Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 329, 2005 г.

В. В. Макеев

О ДИАМЕТРЕ ПРОСТРАНСТВА ПЛОСКИХ ВЫПУКЛЫХ ФИГУР ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОЙ АФФИННО–ИНВАРИАНТНОЙ МЕТРИКИ

§1. Введение

Во всем дальнейшем *выпуклой фигурой* будем называть выпуклое компактное подмножество плоскости с непустой внутренностью. $S(K)$ обозначает площадь фигуры $K \subset \mathbb{R}^2$, а αK для $\alpha \in \mathbb{R}$ обозначает образ фигуры K при гомотетии с коэффициентом α.

Обозначим пространство всех плоских выпуклых фигур через $\mathfrak{F}$.

Насколько могут различаться две плоские выпуклые фигуры с точностью до аффинного преобразования? Точная формулировка задачи состоит в вычислении диаметра пространства $\mathfrak{F}$ относительно некоторой аффинно-инвариантной (псевдо)метрики. В литературе определены и изучались различные такие метрики (см. [1]). В данной работе мы оцениваем $\operatorname{diam}\mathfrak{F}$ в одной из наиболее известных аффинно-инвариантных метрик.

Пусть $K_1, K_2 \in \mathfrak{F}$ – две выпуклые фигуры. Следуя [1], положим

$$\delta(K_1, K_2) = \inf\{\alpha > 0 \mid \exists T\colon K_1 \subset T(K_2) \subset \alpha K_1\},$$

где T – аффинное преобразование плоскости. Тогда

$$d(K_1, K_2) = \ln \delta(K_1, K_2)$$

является аффинно-инвариантной метрикой в пространстве $\mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Диаметр пространства плоских выпуклых фигур относительно метрики d не превосходит* $\ln 2,7 \approx 0,9932518$.

Оставшаяся часть работа посвящена доказательству.

Работа частично поддержана грантом НШ-1914.2003.1.

§2. Обозначения. Предварительные замечания

Доказательство теоремы 1 состоит в оценивании расстояния между фигурами различного типа в метрике d или δ. Мы будем доказывать неравенство $\delta(K_1, K_2) \leqslant 2,7$.

Как и в [2], мы используем теорему Безиковича о том, что во всякую выпуклую фигуру можно вписать аффинный образ правильного шестиугольника. Подвергнув выпуклые фигуры K_1 и K_2 аффинному преобразованию, будем считать, что обе они описаны вокруг некоторого фиксированного правильного шестиугольника H с центром O.

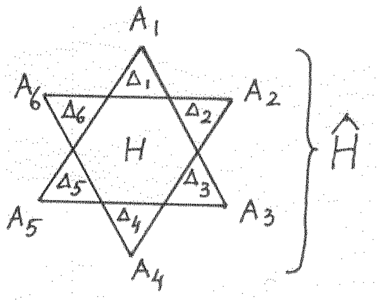

Рис. 1.

Тогда K_1 и K_2 содержатся в фигуре $\widehat{H}$, ограниченной продолжениями сторон шестиугольника H (рис. 1). Она получается добавлением к H шести равных правильных треугольников, которые мы обозначаем буквами $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$. Буквами $A_1, \ldots, A_6$ будем обозначать вершины этих треугольников, не принадлежащие H.

Всюду в дальнейшем под $\alpha\Delta_i$ понимаем образ треугольника Δ_i при гомотетии с центром A_i. Положим $\widehat{\Delta}_i = \frac{1}{2}\Delta_i$, $i = 1, \ldots, 6$ (рис. 2).

Замечание 1. Очевидно, что опорная прямая к шестиугольнику H, проведенная через его вершину, может иметь общие точки с внутренностью не более чем одного из треугольников $\widehat{\Delta}_1, \ldots, \widehat{\Delta}_6$. Поэтому при $i = 1, 2$ фигура K_i не может одновременно иметь общие внутренние точки с двумя соседними треугольниками из числа $\widehat{\Delta}_1, \ldots, \widehat{\Delta}_6$:

$$K_i \cap \widehat{\Delta}_j \neq \varnothing \implies K_i \cap \widehat{\Delta}_{j\pm 1} = \varnothing. \qquad (\dagger)$$

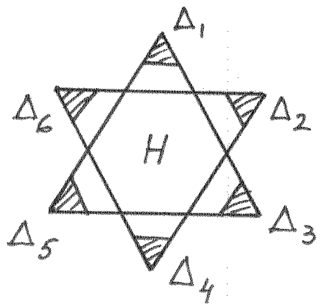

Рис. 2.

