Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 328, 2005 г.

Б. П. Харламов

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ПО ПОЛУМАРКОВСКОМУ ПРОЦЕССУ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

1. Введение

В настоящей статье[1] рассматривается конструкция стохастического интеграла, приспособленная для полумарковских процессов диффузионного типа в качестве интегрирующих процессов. Потребность в стохастическом интеграле для процессов данного класса возникает в проблеме абсолютной непрерывности, которая затрагивалась в работе [7]. Полумарковский процесс не является марковским (в общем случае) и для него не применим метод построения стохастического интеграла, основанный на теории мартингалов в ее классическом варианте [5]. Однако, полумарковские процессы обладают частично марковской структурой, которую можно использовать для построения стохастического интеграла. Предлагаемый метод использует марковское свойство процесса относительно моментов первого выхода из открытых помножеств фазового пространства и их итераций. Поэтому он применим также к собственно марковским процессам диффузионного типа. Для этих процессов он приводит к тем же самым результатам, что и классический метод стохастического интегрирования. В этом отношении его можно считать обобщением последнего.

2. Определения и обозначения

2.1. Пространства и функции. Мы обозначаем: $\mathbb{X} \equiv \mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 1)$; $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$; $\mathcal{D}$ – пространство функций $\xi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{X}$ (непрерывных справа, имеющих пределы слева) с метрикой Скорохода; далее мы будем рассматривать вероятностные меры на борелевской сигма-алгебре $\mathcal{F}$ подмножеств этого пространства

[1]Поддержано грантом ведущих научных школ НШ.2258.2003.1

или пространства $\mathcal{C}$ – множества непрерывных функций, а также отображения

$X_t : X_t\xi = \xi(t)$ – одноточечная проекция;

$\theta_t : (\theta_t\xi)(s) = \xi(t+s)$ $(s,t \geqslant 0)$ – сдвиг;

$\alpha_t : (\alpha_t\xi)(s) = \xi(t \wedge s)$ $(s,t \geqslant 0)$ – остановка.

Пусть $\mathfrak{A}$ – класс всех открытых подмножеств множества $\mathbb{X}$. Обозначим $\sigma_G : \sigma_G(\xi) = \inf\{t \geqslant 0 : \xi(t) \notin G\}$ – момент первого выхода из множества $G \in \mathfrak{A}$. Для открытого шара введем специальное обозначение: $\sigma_r(\xi) = \sigma_{B(x,r)}(\xi)$, где $x = \xi(0)$, $r > 0$. Принимаем $\sigma_\varnothing = \sigma_0 = 0$. Другие обозначения для моментов первого выхода и их итераций будут приведены позднее.

Пусть $\mathcal{F} = \sigma(X_t : t \geqslant 0)$ – сигма-алгебра подмножеств множества $\mathcal{D}$; $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : 0 \leqslant s \leqslant t)$; $\mathcal{T}$ – множество марковских моментов относительно потока сигма-алгебр $(\mathcal{F}_t)_0^\infty$. На этом множестве определены композиции отображений проекции, сдвига и остановки, а именно для $\tau \in \mathcal{T}$ имеем:

$X_\tau : X_\tau(\xi) = X_{\tau(\xi)}(\xi)$ на множестве $\tau(\xi) < \infty$;

$\theta_\tau : \theta_\tau(\xi) = \theta_{\tau(\xi)}(\xi)$ на множестве $\tau(\xi) < \infty$;

$\alpha_\tau : \alpha_\tau(\xi) = \alpha_{\tau(\xi)}(\xi)$ на множестве $\mathcal{D}$.

Обозначим сумму марковских моментов с учетом сдвига: $\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \tau_1 + \tau_2 \circ \theta_{\tau_1}$ на множестве $\{\tau_1 < \infty\}$ $(\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T})$. Здесь и далее операция "$\circ$" означает суперпозицию двух функций: $(f \circ \psi)(s) = f(\psi(s))$, откуда $(f \circ \psi)^{-1}(S) = \psi^{-1}(f^{-1}(S))$, при соответствующем определении областей задания и значения функций. Пусть σ_r^k $(k \geqslant 1)$ – итерированный момент первого выхода из шаровых окрестностей: $\sigma_r^1 = \sigma_r$, $\sigma_r^{k+1} = \sigma_r^k \dot{+} \sigma_r$. Для произвольной последовательности $\delta \equiv (\Delta_1, \Delta_2, \dots)$, где $\Delta_k \in \mathfrak{A}$ $(k \geqslant 1)$, определим итерированные моменты σ_δ^n $(n \geqslant 1)$ $\sigma_\delta^1 = \sigma_{\Delta_1}$, $\sigma_\delta^{k+1} = \sigma_\delta^k \dot{+} \sigma_{\Delta_{k+1}}$. Принимаем $\sigma_\delta^0 = \sigma_r^0 = 0$.

Пусть $\mathcal{F}_\tau = \{S \in \mathcal{F} : (\forall t \geqslant 0)\ S \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\}$ $(\tau \in \mathcal{T})$ – сигма-алгебра подмножеств, предшествующих марковскому моменту τ. Известно, что любой элемент $A \in \mathcal{F}_\tau$ может быть представлен в виде $\alpha_\tau^{-1}A$ (см. [6, с. 48]). Отсюда вытекает обозначение $\mathcal{F}_\tau = \alpha_\tau^{-1}\mathcal{F}$. Аналогичную сигма-алгебру подмножеств, следующих за марковским моментом τ, естественно обозначить $\theta_\tau^{-1}\mathcal{F}$. Эта сигма-алгебра содержит множество $\{\tau < \infty\}$, а также все подмножества этого множества, представимые в виде $\theta_\tau^{-1}A$ $(A \in \mathcal{F})$.

2.2. Меры и семейства мер.

Распределение (вероятностная мера) $\mathbf{P}$ называется марковским относительно марковского момента τ, если $(\forall B \in \mathcal{F})$ $(\forall A \in \mathcal{F}_\tau)$ справедливо

$$\mathbf{P}(\theta_\tau^{-1} B, A \cap \{\tau < \infty\}) = \mathbf{E}(\mathbf{P}(\theta_\tau^{-1} B | X_\tau); A \cap \{\tau < \infty\}),$$

где под знаком математического ожидания справа стоит условная вероятность относительно сигма-алгебры $\sigma(X_\tau) = \sigma(X_\tau \cap \{\tau < \infty\})$ (следовательно, $\{\tau = \infty\} \in \sigma(X_\tau)$).

Пусть $(\mathbf{P}_x)$ $(x \in \mathbb{X})$ – измеримое семейство вероятностных мер на $\mathcal{F}$ такое, что $(\forall x \in \mathbb{X})$ $\mathbf{P}_x(X_0 = x) = 1$. Мы будем говорить, что для семейства мер $(\mathbf{P}_x)$ выполняется марковское свойство относительно момента τ, если $(\forall B \in \mathcal{F})$ $(\forall A \in \mathcal{F}_\tau)$

$$\mathbf{P}_x(\theta_\tau^{-1} B, A \cap \{\tau < \infty\}) = \mathbf{E}_x(\mathbf{P}_{X_\tau}(B); A \cap \{\tau < \infty\}).$$

Такое τ мы называем моментом регенерации семейства мер $(\mathbf{P}_x)$. Обозначим $\mathcal{M}(\mathbf{P}_x)$ множество моментов регенерации данного семейства мер.

Семейство $(\mathbf{P}_x)$ называется *полумарковским*, если при любом $G \in \mathfrak{A}$ $\sigma_G \in \mathcal{M}(\mathbf{P}_x)$. Известно также, что любая конечная итерация моментов первого выхода из открытых множеств вида σ_δ^n также является моментом регенерации полумарковского процесса [6, с. 72].

Все сформулированые выше условия в терминах переходных вероятностей могут быть эквивалентным образом сформулированы в терминах условных математических ожиданий. В частности, семейство мер $(\mathbf{P}_x)$ называется полумарковским, если $(\forall G \in \mathfrak{A})$ для любых измеримых интегрируемых функций f и g справедливо

$$\mathbf{E}_x((f \circ \theta_{\sigma_G})(g \circ \alpha_{\sigma_G}); \sigma_G < \infty) = \mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{X_{\sigma_G}}(f)(g \circ \alpha_{\sigma_G}); \sigma_G < \infty).$$

Полумарковской переходной функцией называется ядро:

$$F_\tau(A \times S | x) = \mathbf{P}_x(\tau \in A,\ X_\tau \in S), \quad (\tau \in \mathcal{T},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+),\ S \in \mathcal{B}(\mathbb{X})).$$

Полумарковской переходной производящей функцией называется лапласов образ переходной функции:

$$f_\tau(\lambda; S | x) = \mathbf{E}_x(e^{-\lambda \tau};\ X_\tau \in S,\ \tau < \infty) \quad (\lambda \geqslant 0).$$

3. Предварительные результаты

3.1. Выводящие последовательности.

Для подмножества $A \subset \mathbb{X}$ *выводящей последовательностью* называется последовательность $\delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots)$ $(\Delta_i \subset \mathbb{X})$ такая, что для любых $\xi \in \mathcal{D}$ и $t \in \mathbb{R}_+$ существует $n \in \mathbb{N}$, при котором $X_{\sigma_\delta^n}(\xi) \notin A$ или же $\sigma_\delta^n(\xi) > t$.

