Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 329, 2005 г.

В. В. Макеев

СКОЛЬ КРУГЛАЯ ТЕНЬ СУЩЕСТВУЕТ У ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

§1. Приближение тени трехмерного выпуклого тела кругом

Под *выпуклым телом* $K \subset \mathbb{R}^n$ мы понимаем компактное выпуклое множество с непустой внутренностью. αK для вещественного α обозначает гомотетичный образ тела K с коэффициентом α.

Ниже мы предполагаем, что источник света находится на бесконечности. Поэтому математическая формулировка вопроса, поставленного в заглавии, состоит в выяснении того, насколько близкая к $(n-1)$-мерному шару параллельная (не обязательно ортогональная) проекция на гиперплоскость существует у всякого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$. В этом параграфе в качестве меры близости к шару мы используем *асферичность* $\varepsilon(B)$ тела $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$, т.е. (минимальное) $\varepsilon > 0$ такое, что K содержит некоторый шар радиуса $r > 0$ и содержится в концентрическом шаре радиусом $(1+\varepsilon)r$ (см. [1]).

Представляется правдоподобной следующая гипотеза.

Гипотеза. *Экстремальным телом для сформулированной задачи является симплекс, а среди центрально-симметричных тел – аффинно-правильный 2^n-эдр (крестовый многогранник) – выпуклая оболочка n отрезков с общей серединой, не лежащих в одной гиперплоскости.*

Ниже мы докажем эту гипотезу при $n = 3$, а также рассмотрим некоторые ее уточнения. При $n > 3$ ответ автору не известен.

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – выпуклое тело. Тогда некоторая его параллельная проекция на плоскость $(\sqrt{2}-1)$-асферична. Если тело K центрально-симметрично, то некоторая его параллельная проекция на плоскость $(2/\sqrt{3}-1)$-асферична. Обе оценки точны: первая*

Работа частично поддержана грантом НШ-1914.2003.1.

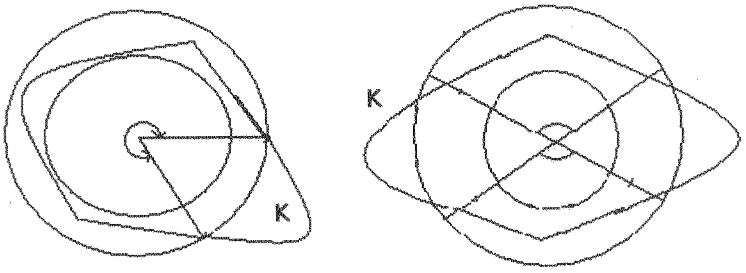

Рис. 1.

не может быть улучшена в случае, когда K – тетраэдр, а вторая – когда K – октаэдр.

Доказательство. (1) В [2] доказано, что в некоторую ортогональную проекцию выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ *вписан аффинно-правильный восьмиугольник*. Следовательно, некоторая параллельная проекция тела K описана вокруг правильного восьмиугольника S. Тогда рассматриваемая проекция содержит вписанный в восьмиугольник S круг B радиуса r и содержится в восьмиугольной звезде, ограниченной продолжениями сторон восьмиугольника S, вокруг которой описан круг $\sqrt{2}B$ радиуса $\sqrt{2}r$. Если K – тетраэдр, то любая его параллельная проекция является треугольником или четырехугольником, которые, очевидно, не более чем $(\sqrt{2}-1)$-асферичны, причем равенство достигается лишь для квадрата.

(2) Назовем равносторонний 12-угольник *полуправильным*, если углы в нем равны через один. Из доказательства результата статьи [3] следует, что некоторая ортогональная проекция центрально-симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ описана вокруг аффинного образа полуправильного 12-угольника, а значит некоторая параллельная проекция описана вокруг полуправильного 12-угольника S. (См. замечание ниже.) Тогда эта проекция содержит вписанный в S круг B радиуса r и содержится в 12-угольной звезде, ограниченной продолжениями сторон 12-угольника S. Эта звезда является объединением двух равных правильных шестиугольников, описанных вокруг круга B, и следовательно вокруг нее описан круг радиуса $2r/\sqrt{3}$.

Если K – октаэдр, то всякая его параллельная проекция есть или параллелограмм, или центрально симметричный шестиугольник, которые не более чем $(2/\sqrt{3}-1)$-асферичны, причем равенство возможно лишь для правильного шестиугольника. Теорема 1 доказана. •

Замечание. В [3] доказано, что в некоторое центральное сечение центрально-симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ вписан аффинный образ полуправильного 12-угольника. Но, как и соответствующая теорема [2] об описанном аффинно-правильном 8-угольнике, этот факт верен и без изменений доказывается не только для плоских сечений или проекций трехмерных выпуклых тел, а и для произвольных полей выпуклых фигур в тавтологическом векторном расслоении

$$\gamma_2^3 : E_2(\mathbb{R}^3) \to G_2(\mathbb{R}^3)$$

над многообразием Грассмана 2-плоскостей, проходящих через точку $O \in \mathbb{R}^3$, где слоем над плоскостью является она же, рассматриваемая как двумерное подпространство $\mathbb{R}^3$.

(Говорим, что в расслоении γ_2^3 задано *поле выпуклых фигур (п.в.ф.)*, если в каждом слое $E_2(\mathbb{R}^3)$ выделена непрерывно от него зависящая выпуклая фигура.)