(Сумма и разность берутся по модулю 6: $1-1=6$, $6+1=1$.)

Повернув каждую из фигур K_i вокруг O на подходящий угол (кратный $\pi/3$), добьемся того, чтобы каждая из них имела общие внутренние точки лишь с одним из следующих 5 наборов треугольников:

$$(\widehat{\Delta}_1, \widehat{\Delta}_3, \widehat{\Delta}_5), \quad (\widehat{\Delta}_1, \widehat{\Delta}_3), \quad (\widehat{\Delta}_1, \widehat{\Delta}_4), \quad (\widehat{\Delta}_1), \quad (\varnothing).$$

Соответствующий набор будем называть *типом* фигуры K_i. Множество фигур данного типа обозначим через

$$\mathcal{T}_{135},\ \mathcal{T}_{13},\ \mathcal{T}_{14},\ \mathcal{T}_1,\ \mathcal{T}_\varnothing,$$

соответственно.

Для $i=1,\dots,6$ обозначим через $\overline{\Delta}_i$ равнобедренный треугольник, имеющий две общие вершины с шестиугольником H и треугольником Δ_i, а третью вершину – в центре треугольника Δ_i (рис. 3).

Замечание 2. Очевидно, что если фигура K_i пересекает треугольник $\widehat{\Delta}_i$, то K_i содержит треугольник $\overline{\Delta}_i$:

$$K_i \cap \widehat{\Delta}_j \neq \varnothing \implies \overline{\Delta}_j \subset K_i. \qquad (*)$$

Замечание 3. Также очевидно, что

$$K_i \cap \widehat{\Delta}_{j-1} \neq \varnothing \neq K_i \cap \widehat{\Delta}_{j+1} \implies K_i \cap \Delta_j \subset \overline{\Delta}_j. \qquad (**)$$

Через αK_i обозначаем образ фигуры K_i при гомотетии с центром в центре шестиугольника H.

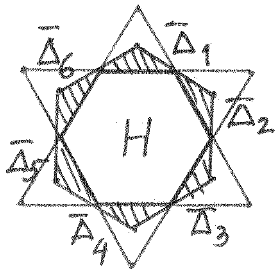

Рис. 3.

§3. Случай одинакового типа

Лемма 1. *Пусть K_2 имеет общие внутренние точки лишь с теми из треугольников $\widehat{\Delta}_1, \dots, \widehat{\Delta}_6$, с которыми имеет общие внутренние точки фигура K_1. Тогда $K_2 \subset \frac{3}{2}K_1$.*

Доказательство. Очевидно, что $\frac{3}{2}H$, и тем более $\frac{3}{2}K_1$ содержат все трапеции $\Delta_i \setminus \widehat{\Delta}_i$, $i = 1, \dots, 6$. Поэтому если K_2 не имеет общих внутренних точек с $\widehat{\Delta}_i$, то

$$K_2 \cap \Delta_i \subset \Delta_i \setminus \widehat{\Delta}_i \subset \frac{3}{2}H \subset \frac{3}{2}K_1.$$

В противном случае K_2, а значит, и K_1 имеют общие точки с $\widehat{\Delta}_i$, и, с учетом замечания 2, снова $K_2 \cap \Delta_i \subset \Delta_i \subset \frac{3}{2}K_1$. Отсюда очевидно следует требуемое:

$$K_2 = K_2 \cap \widehat{H} = H \cup \bigcup_{i=1}^{6}(K_2 \cap \Delta_i) \subset \frac{3}{2}K_1. \quad \bullet$$

Следствие. *Если фигуры K_1 и K_2 имеют одинаковый тип, то $K_1 \subset \frac{3}{2}K_2$ и $K_2 \subset \frac{3}{2}K_1$. В частности, $\delta(K_1, K_2) \leqslant (3/2)^2 = 2,25 < 2,7$.* $\bullet$

Замечание. Мы пользуемся леммой 1 в следующем параграфе (леммы 2–5), в случаях, когда $K_1 \in \mathcal{T}_{135}$, $K_2 \in \mathcal{T}_{13} \cup \mathcal{T}_1$ и когда $K_1 \in \mathcal{T}_{13} \cup \mathcal{T}_{14}$, $K_2 \in \mathcal{T}_1$.