Пусть $\mathcal{S}(\mathfrak{A}_1, A)$ – множество всех выводящих из A последовательностей, составленных из элементов класса $\mathfrak{A}_1$ подмножеств множества $\mathbb{X}$. Сокращенные обозначения: $\mathcal{S}(\mathfrak{A}_1) = \mathcal{S}(\mathfrak{A}_1, \mathbb{X})$, а также $\mathcal{S}(r, A) = \mathcal{S}(\{B(x, r) : x \in \mathbb{X}\}, A)$ $(r > 0)$, $\mathcal{S}(r) = \mathcal{S}(r, \mathbb{X})$. Выводящая из $\mathbb{X}$ последовательность называется просто *выводящей последовательностью*. Известно, что, если $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1$ является покрытием множества A, то $\mathcal{S}(\mathfrak{A}_1, A) \neq \varnothing$. Кроме того, если $\delta \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}_1)$, то $\delta \cap A \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}_1, A)$, где последовательность $\delta \cap A$ состоит из пересечений $\Delta_n \cap A$ [6, с. 54].

Для любых $\delta \in \mathcal{S}$ и $r > 0$ определены отображения "горизонтального квантования" L_δ и $L_r : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}$ такие, что $(\forall t \in \mathbb{R}_+)$

$$X_t(L_\delta \xi) = X_{\sigma_\delta^n}(\xi), \quad X_t(L_r \xi) = X_{\sigma_r^n}(\xi),$$

где $\sigma_\delta^n(\xi) \le t < \sigma_\delta^{n+1}(\xi)$ и $\sigma_r^n(\xi) \le t < \sigma_r^{n+1}(\xi)$ соответственно.

Композиция последовательностей. Для дальнейшего исследования нам будут полезны выводящие последовательности специального вида. Композицией двух выводящих последовательностей $\delta_i = (\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \dots)$ $(i = 1, 2)$ называется последовательность $\delta_1 \times \delta_2$, состоящая из элементов вида $\Delta_{1j_1} \cap \Delta_{2j_2}$ $(j_i \in \mathbb{N})$. В основе определения композиции лежит следующее свойство: для любых $G \in \mathfrak{A}$ и $\delta \equiv (\Delta_1, \Delta_2, \dots) \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}_1)$ справедливо

$$\sigma_{G \cap \Delta_1} \dot{+} \dots \dot{+} \sigma_{G \cap \Delta_k} \to \sigma_G$$

при $k \to \infty$, и если $\sigma_G(\xi) < \infty$, то $(\exists N \in \mathbb{N})$ $\sigma_G(\xi) = (\sigma_{G \cap \Delta_1} \dot{+} \dots \dot{+} \sigma_{G \cap \Delta_N})(\xi)$ [6]. Обозначим $\tau(i_1) = \sigma_{G \cap \delta_1}^{i_1}$ $(0 \leqslant i_1 \leqslant N)$ и пусть $\tau(N) = \sigma_G$. В этом представлении N – $\mathcal{F}_{\sigma_G}$-измеримая функция, равная числу скачков функции $L_{G \cap \delta_1}$ на интервале $(0, \sigma_G]$. При любом $1 \leqslant i_1 \leqslant N$ таком, что $\tau(i_1) > \tau(i_1 - 1)$ имеем представление $\tau(i_1) = \tau(i_1 - 1) \dot{+} \sigma_{G \cap \Delta_{1i_1}}$. Поэтому интервал $[\tau(i_1 - 1), \tau(i_1))$ может быть разбит на подынтервалы с помощью выводящей последовательности $(\delta_2 \cap G \cap \Delta_{1i_1})$, так как при некотором $N(i_1) \geqslant 1$

$$\sigma_{G \cap \Delta_{1i_1}} = \sigma_{G \cap \Delta_{1i_1} \cap \Delta_{21}} \dot{+} \dots \dot{+} \sigma_{G \cap \Delta_{1i_1} \cap \Delta_{2N(i_1)}}.$$

Здесь $N(i_1)$ – $\mathcal{F}_{\sigma_{G\cap\Delta_{1i_1}}}$ – измеримая целочисленная функция. Таким образом, получаем более мелкое разбиение интервала $[0,\sigma_G]$ точками (марковскими моментами) $\tau(i_1,i_2)$, где $0\leqslant i_1\leqslant N$, $0\leqslant i_2\leqslant N(i_1)$, а также $\tau(i_1,0)=\tau(i_1-1)$ и $\tau(i_1,N(i_1))=\tau(i_1)$. При этом, если $\tau(i_1,i_2)>\tau(i_1,i_2-1)$, то $\tau(i_1,i_2)=\tau(i_1,i_2-1)\dot{+}\sigma_{G\cap\Delta_{1i_1}\cap\Delta_{2i_2})}$. По индукции определяем композицию $\delta_1\times\dots\times\delta_n$ любого конечного числа выводящих последовательностей $\delta_k=(\Delta_{k1},\Delta_{k2},\dots)\in\mathcal{S}(\mathfrak{A}_k)$, где $\mathfrak{A}_k$ – счетное открытое покрытие пространства $\mathbb{X}$. Пусть $(\mathfrak{A}_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность счетных открытых покрытий пространства $\mathbb{X}$. Определим ранг покрытия (последовательности) как $\operatorname{rank}\mathfrak{A}_n=\sup(\operatorname{diam}\Delta:\Delta\in\mathfrak{A}_n)$ (аналогично для последовательности). Ранг композиции последовательностей не превышает наименьшего ранга из рангов компонент. Таким образом, если $\operatorname{rank}\mathfrak{A}_n\to 0$, то и $\operatorname{rank}\delta_1\times\dots\times\delta_n\to 0$.

Монотонная последовательность композиций выводящих последовательностей, составленная для открытых покрытий с убывающими рангами используется далее для доказательства существования аддитивного функционала по следу траектории процесса и криволинейного интеграла по этому аддитивному функционалу.

3.2. Последовательность вписанных эллипсоидов. Пусть $G\in\mathfrak{A}$ и $x\equiv\xi(0)\in G$. Определим $r(x,G)=\sup\{r>0:B(x,r)\subset G\}$, где $B(x,r)$ – открытый шар радиуса r с центром x. Для данного числа $u>0$ пусть $\sigma_{G,u}(\xi)=\sigma_{r(\pi_0(\xi),G)\wedge u}(\xi)$. Тогда $\sigma_{G,u}\in\mathcal{T}$ (марковский момент) и $\sigma_G=\sigma_{G,u}\dot{+}\sigma_G$. Следовательно, при любом $n\geqslant 1$ справедливо $\sigma_G=\sigma_{G,u}^n\dot{+}\sigma_G$, где $\sigma_{G,u}^n=\sigma_{G,u}\dot{+}\dots\dot{+}\sigma_{G,u}$ (в правой части равенства одинаковое слагаемое повторяется n раз). Положим $\sigma_{G,u}^0=0$, а также в случае $\xi(0)\notin G\quad\sigma_{G,u}(\xi)=0$. Следовательно, для любой ξ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{G,u}^n\equiv\sigma_{G,u}^{\infty}\leqslant\sigma_G.$$

Легко понять, что $\lim x_n\notin G$, где $x_n=\pi_{\sigma_{G,u}^n}$, и, следовательно, если $\xi\in\mathcal{C}$ (непрерывна), то $\sigma_{G,u}^{\infty}=\sigma_G$.

Метод вписанных шаров легко может быть обобщен на случай вписанных окрестностей достаточно произвольной формы при условии фиксированного семейства окрестностей, соответствующего каждой точке фазового пространства. Далее будут использоваться эллипсоидальные окрестности точки с конфигурацией, определяемой положительно определенной матрицей коэффициентов при вторых производных частного дифференциального уравнения эллиптического типа. Пусть $E(x)$ – нормированный и центрированный открытый эллипсоид, соответствующий точке $x \in G$, $(x + rE(x))_{r=0}^{\infty}$ – семейство эллипсоидальных окрестностей точки x с параметром масштаба r. Обозначим $r(x, G) = \sup\{r > 0 : x + rE(x) \subset G\}$, $E_u(x) = x + (r(x, G) \wedge u)E(x)$, а также $\sigma_{G,u}(\xi) = \sigma_{E_u(X_0(\xi))}(\xi)$, причем $\sigma_{G,u}(\xi) = 0$, если $X_0(\xi) \notin G$. Обозначим $\sigma_{G,u}^n$ – n-ая итерация этого момента первого выхода. Если отношение максимальной полуоси эллипсоида $E(x)$ к минимальной как функция от x ограничено на множестве G, то при любом u на множестве непрерывных функций $\sigma_{G,u}^n \to \sigma_G$ $(n \to \infty)$.

3.3. Асимптотические формулы. Рассмотрим случай многомерного фазового пространства: $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ при $d \geqslant 2$ (одномерный случай значительно проще и рассматривается отдельно [7]).

Уточним класс полумарковских процессов, по которым определяется стохастический интеграл. Обозначим

$$f_\tau(\lambda; \phi|x) = \mathbf{E}_x(e^{-\lambda\tau}\, \phi(X_\tau); \tau < \infty),$$

где ϕ – непрерывная функция на фазовом пространстве. Полумарковским процессом диффузионного типа назовем процесс, для которого для любого ограниченного множества $G \in \mathfrak{A}$ функционал $f_{\sigma_G}(\lambda; \phi|x)$ как функция от $x \in G$ удовлетворяет частному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{d} b^i D_i u - cu = 0, \qquad (1)$$

где $a^{ij} = a^{ij}(x)$, $(a^{ij}(x))$ – положительно определенная матрица, зависящая от точки x, причем $\sum\limits_{i=1}^{d} a^{ij}(x) = d$; $(b^i) = (b^i(x))$ – вектор, зависящий от x, $c = c(\lambda, x)$ – неотрицательная величина, зависящая от $\lambda \geqslant 0$ и от x; D_{ij}, D_i – операторы дифференцирования по соответствующим координатам. Кроме того выполняется граничное условие $u(x) = \phi(x)$ при $x \in \partial G$.

