Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 328, 2005 г.

В. Н. Солев, Л. Жервиль-Реаш

ТЕПЛИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ, ПОСТРОЕННЫЕ ПО ГАУССОВСКОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Квадратичные формы, спектральное представление

Пусть X_t, $t \in \mathbb{Z}$ гауссовская стационарная последовательность с нулевым средним, корреляционной функцией

$$r_{t-s} = \mathbf{E} X_t X_s = \mathbf{E} X_t \overline{X_s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{i(t-s)u}\, du, \qquad (1)$$

и спектральной плотностью $f \in L^1$, $f(u) = f(-u)$.

Будем использовать обозначение $L^2(dP)$ для L^2-пространства, построенного по вероятностной мере P и такого, что $X_k \in L^2(dP)$, $k \in \mathbb{Z}$. Для конечного подмножества $M \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ рассмотрим случайные величины J, представимые в виде:

$$J = \sum_{(t,\,s)\in M} c_{t,\,s} X_t X_s - \mathbf{E} \left\{ \sum_{(t,\,s)\in M} c_{t,\,s} X_t X_s \right\}.$$

Нас будут интересовать квадратичные формы вида

$$\Gamma_n(f,g) = \sum_{-n \le t,\, s \le n} g_{t-s} X_t X_s,$$

построенные по четной функции $g \in L^1$, $g(u) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} g_k e^{iku}$. Значек f в обозначении $\Gamma_n(f,g)$ призван подчеркнуть зависимость распределения квадратичной формы от функции f. Мы исследуем асимптотическое поведение нормализованных квадратичных форм

$$\Psi_n(f,g) = \frac{\Gamma_n(f,g) - \mathbf{E}\Gamma_n(f,g)}{\sqrt{2n+1}} \qquad (2)$$

Исследование поддержано грантами РФФИ 05-01-00920, РФФИ-ННИО 04-01-04000, НШ-4222.2006.1.

Исследование этой задачи имеет длинную историю. Напомним некоторые ее этапы. M. Rosenblatt (1962) и И. А. Ибрагимов (1963) доказали асимптотическую нормальность $\Psi_n(f,g)$ при условиях $f \in L^2$, $g \in \mathcal{L}^\infty$, F. Avram (1968) при условиях $f \in L^p$, $g \in \mathcal{L}^q$, $1/p + 1/q \le 1/2$. L. Giraitis, D. Surgailis (1990) доказали, что, если $f \in L^2$, $g \in \mathcal{L}^2$, $fg \in L^2$, и

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(u) g^2(u-v)\, du \to \int_{-\pi}^{\pi} f^2(u) g^2(u)\, du,$$

то $\Psi_n(f,g) \to N\big(0, \sigma^2(f,g)\big)$ по распределению, когда $n \to \infty$, где

$$\sigma^2(f,g) = 4\pi \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) g^2(x)\, dx. \tag{3}$$

L. Giraitis, D. Surgailis (1990) предположили, что асимптотическая нормальность будет выполнена при одном лишь предположении, что $fg \in L^2$.

M. S. Ginovian (1994), M. S. Ginovian and A. A. Saakian (2005) построили контрпример к этой гипотезе и нашли некоторые простые условия на правильность поведения функций f и g в окрестности тех точек, где функция f обращается в бесконечность. Почти во всех случаях (кроме работы L. Giraitis, D. Surgailis (1990)) пара (g,f) черпалась из множества вида $\mathcal{G} \times \mathcal{F}$.

Ясно, что при фиксированных f и n квадратичная форма $\Psi_n(f,g)$ может рассматриваться как значение линейного оператора $\Psi_n : g \longmapsto \Psi_n(f,g)$. Поэтому для исследования асимптотической нормальности квадратичной формы $\Psi_n(f,g)$ достаточно понять, для каких множеств B_ε (может быть, завицящих от f)

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{g \in B_\varepsilon} \|\Psi_n(f,g)\|_{L^2(dP)} \le \varepsilon, \tag{4}$$

Обозначим через L^2_f L^2-пространство на отрезке $[-\pi,\pi]$, построенное по неотрицательной функции $\frac{1}{2\pi} f$. Пусть, далее, $(\cdot,\cdot)_f$,

$\|\cdot\|_f$ скалярное произведение и норма в пространстве L_f^2:

$$(\varphi,\psi)_f = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(u)\overline{\psi(u)}\, f(u)\, du,$$
$$\|\cdot\|_f^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi(u)|^2\, f(u)\, du. \tag{5}$$

Рассмотрим спектральное представление последовательности X_t, $t\in\mathbb{Z}$:

$$X_t = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{itu}\, Z(du). \tag{6}$$

