Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 328, 2005 г.

В. В. Литвинова, Я. Ю. Никитин

ДВА СЕМЕЙСТВА КРИТЕРИЕВ НОРМАЛЬНОСТИ, ОСНОВАННЫХ НА ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ПОЙА, И ИХ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ

1. Введение

Нормальный закон занимает центральное место в теории вероятностей и математической статистике, а статистические модели, предполагающие нормальность наблюдений, часто появляются в прикладных областях. Поэтому проверка нормальности является одной из наиболее важных и интересных задач проверки гипотез.

Несмотря на множество характеризаций нормального закона, см., например, [11] и [16], существует очень немного работ, посвященных критериям нормальности, основанным на характеризациях. Примерами таких работ являются [20, 7] и [8]. В частности, в [17] был построен и изучен инвариантный относительно масштаба критерий нормальности, основанный на классической характеризации Пойа [18]. Сама же идея построения критериев согласия, основанных на характеризациях, впервые была высказана Ю. В. Линником в [3] и [4].

В данной работе мы строим два новых семейства критериев нормальности, основанных на следующей характеризации нормального закона, обобщающей характеризацию Пойа, см. [1, 15].

Теорема 1. *Пусть $X_1, X_2, \dots, X_m$, $m \geq 2$, центрированные независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения (ф.р.) F, и пусть постоянные $a_1, \dots, a_m$ таковы, что $0 < a_i < 1$ и $\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$. Тогда две статистики X_1 и $\sum_{i=1}^m a_i X_i$ одинаково распределены тогда и только тогда, когда $F \in N(0, \sigma^2)$ с некоторой дисперсией $\sigma^2 > 0$.*

Теорема Пойа является частным случаем этого утверждения при $m = 2$ и $a_1 = a_2 = 1/\sqrt{2}$.

Поддержано грантом РФФИ 04-01-00716 и грантом УР-04.01.306.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка объема n с ф.р. G. Используя характеризацию из теоремы 1, будем проверять сложную гипотезу H_0, состоящую в том, что $G \in N(0, \sigma^2)$ с некоторой неопределенной дисперсией $\sigma^2 > 0$ против альтернативы H_1, состоящей в том, что $G \notin N(0, \sigma^2)$. Рассмотрим эмпирическую ф.р. $G_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i < t\}$, $t \in R^1$, и при $m \geq 2$ так называемую V-статистическую эмпирическую ф.р.

$$R_{m,n}(t) = n^{-m} \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} \frac{1}{m!} \Big(\sum_{\sigma} \mathbb{I}\{a_{\sigma(i_1)} X_{i_1} + \ldots + a_{\sigma(i_m)} X_{i_m} < t\} \Big),$$

где внутреннее суммирование берется по всем перестановкам индексов $i_1, \ldots, i_m$, а $t \in R^1$.

По теореме ГливенкоКантелли, которая справедлива и для V-статистических эмпирических ф.р. [14], ф.р. G_n равномерно близка к ф.р. X_1, а ф.р. $R_{m,n}$ равномерно близка к ф.р. $\sum_{i=1}^m a_i X_i$. Поэтому ввиду теоремы 1 мы можем построить тестовые статистики для проверки H_0 против H_1, используя подходящий функционал от разности $G_n - R_{m,n}$.

Мы будем рассматривать критерии согласия с H_0, основанные на следующих двух статистиках:

$$B_{2,n}^1 = \int_{-\infty}^{\infty} [G_n(t) - R_{2,n}(t)] dG_n(t),$$

$$C_{m,n}^1 = \int_{-\infty}^{\infty} [G_n(t) - R_{m,n}(t)] dG_n(t), \qquad m > 2.$$

Вторая статистика будет изучаться только в простейшем случае $a_j = 1/\sqrt{m}$, $j = 1, \ldots, m$.

Эти интегральные статистики много проще квадратичных статистик. Мы доказываем ниже, что они асимптотически эквивалентны V-статистикам с невырожденными ядрами и, стало быть, асимптотически нормальны.