Будем предполагать, что при любых i и j коэффициенты a^{ij}, b^i, c – непрерывные функции от x, причем a^{ij} дважды непрерывно дифференцируемы, b^i непрерывно дифференцируемы. Пусть, кроме того, существуют положительные числа Λ_1, Λ_2 такие, что при любых $x \in G$

$$\sum_{ij} a^{ij}(x)x^i x^j \geqslant \Lambda_1 \|x\|^2, \quad |b^i(x)|, |c(\lambda, x)| \leqslant \Lambda_2.$$

Представим матрицу $a(x) = (a^{ij}(x))$ в виде произведения невырожденной матрицы на транспонированную: $a(x) = U_x^T U_x$.

Пусть $G_r = x + rG(x)$, где $G(x)$ – ограниченное выпуклое множество, содержащее $\mathbf{0}$, с кусочно гладкой границей. В работе [8] доказано разложение

$$f_{\sigma_{G_r}}(\lambda, \phi | \, x) - \phi(x) = (r^2 A_\lambda^{(0)}(\phi | \, x) + o(r^2)) \, 2F(U_x^{-1}G(x)) \quad (r \to 0) \quad (2)$$

равномерно по всем $G(x) \in \mathfrak{A}^\circ$, где $\mathfrak{A}^\circ$ – множество ограниченных нормированных окрестностей нуля, включающее в себя все конечные пересечения сфер, содержащих $\mathbf{0}$, $\lambda \geqslant 0$, ϕ – дважды непрерывно дифференцируемая функция,

$$A_\lambda^{(0)}(\phi | \, x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x) D_{ij}\phi(x) + \sum_{i=1}^{d} b^i(x) D_i \phi(x) - c(x, \lambda)\phi(x),$$

$$F(S) = \int_S Q_S(\mathbf{0}, p) \, dp^1 \ldots dp^d \quad S \in \mathfrak{A}^\circ,$$

$Q_S(\mathbf{0}, p)$ – функция Грина оператора Лапласа на множестве S (формула (17) из [8]). Известно, что для любого $x \in G$ справедливо $F(U_x^{-1}B) = 1/(2d)$, где $B = B(\mathbf{0}, 1)$ [6, с. 227].

Вторая асимптотическая формула относится к математическому ожиданию времени первого выхода из малой окрестности начальной точки процесса. Известно, что уравнению (1) соответствует полумарковский процесс в том и только в том случае, если при любом x $c(\lambda, x)$ как функция от λ неотрицательна и имеет вполне монотонную по λ производную $\partial c(\lambda, x)/\partial \lambda$. Предположим также, что $c(0, x) \equiv 0$. При сформулированных выше условиях построенный по уравнению (1) полумарковский процесс обладает свойством: для ограниченного множества G справедливо $(\forall x \in G)$ $\mathbf{P}_x(\sigma_G < \infty) = 1$. Обозначим $\gamma(x) = \partial c(\lambda, x)/\partial \lambda \Big|_{\lambda = 0}$. Предположим, что $0 < \gamma(x) < \infty$. В работе [8] доказано, что

$$\mathbf{E}_x(\sigma_{G_r}) = (r^2 \gamma(x) + o(r^2)) \, 2F(U_x^{-1}G(x)) \quad (r \to 0) \qquad (3)$$

равномерно по $x \in G$.

Формула (3) может быть обобщена в следующем направлении. Рассмотрим интеграл $S_t^g = \int\limits_0^t g(X_s)\,ds$, где $\tau \in \mathcal{T}$, g – непрерывная положительная функция на $\mathbb{X}$. Из непрерывности справа траекторий процесса следует асимптотика безусловного математического ожидания

$$\mathbf{E}_x(S^g_{\sigma_{G_r}}) = (r^2\gamma(x)g(x) + o(r^2))\,2F(U_x^{-1}G(x)) \quad (r \to 0) \qquad (4)$$

Предположим, что функция γ непрерывна на G. Из формул (2), (4) вытекает эквивалентность: при $r \to 0$

$$\frac{\mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_{G_r})\phi(X_{\sigma_{G_r}})) - \phi(x)}{\mathbf{E}_x(S^g_{\sigma_{G_r}})} = \frac{A_\lambda^{(0)}(\phi|\,x)}{g(x)\gamma(x)}(1 + o(1)). \qquad (5)$$

Эта эквивалентность имеет ключевое значение при построении стохастического интеграла по полумарковскому процессу. Как будет показано ниже, придавая функции g различные значения, можно получить различные аддитивные функционалы, относительно которых осуществляется криволинейное интегрирование.

3.4. След траектории.

Пусть Φ – множество непрерывных неубывающих функций $\phi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ таких, что $\phi(0) = 0$, $\phi(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$; ϕ^* – обратное к ϕ отображение: $\phi^*(t) = \inf \phi^{-1}[t, \infty)$. Очевидно, что функция ϕ^* непрерывна слева. С помощью функций ϕ определяются замены времени по формуле $\xi_1 = \xi \circ \phi$. Нетрудно проверить, что относительно замены времени моменты и точки первого выхода преобразуются специальным образом, а именно

$$\sigma_G(\xi \circ \phi) = \phi^*(\sigma_G \xi), \quad X_{\sigma_G}(\xi \circ \phi) = X_{\sigma_G}\xi \quad (G \in \mathfrak{A}).$$

Точно таким же образом преобразуются конечные итерации моментов первого выхода, моменты, получаемые из них с помощью предельного перехода и многих других преобразований. Для исследования полумарковских процессов особую роль играют марковские моменты, обладающие этим свойством, а именно, класс

$$\mathcal{T}^* = \{\tau \in \mathcal{T} : (\forall \xi \in \mathcal{D})\,(\forall \phi \in \Phi)\ \tau(\xi \circ \phi) = \phi^*(\tau(\xi))\},$$

который называется множеством *внутренних марковских моментов*.

Рассмотрим отношение эквивалентности $\xi_1 \overset{\ell}{\sim} \xi_2$, которое означает, что существуют такие $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$, что $\xi_1 \circ \phi_1 = \xi_2 \circ \phi_2$. Класс эквивалентности $\ell\xi$ функции ξ по отношению $\overset{\ell}{\sim}$ называется *следом* или последовательностью состояний траектории ξ. Аналогично определяется след траектории между двумя внутренними марковскими моментами τ_1, τ_2. При этом $\tau_1 < \tau_2$ для всех эквивалентных траекторий выполняется одновременно. Обозначим $\mathcal{F}^*$ сигма-алгебру всех множеств $B \in \mathcal{F}$ таких, что для любых $\phi \in \Phi$ справедливо $\xi \in B \Leftrightarrow \xi \circ \phi \in B$. Примерами $\mathcal{F}^*$-измеримых множеств являются множества: $\{\tau < \infty\}$, $\{X_\tau \in S\}$, где $\tau \in \mathcal{T}^*$, $S \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$.

С другой стороны, след непрерывной функции ξ на интервале $[0, \tau_0]$ ($\tau_0 \in \mathcal{T}^*$, $\tau_0 < \infty$) может быть представлен конструктивным образом с помощью значений $X_\tau(\xi)$ для τ из достаточно богатого множества внутренних марковских моментов, например для всех $\tau_{kn} = \sigma_\delta^n$ ($\delta \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}_k)$ $k \geqslant 1$, $n \geqslant 1$), где $\operatorname{rank} \mathfrak{A}_k \to 0$ [6, с. 252].

Из сделанных предположений о коэффициентах уравнения (1), определяющего семейство мер $(\mathbf{P}_x)$ непрерывного полумарковского процесса, следует, что для любого ограниченного множества $G \in \mathfrak{A}$ и любой точки $x \in G$ выполняется $\mathbf{P}_x(\sigma_G < \infty) = 1$. Обозначим $\mathcal{F}^*_{\sigma_G} \equiv \alpha^{-1}_{\sigma_G}\mathcal{F}^*$ и $\mathcal{F}^0_{\sigma_G} \equiv \sigma(X_{\tau_{kn}}; k, n \geqslant 1)$. Из сказанного выше следует, что для любой точки $x \in G$ сигма-алгебры $\mathcal{F}^*_{\sigma_G}$ и $\mathcal{F}^0_{\sigma_G}$ совпадают с точностью до их пополнений по мере $\mathbf{P}_x$. В частности, условные математические ожидания какой-либо случайной величины относительно $\mathcal{F}^*_{\sigma_G}$ и $\mathcal{F}^0_{\sigma_G}$ совпадают $\mathbf{P}_x$-почти наверное. Из сказанного ясно, что при изучении следа траектории можно обойтись несколько меньшим (формально) классом, чем класс всех внутренних марковских моментов $\mathcal{T}^*$, а именно – классом $\mathcal{T}^0$, определяемым, как класс, содержащий все σ_G ($G \in \mathfrak{A}$), все конечные итерации таких моментов и замкнутый относительно сходимости снизу.