§3. Случай $K_2 \in \mathcal{T}_1$

Лемма 2. *Пусть $K_1 \in \mathcal{T}_{135}$ и $K_2 \in \mathcal{T}_{13}$. Тогда $\delta(K_1, K_2) \leqslant 18/7 = 2,57\ldots < 2,7$.*

Доказательство. В силу (**) имеем

$$K_1 \subset \widetilde{H} = H \cup \Delta_1 \cup \overline{\Delta}_2 \cup \Delta_3 \cup \overline{\Delta}_4 \cup \Delta_5 \cup \overline{\Delta}_6.$$

Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{c} = \frac{1}{4}\overline{A_5A_2}$. Тогда имеем

$$\frac{7}{12}K_1 + \frac{1}{6}\mathbf{c} \subset \frac{7}{12}\widetilde{H} + \frac{1}{6}\mathbf{c} \overset{(1)}{\subset} H \cup \overline{\Delta}_1 \cup \overline{\Delta}_3 \overset{(*)}{\subset} K_2 \overset{(2)}{\subset} \frac{3}{2}K_1,$$

где включение (1) следует из простых вычислений, а включение (2) – из леммы 1. Отсюда ясно, что $\delta(K_1, K_2) \leqslant 3/2 : 7/12 = 18/7$. $\bullet$

Лемма 3. *Пусть* $K_1 \in \mathcal{T}_{135}$ *и* $K_2 \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_{13}$. *Тогда* $\delta(K_1, K_2) \leqslant 2,7$.

Доказательство. Как и выше, $K_1 \subset \widetilde{H}$. Введем вектор

$$\mathbf{a} = \frac{1}{4}\overline{A_4A_1}.$$

Тогда имеем

$$\frac{5}{9}K_1 + \frac{2}{9}\mathbf{a} \subset \frac{5}{9}\widetilde{H} + \frac{2}{9}\mathbf{a} \overset{(1)}{\subset} H \cup \overline{\Delta}_1 \overset{(*)}{\subset} K_2 \overset{(2)}{\subset} \frac{3}{2}K_1,$$

где включение (1) следует из простых вычислений, а включение (2) – из леммы 1. Отсюда ясно, что $\delta(K_1, K_2) \leqslant 3/2 : 5/9 = 2,7$. $\bullet$

Лемма 4. *Пусть* $K_1 \in \mathcal{T}_{13}$ *и* $K_2 \in \mathcal{T}_1$. *Тогда* $\delta(K_1, K_2) \leqslant 21/8 = 2,625 < 2,7$.

Доказательство. По замечаниям 2 и 1 имеем

$$K_1 \subset H' = H \cup (\Delta_1 \cup \overline{\Delta}_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4 \cup \Delta_5 \cup \Delta_6) \setminus (\widehat{\Delta}_4 \cup \widehat{\Delta}_5 \cup \widehat{\Delta}_6).$$

Введем вектор

$$\mathbf{b} = \frac{1}{21}\overline{A_3A_1}.$$

Тогда

$$\frac{4}{7}K_1 + \mathbf{b} \subset \frac{4}{7}H' + \mathbf{b} \overset{(1)}{\subset} H \cup \overline{\Delta}_1 \overset{(*)}{\subset} K_2 \overset{(2)}{\subset} \frac{3}{2}K_1,$$

где включение (1) следует из несложных вычислений, а включение (2) – из леммы 1. Отсюда ясно, что $\delta(K_1, K_2) \leqslant 3/2 : 4/7 = 21/8$. $\bullet$

Лемма 5. *Пусть* $K_1 \in \mathcal{T}_{14}$ *и* $K_2 \in \mathcal{T}_1$. *Тогда* $\delta(K_1, K_2) \leqslant 18/7 = 2,57\ldots < 2,7$.

Доказательство. По замечанию 1 имеем

$$K_1 \subset H_2' = \widehat{H} \setminus (\widehat{\Delta}_2 \cup \widehat{\Delta}_3 \cup \widehat{\Delta}_5 \cup \widehat{\Delta}_6).$$

Тогда

$$\frac{7}{12}K_1 + \frac{1}{6}\mathbf{a} \subset \frac{7}{12}H_2' + \frac{1}{6}\mathbf{a} \overset{(1)}{\subset} H \cup \overline{\Delta}_1 \overset{(*)}{\subset} K_2 \overset{(2)}{\subset} \frac{3}{2}K_1.$$

где включение (1) следует из несложных вычислений, а включение (2) – из леммы 1. Отсюда ясно, что $\delta(K_1, K_2) \leqslant 3/2 : 7/12 = 18/7$. $\square$

§4. Случай $K_2 \in \mathcal{T}_\varnothing$

Лемма 6. *Пусть* $K_2 \in \mathcal{T}_\varnothing$. *Тогда* $\delta(K_1, K_2) \leqslant 2,7$.