Здесь $Z(du)$ – такая гауссовская ортогональная мера, что

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(u)\, Z(du)\right|^2 = \|\varphi\|_f^2, \quad \mathbf{E}\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(u)\, Z(du)\right\} = 0.$$

Примем обозначение $L_f^2\times L_f^2$ для гильбертова пространства функциий $\psi:\mathbb{R}^2\to C)$ со скалярным произведением

$$(\psi_1,\psi_2)_{L_f^2\times L_f^2} = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi_1(u,v)\overline{\psi_1(u,v)}\, f(u)f(v)\, dudv,$$

и нормой

$$\|\psi\|^2_{L_f^2\times L_f^2} = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\psi(u,v)|^2\, f(u)f(v)\, dudv.$$

Для конечного подмножества $M\subset\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ рассмотрим квадратичные формы J вида

$$J = \sum_{(t,\,s)\in M} c_{t,\,s}X_tX_s - \mathbf{E}\left\{\sum_{(t,\,s)\in M} c_{t,\,s}X_tX_s\right\},$$

линейное подмножество $\mathcal{L}_*$ всех таких квадратичных форм J, обозначая далее $\mathcal{L}$ замыкание в пространстве $L^2(dP)$ линейного подмножества $\mathcal{L}_*$.

Ясно, что

$$J = J(\psi) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(u,v)\, Z(du)\overline{Z(dv)} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(u,u)\, f(u)\, du, \tag{7}$$

где функция ψ определена соотношением

$$\psi(u,v) = \sum_{(t,\,s)\in M} c_{t,\,s} e^{i(tu-sv)}. \tag{8}$$

Линейное множество всех таких функций ψ будем обозначать $\mathcal{S}$.

Хорошо известна другая форма представления (7). Пусть $\Phi(du,dv)$ – стохастическая мера, определенная соотношением

$$\Phi(A,B) = Z(A)\overline{Z(B)} - \mathbf{E}\left\{Z(A)\overline{Z(B)}\right\}.$$

Стохастический интеграл $J(\psi)$,

$$J(\psi) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(u,v)\, \Phi(du,dv) \tag{9}$$

определен на $\mathcal{S}$ и совпадает со стохастическим интегралом, описанным в (7). Мы будем использовать обозначение $J(\psi)$ для обоих стохастических интегралов.

Легко показать (см. И. А. Ибрагимов и Ю. А. Розанов (1974)), что стохастический интеграл $J(\psi)$, рассматриваемый как линейный оператор $J : \mathcal{S} \to \mathcal{L}_*$, удовлетворяет условию

$$\|J(\psi)\|^2_{L^2(dP)} = 2\,\|\psi\|^2_{L^2_f\times L^2_f}. \tag{10}$$

Поскольку линейное множество $\mathcal{S}$ плотно в $L^2_f \times L^2_f$, линейный оператор J может быть продолжен по непрерывности до линейного оператора $J : L^2_f \times L^2_f \to \mathcal{L}_*$, с сохранением соотношения (10).

Легко видеть, что

$$\Gamma_n(f,g) = \sum_{-n\le t,\,s\le n} g_{t-s} X_t X_s = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi_n^g(u,v)\, Z(du)\overline{Z(dv)},$$

где

$$\psi_n^g(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(u-y)}{\sin\frac{(u-y)}{2}} \times \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(v-y)}{\sin\frac{(v-y)}{2}}\, dy. \tag{11}$$

Таким образом,

$$\Gamma_n(f,g) - \mathbf{E}\Gamma_n(f,g) = J(\psi_n^g). \tag{12}$$

Отметим, что величина

$$\frac{1}{2}\,\|J(\psi_n^g)\|^2_{L^2(dP)} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\psi_n^g(u,v)|^2 f(u)f(v)\,dudv$$

представляет собой норму Гильберта–Шмидта $\|A_n(f,g)\|_2$ интегрального оператора $A_n(f,g)$ с ядром $\psi_n^g(u,v)$, действующего в пространстве L_f^2.

2. Основной результат

Как уже отмечалось, при фиксированных f и n квадратичная форма $\Psi_n(f,g)$ может рассматриваться как линейный оператор $\Psi_n : g \longmapsto \Psi_n(f,g)$. Поэтому при фиксированных f и n величина

$$\|g\|_{n,f} = \|\Psi_n(f,g)\|_{L^2(dP)}$$

является полунормой. Простые аргументы, могущие составить канву доказательства асимптотической нормальности $\Psi_n(f,g)$, приводятся в следующей очевидной лемме.