3.5. Аддитивные функционалы. Назовем аддитивным функционалом вещественную функцию двух аргументов $a_t(\xi)$ ($\xi \in \mathcal{D}$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$) такую, что $a_0 \equiv 0$, a_t как функция от ξ измерима относительно $\mathcal{F}_t$ и для любых $t_1, t_2 \geqslant 0$ ($t_1 < \infty$) справедливо

$$a_{t_1 \dot{+} t_2} = a_{t_1} + a_{t_2} \circ \theta_{t_1}.$$

Мультипликативным функционалом называется положительная вещественная функция двух аргументов $m_t(\xi)$ ($\xi \in \mathcal{D}$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$)

такую, что $m_0 \equiv 1$, m_t как функция от ξ измерима относительно $\mathcal{F}_t$ и для любых $t_1, t_2 \geqslant 0$ $(t_1 < \infty)$ справедливо

$$m_{t_1 \dot{+} t_2} = m_{t_1}(m_{t_2} \circ \theta_{t_1}).$$

Если (a_t) – аддитивный функционал, то (m_t) – мультипликативный функционал, где $m_t = \exp a_t$. Если (m_t) – мультипликативный функционал, то (a_t) – аддитивный функционал, где $a_t = \log m_t$. Таким образом достаточно изучать свойства только одного из этих двух видов функционалов, например, аддитивного. Обозначим $a_\tau(\xi) = a_{\tau(\xi)}(\xi)$ для $\tau \in \mathcal{T}$. При этом a_τ как функция от ξ измерима относительно $\mathcal{F}_\tau$ и для любых $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$ $(\tau_1 < \infty)$ справедливо

$$a_{\tau_1 \dot{+} \tau_2} = a_{\tau_1} + a_{\tau_2} \circ \theta_{\tau_1}. \tag{6}$$

Примером аддитивного функционала является, во-первых, само время $a_t \equiv t$. Во-вторых, – это интеграл по времени вида S_t^g, где g — $\mathcal{B}(\mathbb{X})$-измеримая вещественная функция. Это следует из представления: для $\tau_i \in \mathcal{T}$:

$$S^g_{\tau_1 \dot{+} \tau_2} = \int_0^{\tau_1} g(X_s)\,ds + \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \tau_2 \circ \theta_{\tau_1}} g(X_s)\,ds =$$

$$= \int_0^{\tau_1} g(X_s)\,ds + \int_0^{\tau_2 \circ \theta_{\tau_1}} g(X_{\tau_1 + s})\,ds =$$

$$= \int_0^{\tau_1} g(X_s)\,ds + \int_0^{\tau_2 \circ \theta_{\tau_1}} g(X_s \circ \theta_{\tau_1})\,ds = S^g_{\tau_1} + S^g_{\tau_2} \circ \theta_{\tau_1}.$$

В теории стохастического интегрирования по полумарковскому процессу особую роль играют $\mathcal{F}^0$-измеримые аддитивные (мультипликативные) функционалы (a_t), которые называются также аддитивными (мультипликативными) функционалами по следу. Эти аддитивные функционалы определяются свойствами:

1) $a_0 = 0$,

2) при любом $\tau \in \mathcal{T}^0$ a_τ как функция от ξ измерима относительно $\mathcal{F}^0_\tau$,

3) при любых $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}^0$ выполняется формула (6).

Аналогично определяются $\mathcal{F}^0$-измеримые мультипликативные функционалы. Построение $\mathcal{F}^0$-измеримых аддитивных и мультипликативных функционалов опирается на следующую лемму:

Лемма 1. *Для любого $\tau \in \mathcal{T}^0$ и для любого x $\mathbf{P}_x$-почти наверное справедливо*

1) *для любых интегрируемых функций f и g*

$$\mathbf{E}_x((f \circ \alpha_\tau)(g \circ \theta_\tau) | \mathcal{F}^0) = \mathbf{E}_x(f \circ \alpha_\tau | \alpha_\tau^{-1}\mathcal{F}^0)\mathbf{E}_x(g \circ \theta_\tau | \theta_\tau^{-1}\mathcal{F}^0),$$

2) *для любой интегрируемой функции g*

$$\mathbf{E}_x(g \circ \theta_\tau | \theta_\tau^{-1}\mathcal{F}^0) = (\mathbf{E}_{X_0}(g | \mathcal{F}^0)) \circ \theta_\tau.$$

Доказательство.

1) Свойство доказано в [6, с. 288].

2) Имеем для произвольного множества $A \in \mathcal{F}^0$, $\mathcal{F}$-измеримой функции g, точки $x \in \mathbb{X}$ и $\tau \in \mathcal{T}^0$

$$\mathbf{E}_x(g \circ \theta_\tau ; \theta_\tau^{-1}A) = \mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{X_\tau}(g; A)).$$

Кроме того $(\forall x \in \mathbb{X})$ $\mathbf{P}_x$-почти наверное $\mathbf{E}_x(g) = \mathbf{E}_{X_0}(g)$ и $\mathbf{E}_x(g | \mathcal{F}^0) = \mathbf{E}_{X_0}(g | \mathcal{F}^0)$, где

$$(\mathbf{E}_{X_0}(g | \mathcal{F}^0))(\xi) = \mathbf{E}_{X_0(\xi)}(g | \mathcal{F}^0)(\xi)$$

– ξ-сечение измеримой относительно $\mathcal{B}(\mathbb{X}) \otimes \mathcal{F}^0$ функции $\mathbf{E}_{(\cdot)}(g | \mathcal{F}^0)$, которое является $\mathcal{F}^0$-измеримым. Отсюда $\mathbf{P}_x$-почти наверное

$$\mathbf{E}_x(\mathbf{E}_x(g | \mathcal{F}^0); A) = \mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{X_0}(g | \mathcal{F}^0); A).$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{X_\tau}(g; A)) = \mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{X_\tau}(\mathbf{E}_{X_0}(g | \mathcal{F}^0); A)) =$$
$$= \mathbf{E}_x((\mathbf{E}_{X_0}(g | \mathcal{F}^0)) \circ \theta_\tau ; \theta_\tau^{-1}A),$$

а также

$$\mathbf{E}_x(g \circ \theta_\tau | \theta_\tau^{-1}\mathcal{F}^0) = (\mathbf{E}_{X_0}(g | \mathcal{F}^0)) \circ \theta_\tau$$

$\mathbf{P}_x$-почти наверное. •

Приведем примеры $\mathcal{F}^0$-измеримых аддитивных и мультипликативных функционалов.

Пример 1. Рассмотрим при фиксированном x и $\tau \in \mathcal{T}^0$ $\mathcal{F}^0_\tau$-измеримую функцию $\mu^{(x)}_\tau = \mathbf{E}_x(\tau|\,\mathcal{F}^0_\tau)$, которая $\mathbf{P}_x$-почти наверное совпадает с функционалом $\mu_\tau = \mathbf{E}_{X_0}(\tau|\,\mathcal{F}^0_\tau)$. Отсюда согласно лемме 1 и очевидному представлению $\tau = \tau \circ \alpha_\tau$ $(\tau \in \mathcal{T})$ имеем

$$\mu_{\tau_1 \dot{+} \tau_2} = \mathbf{E}_x(\tau_1 \dot{+} \tau_2|\,\mathcal{F}^0) = \mathbf{E}_x(\tau_1|\,\alpha^{-1}_{\tau_1}\mathcal{F}^0) + \mathbf{E}_x(\tau_2 \circ \theta_{\tau_1}|\,\theta^{-1}_{\tau_1}\mathcal{F}^0) =$$

$$= \mathbf{E}_x(\tau_1|\,\mathcal{F}^0) + (\mathbf{E}_{X_0}(\tau_2|\,\mathcal{F}^0)) \circ \theta_{\tau_1} = \mu_{\tau_1} + \mu_{\tau_2} \circ \theta_{\tau_1}$$

$\mathbf{P}_x$-почти наверное. Соответствующий мультипликативный функционал: $m_\tau = \exp(\mu_\tau)$.

Пример 2. Обозначим $M_\tau(\lambda) = \mathbf{E}_{X_0}(\exp(-\lambda\tau)|\,\mathcal{F}^0)$. Согласно лемме 1 имеем

$$M_{\tau_1 \dot{+} \tau_2}(\lambda) = \mathbf{E}_{X_0}(\exp(-\lambda\tau_1)(\exp(-\lambda\tau_2) \circ \theta_{\tau_1})|\,\mathcal{F}^0) =$$

$$= \mathbf{E}_{X_0}(\exp(-\lambda\tau_1)|\,\mathcal{F}^0)\mathbf{E}_{X_0}(\exp(-\lambda\tau_2) \circ \theta_{\tau_1}|\,\theta^{-1}_{\tau_1}\mathcal{F}^0) =$$

$$= M_{\tau_1}(\lambda)(M_{\tau_2}(\lambda) \circ \theta_{\tau_1}).$$

Соответствующий неотрицательный аддитивный функционал: $b_\tau(\lambda) = -\log M_\tau(\lambda)$. В отличие от первого примера здесь не предполагается конечность математического ожидания моментов τ_i.

Пример 3. Обобщением примера 1 является $\mathcal{F}^0$-измеримый аддитивный функционал $\mu^g_\tau = \mathbf{E}_{X_0}(S^g_\tau|\,\mathcal{F}^0_\tau)$, что следует из аддитивности функционала S^g_τ.

