Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 329, 2005 г.

Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов, С. Г. Малев

ЗАМЕЧАНИЯ О ЧЕБЫШЕВСКИХ КООРДИНАТАХ

Под *поверхностью* всюду, если не оговорено противное, мы имеем в виду двумерное риманово многообразие. Как известно, система координат на поверхности M называется *чебышевской*, если первая основная форма поверхности имеет в этих координатах вид

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta(u,v)dudv + dv^2.$$

Иными словами, все координатные линии параметризованы длиной дуги, а $\theta(u,v)$ – угол между координатными линиями.

Формула Хацидакиса (см., например, [6, с. 413]) показывает, что на полной односвязной поверхности, для которой $|\iint KdS| > 2\pi$, единые чебышевские координаты могут не существовать. Здесь K – гауссова кривизна, а S – площадь.

Нас будут интересовать условия, при которых такие координаты заведомо существуют. Наряду с римановыми 2-многообразиями мы будем рассматривать более общий класс *поверхностей Александрова* (называемых также двумерные многообразия ограниченной кривизны. Этот класс включает в себя как 2-многообразия с римановыми или полиэдральными метриками, так и их равномерные пределы при условии равномерной ограниченности кривизны и сохранения структуры многообразия, подробнее см. [1] или [8].

П. Л. Чебышевым было доказано существование локальных чебышевских координат в традиционном в то время предположении аналитичности. Первый нелокальный результат принадлежит И. Я. Бакельману [2], который доказал, что на поверхности Александрова можно построить единую чебышевскую сеть во всем секторе между двумя ортогональными геодезическими, если только положительная и отрицательная части интегральной кривизны этого сектора обе меньше $\pi/2$. Нетрудно видеть, что для сектора этот результат неулучшаем.

Исследования первых двух авторов частично поддержаны грантом РФФИ 05-01-00939 и грантом НШ-1914.2003.1.

Много позже сходный результат, но только в случае C^∞-гладких римановых многообразий, получили С. Самелсон и В. Даяванза [9]: при тех же условиях на кривизну они доказали существование единой чебышевской сети на полной односвязной C^∞-гладкой поверхности. Их доказательство в основной своей части – аналитическое. Как известно, вопрос о локальном существовании чебышевских координат сводится к решению определенной гиперболической квазилинейной системы уравнений второго порядка; в [9] эта система решена методом работы [7].

Мы покажем, что из результата Бакельмана следует такая теорема.

Теорема 1. *Пусть M – полная односвязная поверхность Александрова, удовлетворяющая условиям $\omega^+(M) < 2\pi$, $\omega^-(M) < 2\pi$. Тогда на M существует единая чебышевская система координат.*

Если же $\omega^+(M) < 2\pi - \epsilon$, $\omega^-(M) < 2\pi - \epsilon$, где $\epsilon > 0$, то существует такая чебышевская сеть, что углы между координатными линиями равномерно отделены от 0 и π (например, числом $\epsilon/4$).

Здесь ω^+ и ω^- – положительная и отрицательная кривизны поверхности M, рассматриваемые как меры; в случае римановой метрики

$$\omega^+(M) = \iint\limits_M K^+ dS, \quad \omega^-(M) = \iint\limits_M K^- dS,$$

где $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a^- = \max\{-a, 0\}$.

Как было отмечено, условия теоремы являются неулучшаемыми.

Для доказательства было бы достаточно разбить M двумя пересекающимися геодезическими на четыре сектора так, чтобы для каждого из них выполнялись условия теоремы Бакельмана. Однако такое разбиение не всегда возможно, и конструкцию приходится несколько усложнить.