Напомним обозначение

$$\sigma^2(f,g) = 4\pi \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)g^2(x)\,dx.$$

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ – линейные подмножества, лежащие в пространстве L^1, и*

1) для любого $g_0 \in \mathcal{G}_0$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \|\Psi_n(f,g_0)\|^2_{L^2(dP)} = \sigma^2(f,g_0) < \infty$$

и случайные величины

$$\Psi_n(f,g_0) \to N\big(0,\sigma^2(f,g_0)\big)$$

по распределению, когда $n \to \infty$;

2) для любого $g \in \mathcal{G}$ и $\varepsilon > 0$ существует такая функция $g_0 \in \mathcal{G}_0$ (зависящая от g и ε) что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \|\Psi_n(f,g-g_0)\|_{L^2(dP)} \le \varepsilon, \quad ||g-g_0||_{f^2} \le \varepsilon;$$

Тогда, если $\sigma^2(f,g) < \infty$, *для любого* $g \in \mathcal{G}$ *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \|\Psi_n(f,g)\|^2_{L^2(dP)} = \sigma^2(f,g)$$

и

$$\Psi_n(f,g) \to N\big(0, \sigma^2(f,g)\big)$$

по распределению при $n \to \infty$.

Следующая лемма обнаруживает некоторую симметрию функции $\|\Psi_n(f,g)\|^2_{L^2(dP)}$ как функции от (f,g).

Лемма 2. *Пусть* g *– неотрицательная функция. Тогда*

$$\|\Psi_n(f,g)\|^2_{L^2(dP)} = \|\Psi_n(g,f)\|^2_{L^2(dP)}\,. \tag{13}$$

Доказательство. Достаточно установить, что

$$\|\Gamma_n(f,g) - \mathbf{E}\Gamma_n(f,g)\|^2_{L^2(dP)} = \|\Gamma_n(g,f) - \mathbf{E}\Gamma_n(g,f)\|^2_{L^2(dP)}\,. \tag{14}$$

Заметим, что в силу (10)–(12),

$$\|\Gamma_n(f,g) - \mathbf{E}\Gamma_n(f,g)\|^2_{L^2(dP)} = \|J(\psi_n^g)\|^2_{L^2(dP)} =$$

$$= 2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\psi_n^g(u,v)|^2 f(u)f(v)\,dudv.$$

Отсюда мы выводим (14), поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\psi_n^g(u,v)|^2 f(u)f(v)\,dudv = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\psi_n^f(u,v)|^2 g(u)g(v)\,dudv =$$

$$= \|\Gamma_n(g,f) - \mathbf{E}\Gamma_n(g,f)\|^2_{L^2(dP)}\,.$$

Для функции $h \in L^1$ и интервала I длины $|I|$ обозначим

$$h_I = \frac{1}{|I|}\int_I h(x)\,dx.$$

Обозначим

$$\lambda(h) = \sup_I\, \{|h|\}_I \times \{1/|h|\}_I\,.$$

Здесь sup берется по всем интервалам I. Условие $\lambda(h) < \infty$ означает некоторую квалифицированную "гладкость" функции $\varphi = \ln|h|$ в окрестности тех точках, где она обращается в бесконечность (подробнее см. в R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden (1973)). В частности,

$$\|\varphi\|_{BMO} = \sup_I \frac{1}{|I|} \int\limits_I |\varphi(x) - \varphi_I|\, dx < \infty.$$

Обозначим через P_n интегральный оператор в пространстве L^2,

$$P_n h(u) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(u-y)}{\sin \frac{(u-y)}{2}} h(y)\, dy = \sum_{|k| \le n} h_k e^{iku},$$
$$h(u) = \sum_k h_k e^{iku}.$$

Положим для функции f_*, отличной от нуля почти всюду,

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{\sqrt{f_*}} P_n \sqrt{f_*},$$

здесь $\frac{1}{\sqrt{f_*}}, \sqrt{f_*}$ – операторы умножения на соответствующие функции. Отметим, что (см. R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden (1973)) $\mathcal{P}_n$ – ограниченный оператор в пространстве L^2, если $\lambda(f_*) < \infty$. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}_n(h, f_*) = \mathcal{P}_n^* \, h \, \mathcal{P}_n$.