Предлагаемые нами статистики не являются состоятельными против любых альтернатив, однако мы доказываем их состоятельность для ряда распространенных альтернатив: сдвига, скошенных, лемановских и загрязнения. Многие классические статистики состоятельны лишь против определенного класса альтернатив; этот недостаток часто искупается их более высокой эффективностью в сравнении с так называемыми "омнибустестами".

Далее мы вычисляем локальную бахадуровскую эффективность новых тестов и максимизируем ее по отношению к параметрам a_1, a_2 и m. Неожиданным образом обнаруживается, что для первой статистики при альтернативе сдвига случай Пойа $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ наихудший и что наибольшая эффективность достигается при a_1 близком к 0 или 1. Эффективность критерия при этом очень высока. Для второй статитики в типичных случаях эффективность стремится к 1 при росте m, так что мы рекомендуем брать достаточно большие m.

Можно рассматривать питменовскую эффективность вместо локальной бахадуровской, численно результаты получаются те же самые, но их доказательство требует иной техники, см. [19, гл. 7].

2. Статистика $B_{2,n}^1$

Рассмотрим статистику $B_{2,n}^1$ и обозначим $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a^2 + b^2 = 1$. Эта статистика обобщает статистику из [17], где рассматривался лишь случай Пойа $a = 1/\sqrt{2}$. Ясно, что при H_0 можно считать, что $\sigma = 1$. Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_n(x) dG_n(x) = n^{-2} \sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{1}\{X_k < X_j\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n},$$

наша статистика асимптотически эквивалентна V-статистике степени 3 с ограниченным ядром $h_1^a(X,Y,Z)$:

$$\begin{aligned} h_1^a(X,Y,Z) = \frac{1}{2} &- \frac{1}{6}\mathbb{I}\Big\{aX + bY < Z\Big\} - \frac{1}{6}\mathbb{I}\Big\{aY + bX < Z\Big\} - \\ &- \frac{1}{6}\mathbb{I}\Big\{aY + bZ < X\Big\} - \frac{1}{6}\mathbb{I}\Big\{aZ + bY < X\Big\} - \\ &- \frac{1}{6}\mathbb{I}\Big\{aX + bZ < Y\Big\} - \frac{1}{6}\mathbb{I}\Big\{aZ + bX < Y\Big\}. \end{aligned}$$

Для статистической практики можно пользоваться асимптотически эквивалентной U-статистикой с тем же ядром [2], которая вычисляется проще.

Чтобы найти предельное поведение этих статистик, следует вычислить (см. [2, гл. 4]), проекцию ядра $h_1^a(X,Y,Z)$, а именно

$$\psi_1^a(t) = \mathbf{E}(h_1^a(X,Y,Z)|Z=t), \tag{1}$$

и найти дисперсию этой проекции $\Delta_1^2(a)$ при H_0:

$$\Delta_1^2(a) = \mathbf{E}(\psi_1^a(Z))^2. \tag{2}$$

Ясно, что

$$\psi_1^a(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\mathbb{P}\Big\{aX+bY<t\Big\} - \frac{1}{3}\mathbb{P}\Big\{aX+bt<Y\Big\} - \frac{1}{3}\mathbb{P}\Big\{at+bX<Y\Big\}.$$

Поскольку

$$\mathbb{P}\Big\{aX+bY<t\Big\} = \Phi(t), \quad \mathbb{P}\Big\{aX+bt<Y\Big\} = 1-\Phi\Big(\frac{bt}{\sqrt{1+a^2}}\Big),$$
$$\mathbb{P}\Big\{at+bX<Y\Big\} = 1-\Phi\Big(\frac{at}{\sqrt{1+b^2}}\Big),$$

то проекция имеет вид

$$\psi_1^a(t) = \frac{1}{3}\Phi\Big(\frac{bt}{\sqrt{1+a^2}}\Big) + \frac{1}{3}\Phi\Big(\frac{at}{\sqrt{1+b^2}}\Big) - \frac{1}{3}\Phi(t) - \frac{1}{6}.$$

Видно, что для нахождения $\Delta_1^2(a)$ необходимо вычислить для любых действительных α и β интегралы:

$$h_1(\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha t)d\Phi(t), \qquad h_2(\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\alpha t)d\Phi(t),$$
$$h_3(\alpha) := \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha t)\Phi(t)d\Phi(t), \qquad h_4(\alpha,\beta) := \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha t)\Phi(\beta t)d\Phi(t).$$

Легко показать, что для любого α $h_1(\alpha) = \frac{1}{2}$, а в [17] найдено, что

$$h_2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{\sqrt{1+2\alpha^2}},$$
$$h_3(\alpha) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{\alpha}{\sqrt{2+\alpha^2}}.$$

Вычисление $h_4(\alpha,\beta)$ основано на следующей лемме.

