Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 329, 2005 г.

С. Е. Козлов

ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ СОВМЕСТИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ НАПРАВЛЕНИЙ В РИМАНОВЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В настоящей заметке будет сформулирован и доказан один факт, полезный при изучении плюккеровых вложений грассманианов.

1. Пусть M – глобально-симметрическое риманово многообразие, и пусть $\Phi \subset M$ – двумерная вполне-геодезическая поверхность в M. Любая трансвекция многообразия M вдоль геодезической на поверхности Φ совмещает поверхность Φ саму с собой. Поэтому гауссова кривизна K поверхности Φ постоянна. Мы рассматриваем случай, когда $K > 0$. В этом случае поверхность Φ локально изометрична сфере, а "экваториальная" окружность на этой поверхности с центром в точке $\bar{p} \in \Phi$ и радиусом $r := \pi/(2\sqrt{K})$ является геодезической, ортогональной всем меридиональным геодезическим, исходящим из $\bar{p}$.

Утверждение 1. *Пусть $X, Y \in T_p$, $\Phi \subset T_pM$, $|X| = |Y| = 1$. Тогда векторы X, Y можно совместить изометрией в M, т.е. существует изометрия $\varphi \colon M \to M$ такая, что $\varphi(p) = p$ и $d\varphi(X) = Y$.*

Доказательство. Рассмотрим кусочно-геодезический треугольник с вершинами p, $\exp_p rX$, $\exp_p rY$. Параллельный перенос вдоль этого треугольника переводит вектор X в Y. Так как этот перенос можно осуществить произведением φ трех трансвекций в M вдоль геодезических сторон треугольника, то описанное совмещение φ является изометрией в M. $\bullet$

Ясно, что изложенное доказательство легко модифицируется на случай $K < 0$.

2. Если многообразие $M \subset \Lambda_p(\mathbb{R}^n)$ является образом грассманиана $G^+_{p,n}$ при плюккеровом вложении во внешнюю алгебру $\Lambda(\mathbb{R}^n)$, см. [1], то из утверждения 1 непосредственно следует

Работа частично поддержана грантом НШ-1914.2003.1.

Утверждение 2. *В условиях утверждения* 1 *существует ортогональное преобразование* $\psi \in SO(\mathbb{R}^n)$, *переводящее* X *в* Y. $\bullet$

Литература

1. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 84–107.

Kozlov S. E. Isometric equivalence of directions in Riemannian symmetric spaces.

It is proved that there exists an isometry of the real Graccmann manifold that puts into coincidence two one-dimensional tangent directions of a totally geodesic 2-surface with nonzero Gauss curvature.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: vinograd@math.spbu.ru

Поступило 1 марта 2005 г.