Доказательство. Положим

$$\alpha = \inf\{a > 0 \mid K_2 \subset (1 + a)H\}.$$

По условию $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$. Пусть пересечение границы $(1+\alpha)H$ с фигурой K_2 содержится в треугольнике Δ_1. Простые вычисления показывают, что K_2 содержит равнобедренный треугольник T_1, имеющий общее основание с Δ_1 и высоту, равную $a/(2-a)$ части высоты треугольника Δ_1.

Мы считаем, что $K_1 \notin \mathcal{T}_\varnothing$, иначе $\delta(K_1, K_2) \leqslant 9/4$ по лемме 1. После поворота можно считать, что K_1 задевает треугольник $\widehat{\Delta}_1$. Тогда по замечанию 1

$$K_1 \subset H'' = \widetilde{H} \setminus (\widehat{\Delta}_6 \cup \widehat{\Delta}_2)$$

и

$$\frac{3-\alpha}{3(2-\alpha)}H'' + \frac{2a}{3(2-a)}\mathbf{a} \overset{(1)}{\subset} H \cup T_1 \subset K_2 \subset (1+\alpha)K_1,$$

где включение (1) следует из несложных вычислений. Следовательно,

$$\delta(K_1, K_2) \leqslant (1+\alpha) \cdot \frac{3(2-\alpha)}{3-\alpha}.$$

Осталось заметить, что правая часть неравенства достигает наибольшего значения 2,7 на $[0, 1/2]$ при $\alpha = 1/2$. $\square$

§5. Оставшиеся случаи: $K_1 \in \mathcal{T}_{14}$, $K_2 \in \mathcal{T}_{13} \cup \mathcal{T}_{135}$

Лемма 7. *Пусть $K_1 \in \mathcal{T}_{14}$ и пусть K_1 одновременно пересекает $\frac{7}{27}\Delta_1$ и $\frac{7}{27}\Delta_4$. Пусть P – параллелограмм. Тогда $\delta(K_1, P) \leqslant 1,35$.*

Доказательство. Из сказанного выше следует, что K_1 содержит равные равнобедренные треугольники, имеющие общие основания с треугольниками Δ_1 и Δ_4, соответственно, высоты которых равны $10/17$ высот треугольников Δ_1 и Δ_4, и пусть D и D' – вершины этих треугольников.

Пусть P – ромб с вершинами D и D', другие две вершины которого являются вершинами шестиугольника H. По построению $P \subset K_1$, и легко проверить, что $K_1 \subset 1,35P$, где мы пользуемся гомотетией с центром в центре исходного P. Это и доказывает лемму. $\square$

Следствие. *Пусть фигура K_1 имеет описанный в лемме 7 тип. Тогда для любой выпуклой фигуры $K_2 \subset \mathbb{R}^2$ имеем $\delta(K_1, K_2) \leqslant 2,7$.*

Доказательство. Действительно, хорошо известно [1], что $\delta(P, K_2) \leqslant 2$, откуда по неравенству треугольника и лемме 7 получаем

$$\delta(K_1, K_2) \leqslant \delta(K_1, P) \cdot \delta(P, K_2) \leqslant 1,35 \cdot 2 = 2,7. \quad \square$$

Таким образом, в дальнейшем можно рассматривать лишь фигуры $K_1 \in \mathcal{T}_{14}$, которые не пересекаются с одним из треугольников $\frac{7}{27}\Delta_1$ и $\frac{7}{27}\Delta_4$.