Лемма 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha t)\Phi(\beta t)d\Phi(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{\alpha\beta}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}.$$

Доказательство. После дифференцирования интеграла по α, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}h_4(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} t\varphi(\alpha t)\varphi(t)\Phi(\beta t)dt = \frac{\beta}{2\pi(1+\alpha^2)\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}.$$

Проинтегрируем полученное выражение по α, тогда

$$h_4(\alpha,\beta) + C = \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}},$$

где постоянная C может быть найдена из условия $h_4(0,\beta) = \frac{1}{4}$. Поэтому $C = -\frac{1}{4}$, и мы окончательно получаем

$$h_4(\alpha,\beta) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{\alpha\beta}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}. \qquad \square$$

Комбинируя значения $h_i(\alpha)$, $i = 1,2,3$, и $h_4(\alpha,\beta)$, мы находим:

$$\begin{aligned}\Delta_1^2(a) = \frac{7}{108} - \frac{1}{9\pi}\Big(&\arctan\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2+2b^2}} + \arctan\sqrt{\frac{1+b^2}{1+b^2+2a^2}} + \\ &+ \arctan\sqrt{\frac{b^2}{2+2a^2+2b^2}} + \arctan\sqrt{\frac{a^2}{2+a^2+2b^2}} - \\ &- \arctan\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^4+b^4+2a^2+2b^2+a^2b^2+1}}\Big).\end{aligned} \tag{3}$$

Для $a \in (0,1)$ дисперсия $\Delta_1^2(a)$ равномерно отделена от нуля. Это нелегко показать аналитически, но видно из графика функции $a \to \Delta_1^2(a)$. Поэтому наше семейство U- и V-статистик невырождено. Из теоремы Хеффдинга [13], [2, гл. 4], получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *При справедливости* H_0 *выполнено*

$$\sqrt{n}B_{2,n}^1 \xrightarrow{d} \mathbf{N}\Big(0, 9\Delta_1^2(a)\Big),$$

где $\Delta_1^2(a)$ *дается формулой* (3).

Используя эту теорему, мы можем найти для любого $a \in (0,1)$ приближенное критическое значение, отвечающее заданному уровню значимости.

Переходим к вычислению локальной бахадуровской эффективности последовательности статистик $B_{2,n}^1$. Пусть альтернатива из H_1 зависит от параметра θ и при $\theta \to 0$ стремится к основной гипотезе. Обозначим через $c_T(\theta)$ точный бахадуровский наклон последовательности статистик T_n, см. [10, 6] об основных положениях теории Бахадура. Одной из привлекательных сторон этой теории является существование верхней границы для точного наклона в терминах информации Кульбака–Лейблера, см. [10, §7]; [6, Гл. 1]. Именно,

$$c_T(\theta) \le 2K(\theta),$$

где $K(\theta)$ – это "расстояние" Кульбака–Лейблера между альтернативой и нулевой гипотезой. Локальная бахадуровская эффективность определяется как

$$\mathrm{eff}_T = \lim_{\theta\to 0} \frac{c_T(\theta)}{2K(\theta)}.$$

В соответствии с [10, §7] и [7, теорема 2.1], мы находим, что точный наклон $c_1(\theta)$ последовательности $\{B_{2,n}^1\}$ имеет вид

$$c_1(\theta) = 2h(b_1(\theta)), \tag{4}$$

где

$$b_1(\theta) = \mathbf{E}_\theta h_1^a(X,Y,Z), \qquad h(t) \sim t^2/(18\Delta_1^2(a)), \quad t \to 0. \tag{5}$$

