Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 328, 2005 г.

Л. В. Розовский

ВЕРОЯТНОСТИ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СО СТЕПЕННЫМ УБЫВАНИЕМ В НУЛЕ

1. Введение и результаты.

Пусть независимые случайные величины $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ распределены так же, как положительная случайная величина X с невырожденным распределением V; $S_n = X_1 + \ldots + X_n,\ n \geqslant 1$.

Для $h \geqslant 0$ положим

$$L(h) = \mathbf{E}e^{-hX}, \quad m(h) = -\left(\log L(h)\right)', \quad \sigma^2(h) = \left(\log L(h)\right)''. \quad (1.1)$$

В [1, Theorem B] было доказано, что если

$$V(x) = x^\rho\, l(x) \quad (1.2)$$

при некоторой положительной постоянной ρ и функции $l(x)$, медленно меняющейся в нуле, то

$$\mathbf{P}\left(S_n \leqslant x\right) = \frac{1}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\, L^n(h)e^{hx}(1+o(1)), \quad n \to \infty, \quad (1.3)$$

равномерно по всем $0 < x \leqslant \mu n$, где постоянная $\mu < \mathbf{E}X \leqslant \infty$ и h является единственным решением уравнения

$$m(h) = \frac{x}{n}. \quad (1.4)$$

Из результатов ([2, Теорема 2C и Следствие 1C]; см. также [3]) следует, что если распределение случайной величины X абсолютно непрерывно с плотностью $p(x)$ и при некотором целом $m \geqslant 1$

$$\sup_x p^{*m}(x) < \infty \quad (1.5)$$

Работа над статьей была поддержана грантом НШ No. 2258.2003.1.

(здесь и далее, $p^{*m}(x) = \frac{d}{dx}\mathbf{P}\left(S_m \leqslant x\right)$, то

$$p^{*n}(x) = \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\, L^n(h)e^{hx}\left(1 + \sum_{j=1}^{s-1} a_j(h)\, n^{-j} + O(n^{-s})\right), \qquad n \to \infty, \tag{1.6}$$

равномерно по $0 < x \leqslant \mu n$, где $h = h(\frac{x}{n})$ – решение уравнения (1.4), целое $s \geqslant 1$, а $\sup\limits_{0<x\leqslant \mu n} |a_j(h)| < \infty$.

В частности,

$$\mathbf{P}(x - y < S_n \leqslant x) = L^n(h)e^{hx}\,\frac{1 - e^{-hy}}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\left(1 + O(\frac{1}{n})\right), \qquad n \to \infty, \tag{1.7}$$

равномерно по $0 < x \leqslant \mu n$ и $0 < y < x$ (h удовлетворяет уравнению (1.4), $\mu < \mathbf{E}X$).

В настоящей работе будет показано, что утверждения аналогичные (1.3), (1.6) и (1.7), остаются справедливыми при условиях более слабых, чем (1.2) и (1.5). Приведем результаты.

Мы будем предполагать, что существуют постоянные $b \in (0,1)$, $c_1, c_2 > 1$ и $r_0 > 0$ такие, что при каждом $r \leqslant r_0$

$$c_1 V(br) \leqslant V(r) \leqslant c_2 V(br). \tag{L}$$

Заметим, что из условия (L), введенного в работе [4], следует, что

$$c_1 u^\beta \geqslant V(ur)/V(r) \geqslant u^\alpha/c_2, \ \ u \leqslant 1, \ \ r \leqslant r_0, \tag{1.8}$$

$$c_3 r^\alpha \leqslant V(r) \leqslant c_4 r^\beta, \ \ r \leqslant r_0, \tag{1.9}$$

при некоторых постоянных α, β таких, что $|\log c_1/|\log b| \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant \log c_2/|\log b|$ (на самом деле, условия (L) и (1.8) равносильны).

В дальнейшем, $\delta_n = 1/\sqrt{n} + (\log n/n)^{1/\alpha}$ (см.(1.8)), μ обозначает произвольную постоянную из интервала $(0, \mathbf{E}X)$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (L). Тогда*

$$\mathbf{P}(x - y < S_n \leqslant x) = L^n(h)e^{hx}\,\frac{1 - e^{-hy}}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\left(1 + (1 + \frac{x}{ny})\, O(\delta_n)\right), \qquad n \to \infty,$$

равномерно по всем $0 < x \leqslant \mu n$ *и* $y > 0$, *где* h *удовлетворяет уравнению* (1.4).