На самом деле рассуждения Бакельмана доказывают несколько более общее утверждение, чем было упомянуто выше. Именно, рассмотрим на полной односвязной неограниченной поверхности Александрова сектор Q, ограниченной кривыми γ_1, γ_2 с общим началом $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ в вершине сектора. Обозначим через τ поворот с внутренней стороны границы сектора Q, за вычетом его вершины. Поворот рассматривается как функция множества (заряд); через τ^+, τ^- обозначим положительную и отрицательную части заряда τ. (В случае гладкой кривой $\gamma\colon(0,a)\to M$ на римановом 2-многообразии M $\tau^\pm(E)=\int_E k_g^\pm\,ds$, где k_g – геодезическая кривизна со стороны Q, а интегрирование (по длине дуги) ведется по множеству $E\subset(0,a)$.) Наконец, положим

$$\widetilde{\omega}^\pm(M)=\omega^\pm(M)+\tau^\pm(\gamma_1)+\tau^\pm(\gamma_2).$$

Теорема 2 (И. Я. Бакельман). *Если для сектора Q выполнены условия:*

$$\widetilde{\omega}^+(Q)<\alpha,\quad \widetilde{\omega}^-(Q)<\pi-\alpha,$$

где α – угол сектора Q в его вершине p, то в Q существует такая глобальная чебышевская система координат, при которой кривые γ_1, γ_2 являются координатными линиями.

При этом сетевые углы отделены от 0 и π минимумом величин $\alpha-\widetilde{\omega}^+(Q)$ и $\pi-\alpha-\widetilde{\omega}^-(Q)$.

Ясно, что для доказательства теоремы 1 достаточно разбить M на четыре сектора, удовлетворяющие условиям теоремы 2. Такое разбиение достаточно осуществить только в случае римановой или полиэдральной метрики, так как после этого общий случай получается стандартным предельным переходом.

Возможность такого разбиения обеспечивается следствием из доказываемой теоремы 3.

Проблема существования чебышевских координат тесно связана с вопросом об условиях, при которых между двумя поверхностями существуют билипшицевы отображения с контролируемыми константами Липшица, см. [3, 5]. Грубо говоря, постоянная Липшица оценивается через сетевые углы, т. е. через $\min\{\inf\theta, \inf(\pi-\theta)\}$.

Хотя при $\omega^-(M)>2\pi$ поверхность M может не допускать чебышевских координат, на ней все же можно ввести “чебышевские координаты с ветвлением” в конечном числе точек, и такие обобщенные координаты обеспечивают билипшицево отображение на плоскость с контролируемой постоянной Липшица. Например, для поверхностей, гомеоморфных плоскости, М. Бонк и У. Ланг [4] доказали, что при условии

$$\omega^+(M)<2\pi-\epsilon<2\pi,\ \omega^-(M)<C<\infty$$

поверхность M билипшицево эквивалентна плоскости с константой Липшица $\epsilon^{-1/2}(2\pi + C)^{1/2}$. Из существования "чебышевских координаты с ветвлениями" немедленно следует ослабленная (т. е. с худшей постоянной) теорема Бонка–Ланга.

Доказательство существования чебышевских координат с ветвлениями несущественно отличается от построений Бакельмана; не описывая его конструкцию в деталях, упомянем только, что сеть строится сначала на поверхности с полиэдральной метрикой; общий случай получается предельным переходом. В условиях теоремы 2 сектор с полиэдральной метрикой можно разбить на плоские параллелограммы, прилегающие по целым сторонам и образующие решетку из строк и столбцов. Для построения координат каждый параллелограмм заменяется прямоугольным параллелограммом на $\mathbb{R}^2$ со сторонами той же длины, так что новые параллелограммы замощают сектор в евклидовой плоскости. В случае слишком большой отрицательной кривизны разбить сектор на параллелограммы, образующие решетку, может оказаться невозможно. Однако можно изменить конструкцию, допустив примыкание более, чем четырех параллелограммов к некоторым вершинам в секторе (таких вершин будет конечное число) и отображая часть параллелограммов на уже не обязательно прямоугольные параллелограммы евклидовой плоскости.

Пусть M – полное односвязное риманово 2-многообразие. Назовем *крестом* фигуру на M, образованную тремя такими простыми натурально параметризованными геодезическими γ_i, что

(i) $\gamma_1 : (-\infty, \infty) \to M$, $\gamma_i : (0, \infty) \to M$ при $i = 2, 3$;

(ii) γ_1 разбивает M на две области (полуплоскости);

(iii) γ_2 и γ_3 начинаются на γ_1 и проходят в разных полуплоскостях относительно γ_1, разбивая каждую полуплоскость на два сектора.

