. Ch. Stone, *Additive regression and other nonparametric models.* — Ann. Stat. **13**, No. 2 (1985), 689–705.

On estimation and detection of infinite-variable function

Yuri Ingster and Irina Suslina

We observe an unknown infinite-variable function $f = f(t)$, $t = (t_1, \dots, t_n, \dots) \in [0,1]^\infty$, in the white Gaussian noise of a level $\varepsilon > 0$. We suppose that, in each variable, there exist 1-periodical σ-smooth extensions of functions $f(t)$ on $\mathbb{R}^\infty$. Taking a quantity $\sigma > 0$ and a positive sequence $\mathbf{a} = \{a_k\}$, we consider the set $\mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}}$ that consists of functions f such that $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|\partial^\sigma f/\partial t_k^\sigma\|_2^2 \leq 1$. We consider the cases $a_k = k^\alpha$ and $a_k = \exp(\lambda k)$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$. We want to estimate a function $f \in \mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}}$ or to test the null hypothesis $H_0 : f = 0$ against alternatives $f \in \mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}}(r_\varepsilon)$ where the set $\mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}}(r)$ consists of functions of $f \in \mathcal{F}_{\sigma,\mathbf{a}}$ such that $\|f\|_2 \geq r$.

In the estimation problem, we obtain the asymptotics (as $\varepsilon \to 0$) of the minimax quadratic risk. In the detection problem, we study the sharp asymptotics of minimax separation rates r_ε^* that provide distiguishability in the problems.

С. Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ)

E-mail: ingster@pdmi.ras.ru

Поступило 10 ноября 2005 г.

С. Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики

E-mail: isuslina@mail.ru