Альтернатива сдвига. Вычислим локальный бахадуровский наклон и локальную бахадуровскую эффективность при простой альтернативе сдвига, когда ф.р. наблюдений есть

$$G(x;\theta) = \Phi(\frac{x-\theta}{\tau}), \quad \theta > 0, \quad \tau > 0, \tag{6}$$

а τ^2 – некоторая известная дисперсия. Здесь функция b_1 равна

$$\begin{aligned} b_{1.1}(a;\theta) &= \frac{1}{2} - \mathbb{P}_\theta\Big\{aX + bY < Z\Big\} = \\ &= \frac{1}{2} - \mathbb{P}_\theta\Big\{a\frac{X-\theta}{\tau} + b\frac{Y-\theta}{\tau} - \frac{Z-\theta}{\tau} < -\frac{\theta(a+b-1)}{\tau}\Big\} = \\ &= \frac{1}{2} - \Phi\Big(-\frac{\theta(a+b-1)}{\tau\sqrt{1+a^2+b^2}}\Big) \sim \frac{\theta(a+b-1)}{\sqrt{2\pi}\tau\sqrt{1+a^2+b^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что критерий состоятелен при $0 < a < 1$ (напомним, что $b = \sqrt{1-a^2}$). Тогда получаем следующую формулу для локального бахадуровского наклона

$$c_{1.1}(a;\theta) \sim \frac{(a+b-1)^2\theta^2}{18\pi\Delta_1^2(a)\tau^2(a^2+b^2+1)}, \qquad a \in (0,1).$$

Из [17] следует, что $K(\theta) \sim \theta^2/2\tau^2$, $\theta \to 0$. Поэтому локальная бахадуровская эффективность нашего критерия имеет вид

$$\mathrm{eff}_{1.1}(a) = \Big(a - 1 + \sqrt{1-a^2}\ \Big)^2 /\ v(a),$$

где

$$\begin{aligned} v(a) = \frac{7}{3}\pi - 4\arctan\sqrt{\frac{1+a^2}{3-a^2}} - 4\arctan\sqrt{\frac{2-a^2}{2+a^2}} - 4\arctan\sqrt{\frac{1-a^2}{3+a^2}} - \\ - 4\arctan\sqrt{\frac{a^2}{4-a^2}} + 4\arctan\sqrt{\frac{a^2(1-a^2)}{a^4-a^2+4}}. \end{aligned}$$

Приведем график этой эффективности

Мы видим, что максимум функции $a \to \mathrm{eff}_{1.1}(a)$ на интервале $[0,1]$ равен 1 и достигается при $a = 0$ и $a = 1$. Однако в этих точках критерий вырождается и несостоятелен. Минимум эффективности достигается при $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и равен 0.966. Таким образом, критерий из [17], основанный на характеризации Пойа, неожиданно оказывается наименее эффективным в семействе критериев, зависящих от a.

Поэтому тесты с наибольшей эффективностью получаются при a близком к 0 или 1. Например, мы можем взять $a = \frac{24}{25}$ и $b = \frac{7}{25}$. Для такого a критерий состоятелен, а эффективность равна 0.990, что является очень высоким значением. Впрочем, она весьма высока и для других значений a.

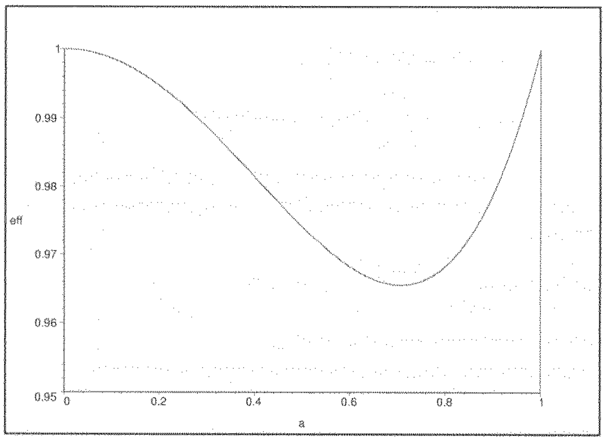

Рис. 1. Локальная эффективность $B^1_{2,n}$ при альтернативе сдвига..