Следствие 1. *Пусть выполнено условие* (L). *Тогда*

$$\mathbf{P}(x - y < S_n \leqslant x) = L^n(h)e^{hx}\,\frac{1}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\,(1 + O(\delta_n)),\ n \to \infty,$$

равномерно по всем $0 < x \leqslant \mu n$ *и* $y > K x \log n/n$. *Здесь* h *удовлетворяет уравнению* (1.4), *а постоянная* $K > 0$ *достаточно велика.*

Заметим, что соотношение (1.3) вытекает из теоремы 1 или следствия 1 при $y = \infty$.

Следствие 2. *Пусть выполнено условие* (L) *и положительная последовательность* $\varepsilon_n < \sqrt{\delta_n}$. *Тогда равномерно по всем* x, $0 < x \leqslant \mu n$ *и* y, $x(\varepsilon_n n)^{-1}\delta_n < y < \varepsilon_n x n^{-1}$

$$\mathbf{P}(x - y < S_n \leqslant x) = L^n(h)e^{hx}\,\frac{y}{\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\,(1 + O(\varepsilon_n)),\ n \to \infty,$$

где h *удовлетворяет уравнению* (1.4).

Теорема 2. *Пусть* ε – *сколь угодно малая положительная постоянная. Если выполнено условие* (L), *то равномерно по* $x > 0$ *и* $h > \varepsilon$

$$\mathbf{P}(x - y < S_n \leqslant x) = L^n(h)e^{hx}\,\frac{1 - e^{-hy}}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}$$
$$\left(e^{-\beta^2/2} + (1 + \frac{1}{hy})\,O(\delta_n)\right),\quad n \to \infty,$$

где $\beta = \frac{x - n\,m(h)}{\sigma(h)\sqrt{n}}$.

Теорема 2 позволяет для нахождении соответствующей асимптотики использовать приближенное решение уравнения (1.4). Отметим, что Теорема 1 (с $\mu = m(\varepsilon)$) вытекает из теоремы 2 при $nm(h) = x$, или $\beta = 0$ (см. также соотношение (2.1)).

Теорема 3. *Предположим, что случайная величина* X *имеет плотность* $p(x)$. *Если выполнены условия* (L), (1.5) *и при некоторой постоянной* $C > 0$

$$p(x) \leqslant CV(x)/x,\ 0 < x \leqslant r_0, \tag{1.10}$$

то утверждения (1.6) *и* (1.7) *остаются справедливыми.*

Замечание. Условие (1.10) можно заменить менее ограничительным предположением

$$p^{*m}(x) \leqslant CV^m(x)/x, \ 0 < x \leqslant r_0, \tag{1.11}$$

при некотором целом $m > 1/\beta$ (см. (1.8)).
Условие (1.5) также можно ослабить:

$$\sup_x e^{-\varepsilon x} p^{*m}(x) < \infty, \tag{1.12}$$

где ε – решение уравнения $m(\varepsilon) = \mu$.
Отметим, что если постоянная μ мала, то ε, наоборот, велико, то есть условие (1.12) связано с правой границей малых уклонений.

2. Доказательства

Пусть случайная величина $X(h)$, $h \geqslant 0$, имеет распределение $e^{-hr}V(dr)/L(h)$, где $L(h) = \mathbf{E}e^{-hX}$. Заметим, что $m(h) = \mathbf{E}X(h)$, $\sigma^2(h) = \mathbf{Var}X(h)$.

Лемма 1. *Пусть* ε *– произвольная положительная постоянная.*
Если выполнено условие (L), *то при всех* $h \geqslant \varepsilon$

$$c_5 \leqslant h\mathbf{E}X(h) \leqslant c_6, \tag{2.1}$$

$$c_5 \leqslant h^2\mathbf{Var}X(h) \leqslant c_6, \tag{2.2}$$

$$h^s\mathbf{E}X^s(h) \leqslant M_s, \ s \geqslant 2. \tag{2.3}$$

Здесь и в дальнейшем $c_5, c_6, \ldots$ *обозначают положительные постоянные, зависящие лишь от распределения* V *и, возможно,* ε; M_s *зависит только от* V, ε, s.