Пример 4. Обобщением примера 2 является $\mathcal{F}^0$-измеримый мультипликативный функционал $M^g_\tau = \mathbf{E}_{X_0}(\exp(S^g_\tau)|\,\mathcal{F}^0_\tau)$, что вытекает из мультипликативности функционала $\exp(S^g_\tau)$. Следует заметить, что использовать функционалы μ^g_τ и M^g_τ имеет смысл только тогда, когда они конечны и не обращаются в ноль, что в данной работе будет предпологаться (в терминах коэффициентов уравнения (1)).

Векторным аддитивным (мультипликативным) функционалом (в том числе $\mathcal{F}^0$-измеримым) называется конечная система одномерных аддитивных (мультипликативных) функционалов. В дальнейшем используются d-мерные функционалы. Примером векторного аддитивного функционала является интеграл $S^g_t \equiv \int_0^t g(X_s)\,dt$, где $g(x)$ – векторнозначная функция.

4. Стохастические интегралы

4.1. Криволинейные интегралы. Пусть $(f(t))$ – адаптированный (относительно $(\mathcal{F}_t)$) случайный процесс с траекториями из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{X}_1)$ функций непрерывных справа и имеющих пределы слева со значениями из конечномерного пространства $\mathbb{X}_1$. Определим криволинейный интеграл $\int_0^{\sigma_G} f(\tau)\,da_\tau$ от функции $f(t)$ по $\mathcal{F}^0$-измеримому положительному аддитивному функционалу a_τ. Предположим, что для любого $x \in \mathbb{X}$ и любой последовательности открытых множеств (Δ_n), где $\Delta_n \downarrow x$, справедливо $a_{\Delta_n} \to 0$. Отсюда следует, что аддитивный функционал a_τ непрерывен справа по τ. Для такого функционала справедливо единственное разложение $a_\tau = a_\tau^0 + A_\tau$, где a_τ^0 – непрерывная и A_τ – чисто разрывная части относительно естественной метрики ρ_ℓ на следе (последовательности состояний) траектории вида: $\rho_\ell(\tau_1,\tau_2|\xi) = \inf\{\operatorname{diam}\Delta : \Delta \in \mathfrak{A}_0, \tau_1\xi \leqslant \tau_2\xi < (\tau_1 \dot{+} \sigma_\Delta)(\xi)\}$, если $\tau_1\xi \leqslant \tau_2\xi$ и $\rho_\ell(\tau_1,\tau_2|\xi) = \inf\{\operatorname{diam}\Delta : \Delta \in \mathfrak{A}_0, \tau_2\xi \leqslant \tau_1\xi < (\tau_2 \dot{+} \sigma_\Delta)(\xi)\}$, если $\tau_2\xi \leqslant \tau_1\xi$ [6, с. 302, 315]. Полагаем

$$\int_0^{\sigma_G} f(\tau)\,da_\tau = \int_0^{\sigma_G} f(\tau)\,da_\tau^0 + \int_0^{\sigma_G} f(\tau)\,dA_\tau,$$

где

$$\int_0^{\sigma_G} f(\tau)\,dA_\tau = \sum_{\tau \leqslant \sigma_G} f(\tau-0)(A(\tau) - A(\tau-0)) \quad (\tau \in \mathcal{T}^0),$$

$$\int_0^{\sigma_G} f(\tau)\,da_\tau^0 = \lim_{r\to 0} \sum_{k=1}^{N_G^\delta} f(\tau_{k-1})(a_{\tau_k}^0 - a_{\tau_{k-1}}^0) \quad (\delta \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}_r)),$$

если данный предел существует (где $N_G^\delta(\xi)$ – число скачков функции $L_\delta(\xi)$ до ее момента первого выхода из G, $\tau_k = \sigma_\delta^k$). Для этого достаточно, чтобы функция f была непрерывна справа и имела пределы слева. Таким образом, определение криволинейного интеграла по положительному аддитивному функционалу мало отличается от определения интеграла Римана–Стильтьеса. Представив аддитивный функционал ограниченной вариации в виде разности двух положительных аддитивных функционалов, стандартным образом определяем криволинейный интеграл по аддитивному функционалу ограниченной вариации.

4.2. Полумартингал и мартингал по следу. Рассмотрим полумарковский процесс диффузионного типа, управляемый уравнением (1). Фиксируем ограниченное множество $G \in \mathfrak{A}$ и $x \in G$. Рассмотрим выводящую из G последовательность δ ранга r. Пусть N_G^δ – номер скачка первого выхода из G ступенчатой функции L_δ, t_k – момент k-ого скачка, x_k – значение процесса в момент k-ого скачка, при этом существует $\Delta_{k+1} \in \mathfrak{A}^o$, что $t_{k+1} = t_k \dot{+} \sigma_{\Delta_{k+1}}$. Рассмотрим представление интеграла от функции $\phi(X_{\sigma_G})$. Имеем

$$\mathbf{E}_x(\phi(X_{\sigma_G})) - \phi(x) = \mathbf{E}_x\left(\sum_{k=1}^{N_G^\delta}(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_x\left(\sum_{k=1}^{n}(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})); N_G^\delta = n\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}); N_G^\delta \geqslant k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{x_{k-1}}(\phi(X_{\sigma_{\Delta_k}}) - \phi(X_0)); N_G^\delta \geqslant k).$$

Пользуясь эквивалентностью (5) при $\lambda = 0$ и $g(x) = A_0^{(0)}(\phi|\, x)/\gamma(x)$, получаем

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{x_{k-1}}(S^g_{\sigma_{\Delta_k}})(1 + \epsilon(k, r)); N_G^\delta \geqslant k),$$

где $\epsilon(k, r) \to 0$ $(r \to 0)$ равномерно по всем k. Отсюда последнее выражение может быть переписано в виде

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{x_{k-1}}(S^g_{\sigma_{\Delta_k}}); N_G^\delta \geqslant k)(1 + \epsilon(r)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x(S^g_{t_k} - S^g_{t_{k-1}}; N_G^\delta \geqslant k)(1 + \epsilon(r)) \to \mathbf{E}_x(S^g_{\sigma_G}).$$

Обозначив $A_0(\phi|\, x) = A_0^{(0)}(\phi|\, x)/\gamma(x)$, получаем формулу

$$\mathbf{E}_x(\phi(X_{\sigma_G})) - \phi(x) = \mathbf{E}_x\left(\int_0^{\sigma_G} A_0(\phi|\, X_t)\, dt\right). \tag{7}$$

Эта формула известна из теории марковских процессов [4], где $(A_0(\phi|\,x))$ – характеристический оператор Дынкина. Из аддитивности функционала S^g_τ следует справедливость этой формулы при замене σ_G на произвольный момент $\tau \in \mathcal{T}^o$.

Положим $\phi(X) = X^i - y^i$. Тогда $A_0^{(0)}(\phi|\,y) = b^i(y)$, где $b(y) = (b^1(y), \ldots, b^d(y))$ – вектор коэффициентов при первых производных уравнения (1). Распространяя обозначение S^g_t на векторные функции g, можно записать

$$\mathbf{E}_x(X_\tau - X_0) = \mathbf{E}_x(S^{b/\gamma}_\tau) = \mathbf{E}_x \left(\int\limits_0^\tau \frac{b(X_t)}{\gamma(X_t)}\, dt \right).$$

Учитывая эту формулу, рассмотрим векторный аддитивный функционал (процесс)

$$M^{(1)}_t = X_t - X_0 - S^{b/\gamma}_t.$$

Аддитивность этого функционала следует из аддитивности разности:

$$X_{\tau_1 \dot{+} \tau_1} - X_0 = X_{\tau_1} - X_0 + (X_{\tau_2} - X_0) \circ \theta_{\tau_1}.$$

Для доказательства мартингального свойства этого процесса заметим, что для любых τ_1 и τ_2 из $\mathcal{T}^0$ существует $\tau_3 \in \mathcal{T}^0$ такое, что на множестве $\tau_1 \leqslant \tau_2$ $\tau_2 = \tau_1 \dot{+} \tau_3$ (доказательство вытекает из соотношения $\{t < \sigma_\Delta\} \Rightarrow \{\sigma_\Delta = t \dot{+} \sigma_\Delta\}$ [6, с. 285]). Отсюда достаточно рассмотреть пару моментов τ_1 и $\tau_1 \dot{+} \tau_2$. Используя полумарковское свойство, имеем

$$\mathbf{E}_x(M^{(1)}_{\tau_1 \dot{+} \tau_2} |\, \mathcal{F}_{\tau_1}) = \mathbf{E}_x(M^{(1)}_{\tau_1} + M^{(1)}_{\tau_2} \circ \theta_{\tau_1} |\, \mathcal{F}_{\tau_1}) =$$

$$= M^{(1)}_{\tau_1} + \mathbf{E}_{X_{\tau_1}}(M^{(1)}_{\tau_2}) = M^{(1)}_{\tau_1}.$$

Таким образом мартингальное свойство выполняется на частично упорядоченном множестве марковских моментов $\mathcal{T}^0$, но, вообще говоря, не выполняется на всей полупрямой или на каком-либо интервале. По аналогии с полумарковскими процессами такой процесс естественно назвать полумартингалом (к сожалению, этот термин часто используют по отношению к объединению классов суб- и супермартингалов). Определение стохастического интеграла может быть определено в терминах полумартингала. Однако для вывода формулы Ито полумартингала не достаточно. Для этой цели будет использована другая модификация мартингала – $\mathcal{F}^0$-измеримый мартингал по следу процесса.