Скошенная альтернатива. Вычислим локальный бахадуровский наклон для скошенной нормальной плотности

$$g(x;\theta) = 2\varphi(x)\Phi(\theta x), \quad \theta \geq 0.$$

Такие альтернативы впервые были предложены в [12] и введены в статистическую практику после работы [9]. Многие авторы считают, что такие асимметричные модели более реалистичны, чем классические альтернативы типа сдвига и масштаба.

В соответствии с (5), получаем для функции b:

$$b_{1.2}(a;\theta) = \frac{1}{2} - \mathbb{P}_\theta\Big\{aX + bY < Z\Big\} =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y;\theta)dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(ax+by;\theta)g(x;\theta)dx - \frac{1}{2}.$$

Удерживая первые два члена разложения в ряд для $G(ax+by;\theta)$ и $g(x;\theta)$ с остаточными членами и пользуясь леммой 1, получаем после некоторых вычислений

$$b_{1.2}(a;\theta) \sim \frac{a+b-1}{\pi\sqrt{1+a^2+b^2}}\ \theta, \quad \theta \to 0.$$

Ясно, что критерий состоятелен при $0 < a < 1$.

Локальный бахадуровский наклон допускает представление:

$$c_{1.2}(a;\theta) \sim \frac{(a+b-1)^2\theta^2}{18\pi^2\Delta_1^2(a)(a^2+b^2+1)}, \qquad a \in (0,1).$$

В [17] вычислена информация Кульбака–Лейблера для скошенного семейства, а именно $K(\theta) = \frac{\theta^2}{\pi}$. Отсюда следует, что формула для локальной эффективности та же, что и для альтернативы сдвига.

Аналогичным образом можно исследовать лемановские альтернативы, когда $G(x;\theta) = \Phi^{1+\theta}(x)$, и альтернативы загрязнения, когда $G(x;\theta) = (1-\theta)\Phi(x)+\theta\Phi^{r+1}(x)$, $r > 0$. Выражения для эффективностей здесь очень громоздкие [5], и мы их опустим. Заметим лишь, что в первом случае максимум достигается в "сопряженных" точках $a = 0.291$ и $a = 0.957$ и равен 0.899. Рекомендация взять $a = \frac{24}{25}$ или $a = \frac{7}{25}$ по-прежнему приемлема, тогда эффективность равна 0.889.

Напротив, для альтернативы загрязнения эффективность уже не столь высока как в предыдущих моделях.

В следующей таблице собраны наши вычисления эффективности.

Таблица 1. Локальная B-эффективность статистики $B_{2,n}^1$

Альтернатива	Параметр a		
	$a = 7/25$	$a = 0.291$	$a = \sqrt{2}/2$
сдвиг	0.990	0.989	0.966
скошенная	0.990	0.989	0.966
лемановская	0.889	0.899	0.779
загрязнения, $r = 1$	0.076	0.078	0.139
загрязнения, $r = 5$	0.187	0.189	0.211

3. Статистика $C_{m,n}^1$

Рассмотрим статистику $C_{m,n}^1$ в предположении $a_j = \frac{1}{\sqrt{m}}$, $j = 1,\dots,m$. Статистика $C_{m,n}^1$ асимптотически эквивалентна V-статистике степени $m+1$ с ядром

$$h_2^{(m)}(X_1,\dots,X_{m+1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(m+1)}\sum \mathbb{I}\{X_{i_1}+\dots+X_{i_m} < X_{i_{m+1}}\sqrt{m}\},$$

где суммирование ведется по всем возможным наборам $i_1, ..., i_{m+1}$. Вычислим проекцию этого ядра:

$$\psi_2(m;t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1}\Big(\mathbb{P}\Big\{\frac{1}{\sqrt{m}}X_1 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{m}}X_m < t\Big\} + \\ + m\mathbb{P}\Big\{\frac{1}{\sqrt{m}}t + \frac{1}{\sqrt{m}}X_2 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{m}}X_m < X_1\Big\}\Big).$$