Лемма 8. *Пусть $K_1 \in \mathcal{T}_{14}$ и $K_2 \in \mathcal{T}_{13} \cup \mathcal{T}_{135}$, причем K_1 не задевает треугольника $\frac{7}{27}\Delta_4$. Тогда для любой фигуры $K_2 \in \mathcal{T}_{13} \cup \mathcal{T}_{135}$ имеем $K_1 + 0,16\mathbf{a} \subset 1,62K_2$.*

Доказательство. По замечанию 1 и по условию имеем

$$K_1 \subset H_1' = \widehat{H} \setminus \left(\widehat{\Delta}_2 \cup \widehat{\Delta}_3 \cup \frac{7}{27}\Delta_4 \cup \widehat{\Delta}_5 \cup \widehat{\Delta}_6\right).$$

Тогда

$$K_1 + 0,16\mathbf{a} \subset H_1' + 0,16\mathbf{a} \overset{(1)}{\subset} 1,62(H \cup \overline{\Delta}_1) \subset 1,62K_2,$$

где включение (1) следует из несложных вычислений. $\square$

Лемма 9. *Пусть* $K_1 \in \mathcal{T}_{14}$, *и пусть* K_1 *пересекает* $\frac{1}{4}\Delta_1$, *но не пересекает* $\frac{7}{27}\Delta_4$. *Тогда для любой фигуры* $K_2 \in \mathcal{T}_{13} \cup \mathcal{T}_{135}$ *имеем* $\delta(K_1, K_2) \leqslant 2,7$.

Доказательство. Обозначим через Δ равнобедренный треугольник, высота которого равна 0,6 высоты треугольника Δ_1 и имеющий с Δ_1 общее основание – сторону шестиугольника H. Из того, что K_1 пересекает $\frac{1}{4}\Delta_1$, следует, что $\Delta \subset K_1$.

Пусть точка фигуры K_2, наиболее удаленная от шестиугольника H, расположена внутри Δ_1, и пусть это удаление составляет часть y высоты треугольника Δ_1. По условию $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Простые вычисления показывают, что

$$\frac{3}{5}K_2 + \left(\frac{6}{5}y - \frac{4}{5}\right)\mathbf{a} \subset H \cup \Delta \subset K_1 \quad \text{при} \quad y \geqslant \frac{2}{3},$$

а при $1/2 \leqslant y \leqslant 2/3$ имеем $\frac{3}{5}K_2 \subset H \cup \Delta \subset K_1$.

С учетом леммы 8 получаем, что $\delta(K_1, K_2) \leqslant 1,62 : 3/5 = 2,7$. $\bullet$

Лемма 10. *Пусть* $K_1 \in \mathcal{T}_{14}$, *и пусть* K_1 *не задевает* $\frac{1}{4}\Delta_1 \cup \frac{7}{27}\Delta_4$. *Тогда для любой фигуры* $K_2 \in \mathcal{T}_{13} \cup \mathcal{T}_{135}$ *имеем* $\delta(K_1, K_2) \leqslant 2,7$.

Доказательство. Пусть точка фигуры K_1, наиболее удаленная от шестиугольника H, расположена внутри треугольника Δ_1, и пусть это удаление составляет часть y высоты треугольника Δ_1. По условию $1/2 \leqslant y \leqslant 3/4$.

Легко проверить, что

$$\frac{2}{3}K_1 + \left(\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}\right)\mathbf{a} \subset H \cup \overline{\Delta}_1 \subset K_2.$$

Как следует из доказательства лемм 3 и 4, для $K_2 \in \mathcal{T}_{135}$ имеем $\frac{5}{9}K_2 + \mathbf{b} \subset K_1$ для некоторого вектора $\mathbf{b}$, и, следовательно, $\delta(K_1, K_2) \leqslant 2,7$. Аналогично, для $K_2 \in \mathcal{T}_{13}$ имеем $\frac{4}{7}K_2 + \mathbf{c} \subset K_1$ для некоторого вектора $\mathbf{c}$, и, следовательно, $\delta(K_1, K_2) \leqslant 21/8 = 2,625 < 2,7$. Лемма, а с ней – и теорема 1, доказаны. $\bullet$

Очевидно, что, увеличивая количество разбираемых случаев, оценку в теореме 1 можно улучшать.

Литература

1. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* Наука, М. (1971).
2. В. В. Макеев, *Об одной аффинно-инвариантной метрике на множестве плоских выпуклых компактов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **261** (1999), 194–197.

Makeev V. V. Estimating the diameter of the space of planar convex figures with respect to an affine-invariant metric.

A *convex figure* $K \subset \mathbb{R}^2$ is a compact convex set with nonempty interior, and αK is a homothetic image of K with coefficient $\alpha \in R$. It is proved that for any two convex figures $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^2$ there is an affine transformation T of the plane such that $K_1 \subset T(K_2) \subset 2,7K_1$.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: pp11687@vm11687.spb.edu

Поступило 25 мая 2004 г.