Заметим, что формулу (7) можно переписать в виде

$$\mathbf{E}_x(\phi(X_{\sigma_G})) - \phi(x) = \mathbf{E}_x\left(\int_0^{\sigma_G} \frac{A_0(\phi|\, X_\tau)}{\gamma(X_\tau)}\, d\mu_\tau\right), \tag{8}$$

На основании этой формулы получаем второй вариант векторной аддитивной функции, которую можно назвать мартингалом на частично упорядоченном множестве $\mathcal{T}^0$ или мартингалом по следу.

$$M_\tau^{(2)} = X_\tau - X_0 - \mu_\tau^f,$$

где $f = b/\gamma$. Мартингальность следует из соотношений

$$\mathbf{E}_x(M^{(2)}_{\tau_1 \dot{+} \tau_2}|\, \mathcal{F}_{\tau_1}) = M^{(2)}_{\tau_1} + \mathbf{E}_{X_{\tau_1}}(M^{(2)}_{\tau_2}) = M^{(2)}_{\tau_1}.$$

Мартингал $(M_\tau^{(2)})$ не продолжается до "полумартингала". Его реализации определены на каждом следе траектории, рассматриваемом как упорядоченное множество точек из метрического пространства $\mathbb{X}$. В данном примере $\mathcal{F}^0$-измеримый аддитивный функционал связан со временем первого выхода из открытых множеств. В отличие от полумартингала мартингал по следу можно определить и в том случае, когда математическое ожидание этого времени бесконечно (см. примеры аддитивных функционалов).

Квадратическая характеристика. Покажем, что мартингал $M \equiv M^{(2)}$ является квадратично интегрируемым и найдем квадратическую характеристику для него. Заметим, что так же, как и исходный процесс, мартингал M имеет размерность d и его квадратическая характеристика — это матрица с элементами

$$K^{ij}(M, \tau) = \mathbf{E}_x(M_\tau^i M_\tau^j) \quad (\tau \in \mathcal{T}^0).$$

Заметим, что $M_0 = 0$ $\mathbf{P}_x$-почти наверное. Рассмотрим выражение

$$K_m^{ij}(M, \sigma_G) = \mathbf{E}_x\left(\sum_{k=1}^N (M^i_{t_k} - M^i_{t_{k-1}}) \sum_{k=1}^N (M^j_{t_k} - M^j_{t_{k-1}})\right), \tag{9}$$

где $t_k = \sigma^k_{\delta_m}$, $\delta_m \in \mathcal{S}_m$ – выводящая из $G \in \mathfrak{A}$ последовательность порядкового типа ω^m ранга r_m ($r_m \to 0$, когда $m \to \infty$), $N =$

$N_G^{\delta_m}(\xi)$ – число скачков квантованного процесса $L_{\delta_m}(\xi)$ в момент σ_G (при этом $\sigma_G(\xi) = \sigma_{\delta_m}^N(\xi)$). Обозначим $\Delta M_k^s = M_{t_k}^s - M_{t_{k-1}}^s$. Тогда

$$K_m^{ij}(M,\sigma_G) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_x(M_{\sigma_G}^i M_{\sigma_G}^j;\, N=n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{n} \Delta M_k^i \Delta M_k^j + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} \Delta M_k^i\, \Delta M_l^j + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=l+1}^{n} \Delta M_k^i\, \Delta M_l^j;\, N=n \right).$$

Меняя порядок суммирования: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \sum\limits_{l=k+1}^{n} \mapsto \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{l=k+1}^{\infty} \sum\limits_{n=l}^{\infty}$, учитывая, что $\{N \geqslant l\} \in \mathcal{F}_{\tau_{l-1}}$, и пользуясь мартингальным свойством, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} \Delta M_k^i\, \Delta M_l^j + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=l+1}^{n} \Delta M_k^i\, \Delta M_l^j;\, N=n \right) = 0.$$

Следовательно,

$$K_m^{ij}(M,\sigma_G) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x(\Delta M_k^i \Delta M_k^j;\, N \geqslant k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x((x_k^i - x_{k-1}^i - \mu_{t_k}^{b^i/\gamma} + \mu_{t_{k-1}}^{b^i/\gamma})(x_k^j - x_{k-1}^j - \mu_{t_k}^{b^j/\gamma} + \mu_{t_{k-1}}^{b^j/\gamma});\, N \geqslant k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x((X_{\sigma_{\Delta_k}}^i - X_0^i - \mu_{\sigma_{\Delta_k}}^{b^i/\gamma})(X_{\sigma_{\Delta_k}}^j - X_0^j - \mu_{\sigma_{\Delta_k}}^{b^j/\gamma}) \circ \theta_{t_{k-1}};\, N \geqslant k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{x_{k-1}}((X_{\sigma_{\Delta_k}}^i - X_0^i - \mu_{\sigma_{\Delta_k}}^{b^i/\gamma})(X_{\sigma_{\Delta_k}}^j - X_0^j - \mu_{\sigma_{\Delta_k}}^{b^j/\gamma}));\, N \geqslant k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{x_{k-1}}((X_{\sigma_{\Delta_k}}^i - X_0^i)(X_{\sigma_{\Delta_k}}^j - X_0^j) -$$

$$-(X_{\sigma_{\Delta_k}}^i - X_0^i)\mu_{\sigma_{\Delta_k}}^{b^j/\gamma} - (X_{\sigma_{\Delta_k}}^j - X_0^j)\mu_{\sigma_{\Delta_k}}^{b^i/\gamma} + \mu_{\sigma_{\Delta_k}}^{b^i/\gamma}\mu_{\sigma_{\Delta_k}}^{b^j/\gamma});\, N \geqslant k).$$

Оценим порядок произведений. Согласно асимптотике (5) имеем

$$|\mathbf{E}_x((X^i_{\sigma_{\Delta_k}} - X^i_0)\mu^{b^j/\gamma}_{\sigma_{\Delta_k}})| \leqslant r_m \mathbf{E}_x(\mu^{|b^j|/\gamma}_{\sigma_{\Delta_k}}).$$

Отсюда следует, что сумма этих членов пренебрежимо мала при $m \to \infty$.

Далее оценим члены вида $\mathbf{E}_x(\mu^{b^i/\gamma}_{\sigma_{\Delta_k}}\mu^{b^j/\gamma}_{\sigma_{\Delta_k}})$. Имеем

$$\frac{\mathbf{E}_x(\mu^{b^i/\gamma}_{\sigma_{\Delta_k}}\mu^{b^j/\gamma}_{\sigma_{\Delta_k}})}{\mathbf{E}_x(\mu^{g}_{\sigma_{\Delta_k}})} \sim \frac{(b^i(x)b^j(x)/\gamma^2(x))\mathbf{E}_x((\mu_{\sigma_{\Delta_k}})^2)}{g(x)\mathbf{E}_x(\mu_{\sigma_{\Delta_k}})}.$$

Известно [6, с. 353], что отношение $\mathbf{E}_x((\mu_{\sigma_{\Delta_k}})^2)/\mathbf{E}_x(\mu_{\sigma_{\Delta_k}})$ стремится к нулю при $m \to \infty$. Отсюда следует, что сумма этих членов также пренебрежимо мала.

Оценим члены вида $\mathbf{E}_x((X^i_{\sigma_{\Delta_k}} - X^i_0)(X^j_{\sigma_{\Delta_k}} - X^j_0))$. Используя формулу (5) с функцией $\phi(y) = (y^i - x^i)(y^j - x^j)$, при которой $A^{(0)}_0(\phi|\, x) = a^{ij}(x)$, получаем

$$\mathbf{E}_x((X^i_{\sigma_{\Delta_k}} - X^i_0)(X^j_{\sigma_{\Delta_k}} - X^j_0)) = \mathbf{E}_x(S^f_{\sigma_{\Delta_k}})(1 + \epsilon_1(m,k))$$

при $f(x) = a^{ij}(x)/\gamma(x)$, где $\epsilon_1(m,k) \to 0$ при $m \to \infty$ равномерно по всем k. Отсюда

$$K^{ij}_m(M,\sigma_G) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x(S^f_{\sigma_{\Delta_k}} \circ \theta_{t_{k-1}};\, N \geqslant k)(1 + \epsilon(m)) =$$

$$= \mathbf{E}_x(\sum_{k=1}^{N} S^f_{\sigma_{\Delta_k}} \circ \theta_{t_{k-1}})(1 + \epsilon(m)) = \mathbf{E}_x(S^f_{\sigma_G})(1 + \epsilon(m)),$$

где $\epsilon(m) \to 0$. Отсюда

$$K^{ij}_m(M,\sigma_G) = \mathbf{E}_x(S^f_{\sigma_G}) = \mathbf{E}_x\left(\int_0^{\sigma_G} (a^{ij}(X_t)/\gamma(X_t))\, dt\right).$$

Из построения следует справедливость этой формулы при замене σ_G на произвольный конечный момент $\tau \in \mathcal{T}^0$,

$$K^{ij}(M,\tau) \equiv \mathbf{E}_x(M^i_\tau M^j_\tau) = \mathbf{E}_x \int_0^{\tau} \left(\frac{a^{ij}(X_t)}{\gamma(X_t)}\right) dt. \qquad (10)$$

Из положительной определенности матрицы (a^{ij}) следует положительная определенность матрицы $K^{ij}(M,\tau)$. Докажем теперь, что (m^{ij}_τ) является мартингалом по следу, где

$$m^{ij}_\tau = M^i_\tau M^j_\tau - \mu^f_\tau.$$

Имеем

$$\mathbf{E}_x(m^{ij}_{\tau_1 \dot{+} \tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) = m^{ij}_{\tau_1} +$$

$$+\mathbf{E}_x(M^i_{\tau_1}(M^j_{\tau_2}\circ\theta_{\tau_1}) + (M^i_{\tau_2}\circ\theta_{\tau_1})M^j_{\tau_1} + (M^i_{\tau_2}M^j_{\tau_2})\circ\theta_{\tau_1} - \mu^f_{\tau_2}\circ\theta_{\tau_1} | \mathcal{F}_{\tau_1}).$$

Второй член этой суммы равен нулю благодаря полумарковскому свойству процесса и так как $\mathbf{E}_x(M^i_\tau) = 0$ и $\mathbf{E}_x(M^i_\tau M^j_\tau - \mu^f_\tau) = 0$ для любого $x \in G$. Таким образом матричный аддитивный функционал с компонентами

$$\mu^{a^{ij}/\gamma}_\tau \equiv \int\limits_0^\tau \frac{a^{ij}(X_{t_1})}{\gamma(X_{t_1})}\, dt_1 \tag{11}$$

является аналогом квадратической характеристики одномерного квадратично интегрируемого мартингала.