Заметим, что

$$\mathbb{P}\Big\{\frac{1}{\sqrt{m}}X_1 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{m}}X_m < t\Big\} = \Phi(t),$$
$$\mathbb{P}\Big\{\frac{1}{\sqrt{m}}t + \frac{1}{\sqrt{m}}X_2 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{m}}X_m < X_1\Big\} = 1 - \Phi\Big(\frac{t}{\sqrt{2m-1}}\Big),$$

и, следовательно, проекция ядра (1) и ее дисперсия (2) имеют вид

$$\psi_2(m;t) = \frac{m}{m+1}\Phi\Big(\frac{t}{\sqrt{2m-1}}\Big) - \frac{m-1}{2(m+1)} - \frac{1}{m+1}\Phi(t),$$

$$\Delta_2^2(m) = \frac{1}{12\pi(m+1)^2}\Big(3\pi m^2 + \pi - 12m^2 \arctan\sqrt{\frac{2m-1}{2m+1}} - \\ - 12m \arctan\sqrt{\frac{1}{4m-1}}\Big). \quad (7)$$

Из графика функции $m \to \Delta_2^2(m)$ видно, что она строго положительна при всех $m > 2$. Снова применяя теорему Хеффдинга, устанавливаем следующий результат.

Теорема 3. *При справедливости H_0 и при $n \to \infty$ справедливо:*

$$\sqrt{n}C_{m,n}^1 \xrightarrow{d} \mathbf{N}\Big(0, (m+1)^2\Delta_2^2(m)\Big),$$

где $\Delta_2^2(m)$ определено формулой (7).

Мы ограничимся вычислением локальной эффективности для альтернативы сдвига. Другие альтернативы рассмотрены в [5]. Снова предположим, что при H_1 выполняется (6). Вследствие (4)–(5) имеем

$$b_{2.1}(m;\theta) = \frac{1}{2} - \mathbb{P}_\theta\Big\{\frac{1}{\sqrt{m}}X_1 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{m}}X_m < X_{m+1}\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2} - \mathbb{P}_\theta\Big\{\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{X_1-\theta}{\tau} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{X_m-\theta}{\tau} - \frac{X_{m+1}-\theta}{\tau} < \frac{\theta(1-\sqrt{m})}{\tau}\Big\}$$

$$= \Phi\Big(\frac{\theta(\sqrt{m}-1)}{\sqrt{2}\tau}\Big) - \frac{1}{2} > 0 \quad \text{для} \quad m > 1.$$

Следовательно, бахадуровский локальный наклон есть

$$c_{2.1}(m;\theta) \sim \frac{(\sqrt{m}-1)^2\theta^2}{4\pi\tau^2(m+1)^2\Delta_2^2(m)},$$

а локальная бахадуровская эффективность имеет выражение

$$\mathrm{eff}_{2.1}(m) = $$
$$= \frac{3(\sqrt{m}-1)^2}{3\pi m^2 + \pi - 12m^2 \arctan\sqrt{\frac{2m-1}{2m+1}} - 12m \arctan\sqrt{\frac{1}{4m-1}}}. \quad (8)$$

Изобразим ее в виде графика

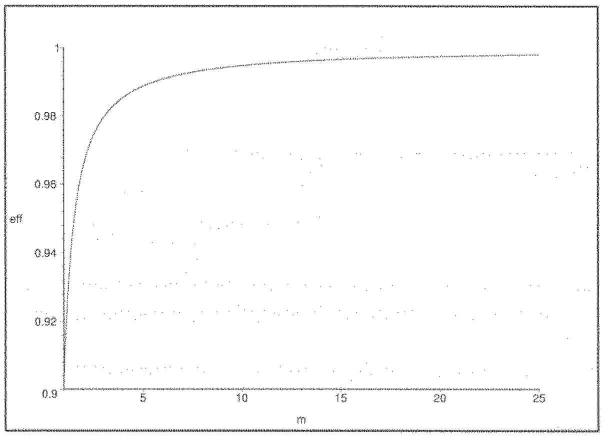

Рис. 2. Локальная эффективность статистики $C^1_{m,n}$.