Лемма 3. *Пусть $\lambda(f_*) < \infty$. Тогда*

$$\|\mathcal{A}_n(h, f_*)\|_2^2 \le C(f_*)\, n\, ||h||_{L^2}^2.$$

Здесь норма Гильберта–Шмидта берется в метрике пространства L^2. Очевидно, оператор $\mathcal{A}_n(h, f_*)$ – интегральный оператор в пространстве L^2 с ядром $\varphi_n(u, v)$,

$$\varphi_n(u, v) = \sqrt{f_*}(u) \psi_n^h(u, v) \sqrt{f_*}(v),$$

а потому

$$\|\mathcal{A}_n(h, f_*)\|_2^2 = \|\Psi_n(f_*, g)\|_{L^2(dP)}^2 \quad \text{при} \quad g = h/f_*. \tag{15}$$

Теорема. *Пусть*

1) $f \le f_*, |g| \le g_*$ *и* $\lambda(f_*), \lambda(g_*) < \infty$,
2) $g_* f_* \in L^2$.

Тогда

$$\Psi_n(f,g) \to N\big(0, \sigma^2(f,g)\big) \quad \textit{по распределению при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Доказательство теоремы по-существу следует из леммы 1. Действительно, при фиксированных функциях g_* и f_* леммы 2 и 3 позволяют оценить оценить величины полунорм $\|g\|_{n,f}$ равномерно по n и функциям $g \in \mathcal{G}_*, f \in \mathcal{F}_*$,

$$\mathcal{G}_* = \{g :\ |g| \le g_*\}, \ \ \mathcal{F}_* = \{f :\ f \le f_*\}.$$

Поэтому в силу леммы 1 теорему достаточно доказать для ограниченных функций g из $\mathcal{G}_*$. Фиксируем эту ограниченную функцию g. Квадратичная форма $\Psi_n(f,g)$ имеет вид:

$$\Psi_n(f,g) = \frac{1}{2n+1} \iint \psi_n^g(u,v) \Phi(du,dv).$$

Для подмножества $\Lambda \subset [\pi, \pi]$ обозначим

$$\Psi_n^\Lambda(f,g) = \frac{1}{2n+1} \iint\limits_{\Lambda \times \Lambda} \psi_n^g(u,v) \Phi(du,dv).$$

Остается убедиться в том, что для любого $\varepsilon > 0$ выбор подмножества Λ_ε можно осуществить так, чтобы

$$\sup_{x \in \Lambda_\varepsilon} f(x) \le C_\varepsilon < \infty$$

$$\big\|\Psi_n(f,g) - \Psi_n^{\Lambda_\varepsilon}(f,g)\big\|_{L^2(dP)} \le \varepsilon, \qquad \int\limits_{x \notin \Lambda_\varepsilon} g^2 f^2 \le \varepsilon^2.$$

Последнее тривиально.

Литература

1. F. Avram, *On bilinear forms in Gaussian random variables and Toeplitz matrices.* — University of Calif. Press, Berkeley and Los Angeles (1958).
2. M. S. Ginovyan, *On Toeplits type quadratic forms in Gaussian stationary process.* — Probab. Theory Related Fields **100** (1994), 395–406.

3. M. S. Ginovyan, A. A. Saakian, *On central limit theorem for Toeplitz quadratic forms in Gaussian stationary sequances.* — Theory of probability and its applications (2005) (submitted).
4. L. Giraitis, D. Surgailis, *A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotical normality of Whittle's estimate.* — Probab. Theory Related Fields **86** (1990), 87–104.
5. U. Grenander, Szegö, *Toeplitz Form and Their Applications.* — University of Calif. Press, Berkeley and Los Angeles (1958).
6. R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform.* — Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 227–251.
7. И. А. Ибрагимов, *К оцениванию спектральной плотности стационарного гауссовского процесса.* — Теория вероятностей и ее приложения **8** (1963), 391–430.
8. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы.* Мир, Москва (1974).
9. M. Rosenblatt, *Asymptotic behavior of eigenvalues of Toeplitz form, transform.* — J. Math. Mech. **11** (1962), 941–950.

Solev V. N., Gerville-Reache L. Large Toeplitz operators and quadratic form generated by stationary Gaussian sequence.

Let $\Gamma_n(f,g) = \sum\limits_{-n\le t,\, s\le n} g_{t-s}X_tX_s$ – be a Toeplitz quadratic form generated by a real valued function $g(u) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} g_k e^{iku}$ and stationary sequence X_n with spectral density f. Many sufficient conditions of asymptotic normality of the normalized quadratic form $\Psi_n(f,g)$ have been proposed since 1958. A less restrictive one was given in the paper of L. Giraitis and D. Surgailis (1990). Using a linear operator approach, we suggest a new vision of the problem and propose a new sufficient condition on the couple of functions (f,g) even more effective.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: solev@pdmi.ras.ru

Statistique Mathématique,
Université Victor Segalen,
France

Поступило 7 октября 2005 г.