Тем самым эти геодезические разбивают M на четыре сектора Q_i. Обозначим через α_i угол сектора Q_i в его вершине O_i.

Аналогичную фигуру, но образованную квазигеодезическими на поверхности Александрова, будем называть *обобщенным крестом*.

Теорема 3. *Пусть M – полное двумерное риманово многообразие,* *гомеоморфное плоскости и удовлетворяющее условиям*

$$\omega^+ < 2\pi - 4\epsilon, \quad \omega^- < 2\pi - 4\epsilon \tag{1}$$

для некоторого $\epsilon > 0$. Тогда на M существует такой крест, что при всех $i = 1, 2, 3, 4$

$$\omega^+(Q_i) \leq \alpha_i - \epsilon, \; \omega^-(Q_i) \leq \pi - \alpha_i - \epsilon$$

и при этом для любых двух точек $\gamma_i(t)$, $\gamma_i(t')$, $i = 1, 2, 3$, выполняется

$$|t - t'| \sin \epsilon \leq d_M(\gamma_i(t), \gamma_i(t')). \tag{2}$$

Аппроксимируя поверхность Александрова римановыми многообразиями, мы немедленно получаем такое следствие.

Следствие 1. *Пусть полная гомеоморфная плоскости поверхность Александрова M удовлетворяет условию (1). Тогда на M существует обобщенный крест, обладающий теми же свойствами, что и крест в теореме 3, но с заменой $\omega^\pm$ на $\widetilde{\omega}^\pm$, соответственно.*

В свою очередь, из этого следствия и теоремы 2 немедленно вытекает теорема 1.

Замечание. Теорема 1 не утверждает, что в случае достаточно гладкой римановой метрики построенные чебышевские координаты также будут гладкими. Использование аналитического метода Самелсон и Даяванза [9] вместо конструкции Бакельмана позволяет гарантировать гладкость координатной сети в каждом секторе, но на границе секторов координатные линии могут иметь изломы. Вопрос о существовании всюду гладкой чебышевской сети остается пока открытым.

Доказательство теоремы 3 следует тому же плану, что и доказательство предложения 6.1 работы Бонка–Ланга [4].

Доказательство теоремы 3.

Шаг 1. Согласно только что упомянутому предложению 6.1 из работы [4], существует геодезическая γ_1, удовлетворяющая неравенству (2) и разбивающая M на две полуплоскости M_1 и M_2, несущие равные порции положительной и отрицательной кривизн. Таким образом, для каждой полуплоскости имеем

$$\omega^+(M_k) < \pi - 2\epsilon, \quad \omega^-(M_k) < \pi - 2\epsilon. \tag{3}$$

Рассмотрим для определенности M_1. Нам надо найти в M_1 геодезическую с началом на γ_1, разбивающую M_1 на два сектора в соответствии с утверждением теоремы. Сразу отметим, что неравенство (2) следует непосредственно из первого неравенства (3) и известного неравенства между дугой и хордой, см. [1, гл. IX, §2].

Как и в [4], можно считать, что наша метрика – плоская вне некоторого компакта $\widetilde{D} \subset \int M_1$, причем этот компакт гомеоморфен замкнутому диску, ограничен гладкой кривой, тотально выпуклый и не пересекается с γ_1. Кроме того, можно предполагать, что полуплоскость M_1 также тотально выпукла; для этого достаточно, например, отрезать M_2 от M_1 и подклеить к M_1 евклидову полуплоскость вместо M_2.

Шаг 2. Обозначим через $S\widetilde{D}$ расслоение единичных окружностей над $\widetilde{D}$. (В наших условиях это – просто прямое произведение $\widetilde{D}$ на окружность S^1.) Зададим следующее отображение σ из $S\widetilde{D}$ в множество (максимально продолженных) геодезических поверхности M_1. Если $v = (p, \theta) \in S\widetilde{D}$, то $\sigma(v)$ – геодезическая, проходящая через точку p ортогонально к v, причем ориентированная так, что ее вектор скорости в точке p и вектор v определяют положительную ориентацию M_1.