Мы видим, что $\mathrm{eff}_{2.1}(m)$ монотонно возрастает и стремится к 1 при $m \to \infty$. Поэтому разумно брать m достаточно большим. Если взять $m = 10$, эффективность окажется равной 0.988, что является весьма высоким значением.

Авторы выражают свою признательность профессорам А. А. Зингеру и Н. Балакришнану за полезные советы и обсуждения.

Литература

1 А. М. Каган, Ю. В. Линник, С. Р. Рао, *Характеризационные задачи математической статистики.* — Наука, М. (1972).
2. В. С. Королюк, Ю. В. Боровских, *Теория U-статистик.* — Наукова Думка, Киев (1989).
3. Ю. В. Линник, *Линейные статистики и нормальный закон распределения.* — Докл. АН СССР **83**, No. 3 (1952), 353–355.
4. Ю. В. Линник, *Линейные формы и статистические критерии. I, II,* — Укр. матем. ж. **5**, No. 2, 3 (1953) 207–243, 247–290.
5. В. В. Литвинова, *Асимптотические свойства критериев симметрии и согласия, основанных на характеризациях.* Канд. дисс. СПбГУ (2004).
6. Я. Ю. Никитин, *Асимптотическая эффективность непараметрических критериев.* — Наука, М. (1995).
7. Я. Ю. Никитин, Е. В. Поникаров, *Грубая асимптотика вероятностей больших уклонений черновского типа функционалов Мизеса и U-статистик.* — Труды Санкт-Петербургского математического общества **7** (1999), 23–47.
8. I. A. Ahmad, A. R. Mugdadi, *Testing normality using kernel methods.* — J. of Nonparametric Stat. **15** (2003), 273–288.
9. A. Azzalini, *A class of distributions which includes the normal ones.* — Scand. J. Stat. **12** (1985), 171–178.
10. R. R. Bahadur, *Some limit theorems in statistics.* — SIAM, Philadelphia (1971).
11. W. Bryc, *The normal distribution. Characterizations with applications.* — Lect. Notes Statistics **100**, Springer-Verlag, Berlin (1995).
12. F. De Helguero, *Sulla rappresentazione analitica delle statistiche abnormali.* — Atti del IV Congresso Internaz. dei Matematici, Roma (1908), **8** 1909, 288–289.
13. W. Hoeffding, *A class of statistics with asymptotically normal distribution.* — Ann. Math. Stat. **19** (1948), 293–325.
14. P. L. Janssen, *Generalized Empirical Distribution Functions with Statistical Applications.* — Limburgs Universitair Centrum, Diepenbeek (1988).
15. A. V. Kakosyan, L. B. Klebanov, J. A. Melamed, *Characterization of distributions by the method of intensively monotone operators.* — Lect. Notes Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (1984), 1088.
16. A. M. Mathai, G. Pederzoli, *Characterizations of the Normal Probability Law.* — NY, Wiley (1977).
17. P. Muliere, Ya. Nikitin, *Scale-invariant test of normality based on Polya's characterization.* — Metron, LX No. 1–2 (2002), 21–33.
18. G. Polya, *Herleitung des Gauss'schen Fehlergesetzes aus einer Funktionalsgleichung.* — Math. Zeitschrift **18** (1923), 96–108.
19. C. R. Rao, *Linear Statistical Inference and its Applications.* — NY, Wiley (1965).
20. O. Vasicek, *A test for normality based on sample entropy.* — J. Roy. Stat. Soc. **B38** (1976), 54–59.

Litvinova, V. V., Nikitin, Ya. Yu. Two families of normality tests based on Polya characterization, and their efficiency.

For testing of normality we introduce two families of statistics based on extended Polya characterization of the normal law. The first family depends on parameter $a \in (0,1)$, and for any a its members are asymptotically normal and consistent for many alternatives of interest. We study the local Bahadur efficiency of these statistics as a function of a and find that for common alternatives the Polya case $a = 1/\sqrt{2}$ is the worst and the maximum of efficiency is attained for a close to 0 or 1. The second family depends on natural m and the efficiency increases when m grows.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: yanikit47@mail.ru

Поступило 17 октября 2005 г.