Доказательство леммы 1. Пусть $h > H_0 = k/r_0$(см. условие (L)), где k некоторая достаточно большая постоянная, которая будет выбрана позже. Сначала покажем, что в этом случае

$$h\mathbf{E}X(h) \leqslant c_7. \tag{2.4}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} L(h)h\mathbf{E}X(h) &= \int_0^\infty te^{-t}V(dt/h) \\ &\leqslant \left(\int_1^{r_0 h} + \int_{r_0 h}^\infty\right) V(t/h)e^{-t}(t-1)dt = I + J. \end{aligned} \tag{2.5}$$

При этом, по условию (L)

$$I \leqslant \frac{c_2}{b} \int\limits_{b}^{r_0 hb} V(t/h) e^{-t} e^{-t(1-b)/b} (t/b - 1) dt$$

$$\leqslant \frac{c_2 e^{2-b}}{b(1-b)} \int\limits_{0}^{\infty} V(t/h) e^{-t} dt = c_8 L(h). \tag{2.6}$$

Из (1.9) и того, что

$$L(h) \geqslant \int\limits_{0}^{1/h} e^{-th} V(dt) \geqslant e^{-1} V(1/h). \tag{2.7}$$

следует

$$J \leqslant r_0 h e^{-r_0 h} \leqslant c_9 V(1/h) \leqslant c_9 e L(h), \tag{2.8}$$

где $c_9 = (1+\alpha)^{1+\alpha} (e r_0)^{-\alpha} / c_3$. Оценка (2.4) вытекает из (2.5)–(2.8).

Далее оценим $h^2 \mathbf{Var} X(h)$ снизу. Имеем по (2.4) при любом $k > c_7$,

$$L(h) h^2 \mathbf{Var} X(h) \geqslant \int\limits_{kb}^{k} (t - h \mathbf{E} X(h))^2 e^{-t} V(dt/h) \geqslant$$

$$e^{-k} (k - c_7)^2 (V(k/h) - V(kb/h)). \tag{2.9}$$

Теперь,

$$L(h) \leqslant V(k/h) + \int\limits_{k}^{r_0 h} e^{-t} V(t/h) \, dt + e^{-r_0 h},$$

и (см. (2.6))

$$\int\limits_{k}^{r_0 h} e^{-t} V(t/h) \, dt \leqslant \frac{c_2}{b} e^{-k(1-b)} L(h) \leqslant L(h)/2,$$

если k достаточно велико. Таким образом (см. также (2.8)),

$$L(h) \leqslant c_{12} V(k/h), \;\; h \geqslant H_0. \tag{2.10}$$

Отсюда, из (2.9) и условия (L) следует, что при любом $h \geqslant k/r_0$

$$h^2 \mathbf{Var} X(h) \geqslant c_{10} (1 - V(k/h)/V(kb/h)) \geqslant c_{10} (1 - 1/c_1).$$

Из сказанного вытекает оценка в (2.2) снизу при $h \geqslant H_0$. При тех же условиях оценку в (2.2) сверху можно обосновать так же, как условие (2.4), а оценку в (2.1) снизу – аналогично (2.9).

Соотношения (2.1), (2.2) при $\varepsilon \leqslant h \leqslant H_0$ вытекают из невырожденности X и справедливы без каких-либо дополнительных предположений. Итак, соотношения (2.1) и (2.2) при $h \geqslant \varepsilon$ полностью доказаны.

Оценка (2.3) проверяется аналогично. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Положим* $f_h(t) = \mathbf{E}e^{itX(h)}$. *Если выполнено условие* (L), *то*

$$1 - |f_h(v)| \geqslant c_{11} e^{-(2\pi+b)h/v} V(1/v)/V(1/h), \ v \geqslant (2\pi+b)/r_0, \ h > 0. \tag{2.11}$$

Доказательство леммы 2. Положим $Y = X(h)$. Имеем (см. также [4, лемма 3]),

$$1 - |f_h(v)| = \mathbf{E}(1 - \cos(vY - a)) \geqslant I = \int\limits_0^{a+(2-\tau)\pi} 2\sin^2\left(\tfrac{y-a}{2}\right) dF_Y(y/v),$$

где $a = a(v) \in [0, 2\pi)$, $v \geqslant v_0$, $\tau \in (0,1)$, $F_Y(y)$ – функция распределения Y.