В силу теоремы Гаусса–Бонне и наших условий геодезическая $\sigma(v)$ не имеет самопересечений и разбивает M_1 на две области, из которых одна может быть ограниченной. Обозначим через $U(v)$ ту из областей, в которую направлен вектор v. Теперь введем на $S\widetilde{D}$ угловую функцию $\alpha(v)$ следующим образом:

если $U(v)$ – полоса, то $\alpha(v) = 0$;

если $U(v)$ – полуплоскость, ограниченная только геодезической $\sigma(v)$, то $\alpha(v) = \pi$;

если $U(v)$ – сектор, то $\alpha(v)$ – угол этого сектора;

если $U(v)$ – двуугольная область и оба угла этой области α_1 и α_2 – острые, то

$$\alpha(v) = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2};$$

если же один из углов (например, α_1) двуугольника не острый, то полагаем

$$\alpha(v) = \frac{\pi^2/4 + \alpha_2^2}{\pi/2 + \alpha_2} + \alpha_1 - \frac{\pi}{2};$$

наконец, если $U(v)$ – дополнение M_1 до двуугольника, то $\alpha(v) = \pi - \alpha(-v)$. Таким образом, мы определили угловую функцию α на всем $S\widetilde{D}$. Сразу заметим, что в силу теоремы Гаусса–Бонне не острым может быть не более, чем один угол двуугольника.

Нетрудно проверить, что функция α непрерывна и обладает свойством

$$\alpha(v) + \alpha(-v) = \pi.$$

Нормируем меры ω^+ и ω^-, введя две новые меры:

$$W^{\pm}(A) = (\pi - 2\epsilon)\frac{\omega^{\pm}(A)}{\omega^{\pm}(\widetilde{D})}.$$

Рассмотрим отображение $\phi : S\widetilde{D} \to \mathbb{R}^2$, которое вектору $v \in S\widetilde{D}$ ставит в соответствие точку

$$\phi(v) = (W^+(U(v)) - \alpha + \epsilon,\, W^-(U(v)) - (\pi - \alpha) + \epsilon).$$

Заметим, что $\phi(-v) = -\phi(v)$, в частности, если $\phi(v) = (0,0)$, то также $\phi(-v) = (0,0)$.

Утверждение. *Найдется такой вектор v_0, что $\phi(v_0) = (0,0)$.*

Доказательство. Зафиксируем любую точку O границы диска $\widetilde{D}$. Выберем в пространстве $S\widetilde{D}$ две петли, γ_1 и γ_2, с вершиной O. Петля γ_1 представляет собой вращение вектора v вокруг точки O, начиная с вектора, перпендикулярного к границе $\widetilde{S}$ диска $\widetilde{D}$ и направленного внутрь этого диска. Петля γ_2 получена обходом $\widetilde{S}$ (начиная с точки O) при условии, что в каждой точке берется вектор v, перпендикулярный к $\widetilde{S}$ и направленный внутрь $\widetilde{D}$.

Эти петли очевидно гомотопны. Действительно, достаточно рассмотреть такой диффеоморфизм g диска $\widetilde{D}$ на евклидов единичный круг D, что dg конформно на границе $\widetilde{D}$, и, считая $O' = g(O)$ нуль-вектором, взять dg-прообразы семейства окружностей $t\,\partial D$, $0 \le t \le 1$, вместе с полями их нормалей, направленных внутрь.

Отображение ϕ переводит петли γ_1, γ_2 в петли пространства $\mathrm{Im}\,\phi$; значит, последние гомотопны между собой в $\mathrm{Im}\,\phi$.

Так как образ петли γ_2 лежит на прямой $x + y = \pi - 2\epsilon$, то он стягиваем в $\mathrm{Im}\,\phi$.

В то же время, по выбору угловой функции α, петля γ_1 обладает свойством $\phi(v) + \phi(-v) = (0,0)$. Отсюда следует, что индекс точки $(0,0)$ относительно петли γ_1 не равен нулю, и тем самым, она не стягиваема в $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, а тем более в $\operatorname{Im}\phi$. Действительно, угол, на который поворачивается вектор с началом $(0,0)$ при прохождении петли γ_1, есть сумма двух равных друг другу углов вида $(2k+1)\pi$.