4.3. Стохастический интеграл по мартингалу.

Принимая за исходную запись вектора его запись в виде столбца, обозначим a^* транспонированный вектор a (вектор-строку). Таким образом a^*b – это скалярное произведение двух векторов одинаковой размерности a и b, равное в координатной записи $\sum\limits_{i=1}^d a^i b^i$. Далее будут рассматриваться интегралы от скалярного произведения интегрируемой векторнозначной функции на приращения векторнозначной интегрирующей функции. Для решения проблемы о существовании стохастического интеграла по полумартингалу рассмотрим функцию f ступенчатого вида такого, что существует последовательность марковских моментов $(\tau_k)_1^N$, в которой N – целочисленная функция такая, что $\{N = k\} \in \mathcal{F}_{\tau_k}$, $\tau_k \in \mathcal{T}^0$, $\tau_0 = 0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots, \tau_N = \sigma_G$ (в частности, эти моменты могут быть взяты из совокупности $(\sigma^k_{\delta_n})$), для любых $t \in [\tau_{k-1} < \tau_k)$ $f(t) = f(\tau_{k-1})$ и для любого k $f(\tau_{k-1})$ — $\mathcal{F}_{\tau_{k-1}}$-измеримая случайная величина со значениями из $\mathbb{R}^d$. Определим стохастический интеграл на интервале $[0,\sigma_G)$ от функции

f по полумартингалу (M_t) как сумму

$$\int_0^{\sigma_G} (f(\tau))^* \, dM_\tau = \sum_{k=1}^{N} (f(\tau_{k-1}))^* \, (M_{\tau_k} - M_{\tau_{k-1}}).$$

Обозначим $\mathcal{L}_0$ класс таких функций f. Заметим, что для двух функций этого класса всегда можно подобрать последовательность марковских моментов с перечисленными выше свойствами так, чтобы каждая из этих функций сохраняет постоянное значение на любом интервале между соседними марковскими моментами этой последовательности. Отсюда следует, что $\mathcal{L}_0$ – линейное пространство. Для распространения определения стохастического интеграла на более широкий класс функций рассмотрим (в соответствии с традиционной техникой продолжения стохастического интеграла [3, с. 72]) гильбертово пространство определяемое скалярным произведением

$$(f, g) \equiv \mathbf{E}_x \left(\int_0^{\sigma_G} \sum_{ij} f^i(t) g^j(t) \left(\frac{a^{ij}(X_t)}{\gamma(X_t)} \right) \, dt \right), \tag{12}$$

а также пополнение $\mathcal{L}_2$ пространства $\mathcal{L}_0$ относительно метрики, определяемой нормой $\|f\| = (f, f)^{1/2}$.

При этом для $f \in \mathcal{L}_0$ справедливо.

$$\|f\|^2 = \mathbf{E}_x \left(\int_0^{\sigma_G} (f(\tau))^* \, dM_\tau \right)^2 . \tag{13}$$

Действительно,

$$\mathbf{E}_x \left(\int_0^{\sigma_G} (f(\tau))^* \, dM_\tau \right)^2 = \sum_{ij} \mathbf{E}_x \left(\int_0^{\sigma_G} f^i(\tau) \, dM_\tau^i \right) \left(\int_0^{\sigma_G} f^j(\tau) \, dM_\tau^j \right) =$$

$$= \sum_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_x \left(\left(\sum_{k=1}^{n} f^i(\tau_{k-1}) \Delta M_k^i \right) \left(\sum_{l=1}^{n} f^j(\tau_{l-1}) \Delta M_l^j \right) ; \, N = n \right) =$$

$$= \sum_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{n} f^i(\tau_{k-1}) f^j(\tau_{k-1}) \Delta M_k^i \Delta M_k^j ; \, N = n \right) =$$

$$= \sum_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x \left(f^i(\tau_{k-1}) f^j(\tau_{k-1}) (M^i_{\tau'_k} M^j_{\tau'_k}) \circ \theta_{\tau_{k-1}};\ N \geqslant k \right),$$

где $\tau'_k \in \mathcal{T}^0$ – приращение марковского момента такое, что $\tau_k = \tau_{k-1} \dot{+} \tau'_k$. Согласно полумарковскому свойству последнее выражение равно

$$= \sum_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_x \left(f^i(\tau_{k-1}) f^j(\tau_{k-1}) \mu^{a^{ij}/\gamma}_{\tau'_k} \circ \theta_{\tau_{k-1}};\ N \geqslant k \right) =$$

$$= \sum_{ij} \mathbf{E}_x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f^i(\tau_{k-1}) f^j(\tau_{k-1}) S^{a^{ij}/\gamma}_{\tau'_k} \circ \theta_{\tau_{k-1}};\ N = n \right) =$$

$$= \sum_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_x \left(\int_0^{\sigma_G} f^i(t) f^j(t) \frac{a^{ij}(X_t)}{\gamma(X_t)}\, dt;\ N = n \right) =$$

$$= \mathbf{E}_x \left(\int_0^{\sigma_G} \sum_{ij} f^i(t) f^j(t) a^{ij}(X_t) \frac{1}{\gamma(X_t)}\, dt \right).$$

Продолжение стохастического интеграла на пространство $\mathcal{L}_2$, состоящее из пределов всех сходящихся в себе последовательностей из элементов класса $\mathcal{L}_0$ (в смысле скалярного произведения (12)), называется стохастическим интегралом (в смысле сходимости в средне квадратичном) по мартингалу (M_τ). При этом для любой функции $f \in \mathcal{L}_2$ справедлива формула (13).

Стохастический интеграл по полумарковскому процессу Стохастический интеграл по полумарковскому процессу диффузионного типа, который также можно назвать стохастическим интегралом по следу этого процесса, определяется естественным образом как сумма стохастического интеграла по мартингалу и криволинейного интеграла по аддитивному функционалу ограниченной вариации:

$$\int_0^{\sigma_G} (f(\tau))^*\, dX_\tau = \int_0^{\sigma_G} (f(\tau))^*\, dM_\tau + \int_0^{\sigma_G} (f(\tau))^* b(X_\tau) \frac{1}{\gamma(X_t)}\, d\mu_\tau. \quad (14)$$

4.4. Формула Ито–Дынкина.

Для вывода формулы Ито применим метод вписанных эллипсоидов. Его применение связано с использованием асимптотической формулы (3), в которой множитель $F(U_x^{-1}G(x))$ обращается в постоянную $F(U_x^{-1}B) \equiv 1/(2d)$ [6, с. 227]. Для каждой точки $x \in G$ рассмотрим последовательность вписанных эллипсоидов $E_u(x) = x + (r(x,G) \wedge u) U_x^{-1} B$ $(u > 0)$. Пусть $t_k = \sigma_{G,u}^k$ и $x_k = X_{\sigma_{G,u}^k}$. Обозначим

$$J_u \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_{k-1}) \Delta x_k^i \Delta x_k^j,$$

где $\Delta x_k^i = x_k^i - x_{k-1}^i$, ϕ – непрерывная функция. Имеем

$$\mathbf{E}_x(J_u) = \mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_{k-1}) \Delta x_k^i \Delta x_k^j \right) =$$

$$= \mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_{k-1}) \mathbf{E}_x(\Delta X_k^i \Delta X_k^j | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \right) =$$

$$= \mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_{k-1}) \mathbf{E}_{x_{k-1}}((X_{\sigma_{G,u}}^i - X_0^i)(X_{\sigma_{G,u}}^j - X_0^j)) \right) =$$

$$= \mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_{x_{k-1}}(S_{\sigma_{G,u}}^{\phi a^{ij}/\gamma})(1 + \epsilon(k,u)) \right) =$$

$$= \mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_{x_{k-1}}(S_{\sigma_{G,u}}^{\phi a^{ij}/\gamma}) \right) (1 + \epsilon(u)) =$$

$$= \mathbf{E}_x(S_{\sigma_G}^{\phi a^{ij}/\gamma})(1 + \epsilon(u)) =$$

$$= \mathbf{E}_x(\mu_{\sigma_G}^{\phi a^{ij}/\gamma})(1 + \epsilon(u)).$$

Отсюда

$$\mathbf{E}_x(J_u) \to \mathbf{E}_x(\mu_{\sigma_G}^{\phi a^{ij}/\gamma}) \quad (u \to 0).$$