На интервалах $s_1 = [a-(2-\tau)\pi, a-\tau\pi]$ и $s_2 = [a+\tau\pi, a+(2-\tau)\pi]$ функция $2\sin^2(\frac{y-a}{2})$ не менее $c_0 = 2\sin^2(\tau\pi/2)$. Выберем $\tau = b(1 - \frac{1-b}{2\pi})$. Если $0 \leqslant a \leqslant \tau\pi + b$, то

$$I \geqslant c_0 \int\limits_{s_2} dF_Y(y/v) \geqslant c_0 \int\limits_{b(a+(2-\tau)\pi)/v}^{(a+(2-\tau)\pi)/v} dF_Y(y) \geqslant$$
$$\frac{c_0(1-1/c_1)}{L(h)} e^{-(2\pi+b)h/v} V\left(\tfrac{a+(2-\tau)\pi}{v}\right), \ v \geqslant (2\pi+b)/r_0. \tag{2.12}$$

Пусть теперь $2\pi > a > \tau\pi + b$. Тогда, если $a \leqslant (2-\tau)\pi$, то $s_1 \supset [0, b]$ и

$$I \geqslant c_0 \int\limits_0^b dF_Y(y/v) = \frac{c_0}{L(h)} \int\limits_0^{b/v} e^{-hu} V(du)$$
$$\geqslant \frac{c_0}{L(h)} e^{-bh/v} V(b/v), \ v \geqslant 1/r_0. \tag{2.13}$$

Если же $a > (2-\tau)\pi$, то $0 < a - (2-\tau)\pi < b(a - \tau\pi)$ и, аналогично (2.12),

$$I \geqslant c_0 \int\limits_{s_1} dF_Y(y/v) \geqslant c_0 \int\limits_{b(a-\tau\pi)/v}^{(a-\tau\pi)/v} dF_Y(y) \geqslant$$

$$\frac{c_0(1-1/c_1)}{L(h)} e^{-(a-\tau\pi)h/v}\, V(\tfrac{a-\tau\pi}{v}) \geqslant \frac{c_{12}}{L(h)} e^{-2\pi h/v}\, V(b/v), \;\; v \geqslant 1/r_0.$$

Соотношение (2.11) вытекает из сказанного и (2.12), (2.13) ввиду того, что $L(h) \leqslant c_{13} V(1/h)$, $h > 0$ (см. условие (L) и соотношения (2.10), (1.8) по этому поводу). Лемма 2 доказана.

Докажем теорему 2.

Обозначим через $X_j(h)$, $j \geqslant 1$, независимые копии случайной величины $X(h)$. Положим (см. (1.1))

$$S_n(h) = X_1(h) + \cdots X_n(h),$$

$$g_h(t) = \mathbf{E}\exp\left(it\, \frac{S_n(h) - n\,m(h)}{\sigma(h)\sqrt{n}}\right),$$

$$\tau = h\sigma(h)\sqrt{n}, \;\; \beta = \frac{x - n\,m(h)}{\sigma(h)\sqrt{n}}, \tag{2.14}$$

$$\delta_\varepsilon(h) = \int\limits_0^{1/\varepsilon} |g_h(t) - e^{-t^2/2}|\, dt \;\; (\varepsilon > 0).$$

Из [5, лемма 2] следует, что при любых положительных x, h, y и γ

$$\mathbf{P}(x - y < S_n \leqslant x) = L^n(h) e^{hx}\, \frac{1 - e^{-hy}}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}$$
$$\left(e^{-\beta^2/2} + \theta\left(\beta\, e^{-\beta^2/2}/\tau + 1/\tau^2 + \rho_\gamma(h,y)\right)\right), \tag{2.15}$$

где $|\theta|$ не превосходит некоторую абсолютную постоянную,

$$\rho_\gamma(h,y) = \delta_\gamma(h) + (1 + \delta_\gamma(h))(1 + \tfrac{1}{hy})\,\tau\gamma. \tag{2.16}$$

Пусть выполнено условие (L) и $h \geqslant \varepsilon > 0$. Имеем (см. [6, гл.5, лемма 1])

$$|g_h(t) - e^{-t^2/2}| \leqslant 16\nu\, e^{-t^2/3}, \;\; |t| \leqslant 1/\nu, \tag{2.17}$$