Таким образом, если нуль-вектор плоскости не лежит в $\operatorname{Im}\phi$ (как мы предположили), то петля γ_1 не стягиваема, а γ_2 – стягиваема. Это противоречит тому, что петли гомотопны.

Итак, найдется вектор v единичного расслоения, для которого $\phi(v) = (0,0)$. Иными словами, мы имеем

$$W^+(U(v)) = \alpha - \epsilon, \quad W^-(U(v) = \pi - \alpha - \epsilon.$$

Докажем, что в этом случае $U(v)$ – непременно сектор.

Во-первых, очевидно, что $\epsilon \leq \alpha \leq \pi - \epsilon$, и, значит, $U(v)$ – не полоса и не полуплоскость.

Теперь предположим, что $U(v)$ – двуугольник с углами α_1 и α_2. Можно считать, что $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Положим $\alpha(v) = \alpha_0$. Из определения угловой функции α ясно, что $\alpha_0 \leq \alpha_1$.

По теореме Гаусса–Бонне

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \omega^+(U(v)) - \omega^-(U(v)).$$

Таким образом

$$\alpha_1 + \alpha_2 \leq \omega^+(U(v)) \leq \alpha_0 - \epsilon \leq \alpha_1 - \epsilon < \alpha_1 + \alpha_2,$$

что невозможно.

Если же мы предположим, что $U(v)$ – дополнение к двуугольнику, то тогда, как было отмечено выше, $\phi(-v) = -\phi(v) = (0,0)$, что, как только что доказано, невозможно для двуугольника $U(-v)$.

Значит, мы получили разбиение полуплоскости на два сектора с углами, удовлетворяющими нашим условиям. Теорема 3 доказана. □

Литература

1. А. Д. Александров, В. А. Залгаллер, *Двумерные многообразия ограниченной кривизны.* — Труды МИАН **63** (1962).
2. И. Я. Бакельман, *Чебышевские сети на многообразиях ограниченной кривизны.* — Труды МИАН **76** (1965), 124–129.

3. А. Беленький, Ю. Бураго, *Билипшицево эквивалентные поверхности Александрова.* — Алгебра и анализ **16**, No. 4 (2004), 24–40.
4. M. Bonk and U. Lang, *Bi-Lipschitz parametrization of surfaces.* — Math. Ann. **327** (2003), 135–169.
5. Ю. Бураго, *Билипшицево эквивалентные поверхности Александрова* II. — Алгебра и анализ **16**, No. 6 (2004), 28–52.
6. И. Я. Бакельман, А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор, *Введение в дифференциальную геометрию "в целом"*. Наука (1973).
7. О. А. Ладыженская, В. И. Шубов, *Об однозначной разрешимости задачи Коши для уравнений двумерных релятивистских киральных полей, принимающих значения на полных римановых многообразиях.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **110** (1981), 81–94.
8. Ю. Г. Решетняк, *Двумерные многообразия ограниченной кривизны*, в кн.: "Нерегулярная риманова геометрия", сер. "Соврем. проблемы математики. Фундам. направления", т. 70 (Геометрия IV), М. (1989), 7–189.
9. S. L. Samelson and W. P. Dayawansa, *On the existence of global Tchebyshev nets.* — Transactions Amer. Math. Soc., **347**, (1995), 651–660.

Burago Yu. D., Ivanov S. V., and Malev S. G. Remarks on Chebyshev coordinates.

Some results on the existence of global Chebyshev coordinates on complete Riemannian manifolds or, more generally, on Aleksandrov surfaces are proved. For instance, if both the positive part and the negative part of the integral curvature are less than 2π, then there exist global Chebyshev coordinates on M. Such coordinates help one to get bi-Lipschitz maps between surfaces.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: burago@pdmi.ras.ru

Поступило 20 декабря 2005 г.

С.-Петербургский
государственный университет

E-mail: sergey-malev@nwgsm.ru