Лемма 2. *При сделанных предположениях J_u сходится по вероятности к криволинейному интегралу*

$$J \equiv \int_0^{\sigma_G} \frac{\phi(X_\tau) a^{ij}(X_\tau)}{\gamma(X_\tau)} \, d\mu_\tau.$$

Доказательство. Обозначим $\Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma} = \mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma} - \mu_{t_{k-1}}^{\phi a^{ij}/\gamma}$. Имеем

$$\mathbf{E}_x(J_u - J)^2 = \mathbf{E}_x\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\phi(x_{k-1})\Delta x_k^i \Delta x_k^j - \Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma})\right)^2 =$$

$$= \mathbf{E}_x\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\phi(x_{k-1})\Delta x_k^i \Delta x_k^j - \Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma})^2 + \right.$$

$$\left. +2\sum_{k<l}(\phi(x_{k-1})\Delta x_k^i \Delta x_k^j - \Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma})(\phi(x_{l-1})\Delta x_l^i \Delta x_l^j - \Delta\mu_{t_l}^{\phi a^{ij}/\gamma})\right).$$

Второй член этой суммы равен

$$\mathbf{E}_x\left(2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty}(\phi(x_{k-1})\Delta x_k^i \Delta x_k^j - \Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma}) \times \right.$$

$$\left. \times(\phi(x_{l-1})\Delta x_l^i \Delta x_l^j - \Delta\mu_{t_l}^{\phi a^{ij}/\gamma})\right).$$

Пользуясь полумарковским свойством, получаем

$$= 2\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty}(\phi(x_{k-1})\Delta x_k^i \Delta x_k^j - \Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma}) \times \right.$$

$$\left. \times\mathbf{E}_x(\phi(x_{l-1})\Delta x_l^i \Delta x_l^j - \Delta\mu_{t_l}^{\phi a^{ij}/\gamma} \,|\, \mathcal{F}_{t_{l-1}})\right) =$$

$$= 2\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty}(\phi(x_{k-1})\Delta x_k^i \Delta x_k^j - \Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma}) \times \right.$$

$$\left. \times\mathbf{E}_{x_{l-1}}(\phi(X_0)(X_{\sigma_{G,u}}^i - X_0^i)(X_{\sigma_{G,u}}^j - X_0^j) - S_{\sigma_{G,u}}^{\phi a^{ij}/\gamma})\right) =$$

$$= 2\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty}(\phi(x_{k-1})\Delta x_k^i \Delta x_k^j - \Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma}) \times \right.$$

$$\left. \times\mathbf{E}_{x_{l-1}}(\phi(X_0)(X_{\sigma_{G,u}}^i - X_0^i)(X_{\sigma_{G,u}}^j - X_0^j) - \mu_{\sigma_{G,u}}^{\phi a^{ij}/\gamma})\right) =$$

$$= 2\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty}(\phi(x_{k-1})\Delta x_k^i \Delta x_k^j - \Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma})\mathbf{E}_{x_{l-1}}(\epsilon(u,l)\mu_{\sigma_{G,u}}^{\phi a^{ij}/\gamma})\right) =$$

$$= 2\epsilon(u)\mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\phi(x_{k-1})\Delta x_k^i \Delta x_k^j - \Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma})\mathbf{E}_{x_{l-1}}(\mu_{\sigma_G}^{\phi a^{ij}/\gamma})\right) =$$

$$= 2\epsilon(u)\mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\phi(x_{k-1})\Delta x_k^i \Delta x_k^j - \Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma})\mathbf{E}_{x_{l-1}}(S_{\sigma_G}^{\phi a^{ij}/\gamma})\right) \leqslant$$

$$2\epsilon(u)\sup_{x\in G}\mathbf{E}_x(S_{\sigma_G}^{\phi a^{ij}/\gamma})\mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{\infty}(|\phi(x_{k-1})|\cdot|\Delta x_k^i|\cdot|\Delta x_k^j| + \Delta\mu_{t_k}^{|\phi|\cdot|a^{ij}|/\gamma})\right)$$

Имеем

$$\mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\Delta\mu_{t_k}^{|\phi|\cdot|a^{ij}|/\gamma})\right) = \mathbf{E}_x\left(\mu_{\sigma_G}^{|\phi|\cdot|a^{ij}|/\gamma})\right) = \mathbf{E}_x\left(S_{\sigma_G}^{|\phi|\cdot|a^{ij}|/\gamma})\right)$$

равномерно ограничено. С другой стороны

$$\mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{\infty}(|\phi(x_{k-1})|\cdot|\Delta x_k^i|\cdot|\Delta x_k^j|)\right) \leqslant$$
$$C^2 \sup_{x\in G}|\phi(x)|\,\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=1}^{\infty}(r(x_{k-1},G)\wedge u)^2\right),$$

где C – верхняя грань отношения максимальной оси эллипсоида к минимальной по множеству G. Сумма в последнем выражении равна

$$\mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{\infty}(r(x_{k-1},G)\wedge u)^2\right) = d\cdot\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}_{x_{k-1}}(S_{\sigma_{G,u}}^{1/\gamma})(1+\epsilon(u,k))\right) =$$

$$= d\cdot\mathbf{E}_x\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}_{x_{k-1}}(S_{\sigma_{G,u}}^{1/\gamma})\right)(1+\epsilon(u)) = d\cdot\mathbf{E}_x(S_{\sigma_{G,u}}^{1/\gamma})(1+\epsilon(u)) < \infty$$

равномерно по $x \in G$. Итак, второй член суммы, представляющей $\mathbf{E}_x(J_u - J)^2$, стремится к нулю при $u \to 0$. Рассмотрим первый член. Имеем

$$= \mathbf{E}_x\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\phi(x_{k-1})\Delta x_k^i\Delta x_k^j - \Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma})^2\right) =$$

$$= \mathbf{E}_x \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\phi^2(x_{k-1}) \Delta^2 x_k^i \Delta^2 x_k^j - \right.$$

$$\left. 2\Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma} \phi(x_{k-1}) \Delta x_k^i \Delta x_k^j + \Delta^2 \mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma}) \right).$$

Сумма членов, содержащих $\Delta^2 x_k^i \Delta^2 x_k^j$, стремится к нулю, так как отношение $\mathbf{E}_x(\Delta^2 x_k^i \Delta^2 x_k^j)/\mathbf{E}_x(\sigma_{G,u})$ стремится к нулю благодаря свойству $A_0(g|\,x) = 0$, где $g(y) = (y^i - x^i)^2 (y^j - x^j)^2$. Сумма членов, содержащих $2\Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma} \phi(x_{k-1}) \Delta x_k^i \Delta x_k^j$ стремится к нулю благодаря оценке $|\Delta x_k^i \Delta x_k^j| \leqslant C^2$. Сумма членов, содержащих $(\Delta\mu_{t_k}^{\phi a^{ij}/\gamma})^2$, стремится к нулю благодаря свойству полумарковского процесса $\mathbf{E}_x(\mu_{G_r}^2)/\mathbf{E}_x(\mu_{G_r}) \to 0$ $(G_r \downarrow x)$. Лемма доказана. $\bullet$

Из доказанной леммы стандартным образом выводится вариант формулы Ито–Дынкина для стохастического интеграла по полумарковскому процессу, а именно: для дважды непрерывно дифференцируемой функции ϕ справедливо представление

$$\phi(X_{\sigma_G}) = \phi(X_0) + \int_0^{\sigma_G} \nabla\phi(X_\tau)^* \, dX_\tau +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \int_0^{\sigma_G} D_{ij} \phi(X_\tau) a^{ij}(X_\tau)/\gamma(X_\tau) \, d\mu_\tau. \quad (15)$$

В этом представлении первый интеграл является стохастическим интегралом по полумарковскому процессу, а второй – криволинейным интегралом по аддитивному функционалу.

В данной статье разобран случай конечного $\mathcal{F}^0$-измеримого аддитивного функционала μ_τ. Этот же метод применим к случаю бесконечности этого функционала, который предпологается рассмотреть в следующей работе на эту тему.

Литература

1. A. N. Borodin and P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion*. Facts and Formulae. Birkhäuser Verlag (1996).
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов, том II*. Наука, М. (1973).
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов, том III*. Наука, М. (1975).

4. Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы*. Физматгиз, М. (1963).
5. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Теория мартингалов*. Наука, М. (1986).
6. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы*. Наука, СПб. (2001).
7. Б. П. Харламов, *Абсолютная непрерывность мер в классе полумарковских процессов диффузионного типа*. — Зап. науч. семин. ПОМИ РАН, **294** (2002), 216–244.
8. Б. П. Харламов, *Характеристический оператор диффузионного процесса*. — Зап. науч. семин. ПОМИ РАН, **298** (2003), 226–251.

Harlamov B. P. Stochastic integral by a semi-Markov process of diffusion type.

A semi-Markov process of diffusion type on the space $\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 2)$ is considered. A stochastic integral by the semi-Markov process is defined in terms of asymptotics connected with the process first exit time from a small neighborhood of its initial point, and, in particular, that with its characteristic operator. This integral is equal to sum of two other integrals: the first one is a curvilinear integral by an additive functional defined in terms of the expected first exit time from the small neighborhood, and the second one is a stochastic integral by a martingale of a special kind. To prove the existence and to derive properties of the integral both the method of deducing sequences and that of refined ellipsoids are used. For Markov processes of diffusion type the new definition of the stochastic integral is reduced to the standard one.

Институт проблем машиноведения РАН
Поступило 2 декабря 2005 г.