где
$$\nu = \frac{4}{\sigma^3(h)\sqrt{n}} \mathbf{E}|X(h) - \mathbf{E}X(h)|^3,$$
причем в соответствии с леммой 1((2.2), (2.3))
$$\nu \leqslant c_{13}/\tau \leqslant c_{14}/\sqrt{n}. \tag{2.18}$$
Положим $\gamma = (T\tau)^{-1}$, где T – достаточно велико и будет выбрано позже. Имеем (см. обозначения в (2.14) и лемме 2),
$$\delta_\gamma(h) \leqslant \delta_\nu(h) + \int\limits_{1/\nu}^{\infty} e^{-t^2/2} dt + \int\limits_{1/\nu}^{1/\gamma} |f_h(t/\sigma(h)\sqrt{n})|^n dt. \tag{2.19}$$
По (2.18)
$$\int\limits_{1/\nu}^{1/\gamma} |f_h(t/\sigma(h)\sqrt{n})|^n dt \leqslant \tau \int\limits_{1/c_{13}}^{T} |f_h(th)|^n dt. \tag{2.20}$$
Покажем, что
$$|f_h(th)| \leqslant e^{-c_{15}t^{-\alpha}}, \ t \geqslant 1/c_{13}, \ h \geqslant \varepsilon, \tag{2.21}$$
где α такое как в (1.8), (1.9).

Положим (см. условие (L)) $H_0 = (2\pi + b)/r_0$. Несложно проверить, что если $h > c_{13}H_0$, $t \geqslant 1/c_{13}$ или $h > \varepsilon$, $t \geqslant H_0/\varepsilon$, оценка (2.21) вытекает из леммы 2 и (1.8), (1.9). Если же $1/c_{13} \leqslant t \leqslant H_0/\varepsilon$ и $\varepsilon \leqslant h \leqslant H_0/\varepsilon$, то $|f_h(th)| \leqslant e^{-\delta}$, $\delta = \delta(V, \varepsilon, H_0)$ и (2.21) снова имеет место поскольку случайная величина X является нерешетчатой, а отображение между распределениями X и $X(h)$ непрерывным по h.

Пусть $T = c_{16}(n/\log n/)^{1/\alpha}$, где постоянная c_{16} достаточно мала. Тогда из (2.21) и (2.2) следует, что интеграл в правой части соотношения (2.20) не превосходит $c_{17}/\sqrt{n}$. Отсюда и из (2.17), (2.19) найдем $\delta_\gamma(h) \leqslant c_{18}\delta_n$. Подставляя эту оценку в (2.16), получим с учетом выбора γ
$$\rho_\gamma(h, y) \leqslant c_{19}\left(\delta_n + (h\,y)^{-1}(\log n/n)^{1/\alpha}\right). \tag{2.22}$$
Утверждение, чуть более точное, чем теорема 2, вытекает из (2.15), (2.2) и (2.22).

Используя лемму 1 и условия (1.11), (1.12), теорему 3 можно доказать, повторив практически дословно рассуждения из [2, п.5].

Литература

1. T. Höglund, *A unified formulation of the central limit theorem for small and large deviations from the mean.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **49**, (1979), 105–117.
2. Л. В. Розовский, *О сверхбольших уклонениях суммы независимых случайных величин с общим абсолютно непрерывным распределением, удовлетворяющим условию Крамера.* — Теория вероятн. и ее примен., **47**, No. 1 (2002), 78–103.
3. А. В. Нагаев, С. С. Ходжабагян, *Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, для сумм положительных случайных величин*, Литов. матем. сб., **14**, No. 1 (1974), 149–163.
4. M. A. Lifshits, *On the lower tail probabilities of some random series.* — Ann. Probab., **25** (1997), 424–442.
5. Л. В. Розовский, *О вероятностях малых уклонений положительных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **320** (2004), 150–159.
6. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* — Наука, М. (1972).

Rozovsky L. V. Small deviation probabilities for a class of distributions with a polinomial decreasing at zero.

In the note small deviation probabilities of sum of i.i.d. positive random variables are studied, whose distribution function has a polinomial decrease at zero.

Санкт-Петербургская
химико-фармацевтическая академия

Поступило 2 декабря 2005 г.