§2. Частичное приближение тени трехмерного выпуклого тела кругом

Представляется осмысленным также рассматривать "частичные" приближения выпуклых фигур кругами, т.е. такие, когда круг приближает фигуру лишь в некоторых направлениях.

Пусть S – объединение неналегающих углов с общей вершиной O и суммой градусных мер $2\alpha\pi$, $\alpha \in (0;1)$. Пусть $S_1 = S \cap B$, где B – круг с центром O, а

$$S_2 = S \cap (1+\varepsilon)B,$$

причем центр круга $(1+\varepsilon)B$ также находится в точке O.

Говорим, что фигура K *ε-приближена кругом (или ε-асферична) на часть α*, если

$$S_1 \subset K \cap S \subset S_2.$$

Всюду в дальнейшем S есть угол величиной $2\alpha\pi$ или же, если фигура K центрально-симметрична, пара вертикальных углов величиной $\alpha\pi$ (рис. 1)

Теорема 2. *Выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^3$ имеет тень,* $(\sec \pi/5 - 1)$*-асферическую на* $4/5$*. Эта оценка неулучшаема в случае, когда K – тетраэдр.*

Скажем, что выпуклый 10-угольник $A_1B_1A_2B_2\ldots A_5B_5$ *имеет тип T*, если $A_1A_2\ldots A_5$ – правильный пятиугольник с центром O, OB_1 – биссектриса угла A_1OA_5, OB_2 – биссектриса угла A_2OA_1, ..., OB_5 – биссектриса угла A_5OA_4 и

$$|OB_1| = \cdots = |OB_4| \leqslant |OB_5|.$$

Достаточно доказать, что некоторая проекция K_1 тела K описана вокруг какого-либо 10-угольника S типа T. В этом случае K_1 содержит вписанный в пятиугольник $A_1\ldots A_5$ круг B радиусом r и содержится в 20-звенной звезде, ограниченной продолжениями сторон 10-угольника S (рис. 2). Очевидно, что часть этой звезды, заключенная внутри угла A_5OA_4 величиной $8\pi/5$, содержится в круге $\sec(\pi/5)\cdot B$ с центром O.

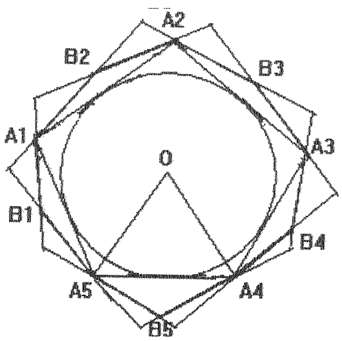

Рис. 2.

Лемма 1. *Всякое п.в.ф. в расслоении γ_2^3 содержит фигуру, описанную вокруг аффинного образа 10-угольника типа T.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай гладкого (в естественном смысле) поля гладких выпуклых фигур. В остальных случаях она получается предельным переходом.

Для заданного п.в.ф. в расслоении γ_2^3 обозначим через M пространство вписанных в фигуры поля аффинных образов $A_1\ldots A_5$

правильного пятиугольника. Для типичного гладкого п.в.ф. пространство M является гладким компактным трехмерным многообразием. Его трехмерность вытекает из того, что многообразие аффинно-правильных пятиугольников в слоях γ_2^3 имеет размерность 8, а M выделяется в нем 5 условиями попадания вершин пятиугольника на границу выпуклой фигуры из поля.

Если п.в.ф. состоит из кругов или C^1-близких к ним выпуклых фигур, то, очевидно, $M \cong SO(3)$.

Рассмотрим непрерывное отображение

$$F\colon M \to \mathbb{R}^5, \quad A_1 \dots A_5 \mapsto \left(\frac{|OB_1|}{|OA_1|}, \dots, \frac{|OB_5|}{|OA_5|}\right),$$

где $A_1 \dots A_5$ – аффинно-правильный пятиугольник с центром O, вписанный в фигуру K из п.в.ф., а для $1 \leqslant i \leqslant 5$ через OB_i обозначен отрезок, высекаемый фигурой K на луче, противоположном лучу OA_i.

Циклическая группа $\mathbb{Z}_5$ свободно действует в M циклическими перестановками вершин пятиугольников, а также действует в $\mathbb{R}^5$ циклическими перестановками координат. По построению отображение F очевидно $\mathbb{Z}_5$-эквивариантно.

Достаточно доказать, что в типичной ситуации (когда M – многообразие) образ $F(M)$ содержит точку $(x_1, \dots, x_5)$ с $x_1 = \dots = x_4 \leqslant x_5$. При этом можно считать, что образ $F(M)$ не задевает прямую ℓ, заданную уравнениями $x_1 = \dots = x_5$ (иначе все доказано).

Пусть P – гиперплоскость, заданная уравнением $x_1 + \dots + x_5 = 0$. Введем проекцию

$$p_1\colon \mathbb{R}^5 \setminus \ell \to P \setminus (0, \dots, 0), \quad (x_1, \dots, x_5) \mapsto (x_1 - s, \dots, x_5 - s),$$

где $s = (x_1 + \dots + x_5)/5$. Обозначим через S^3 сферу в гиперплоскости P, заданную уравнением $x_1^2 + \dots + x_5^2 = 1$. Введем проекцию

$$p_2\colon P \setminus (0, \dots, 0) \to S^3, \quad x \mapsto \frac{x}{|x|}.$$

Композиция

$$G = p_2 \circ p_1 \circ F : M \to S^3$$

по построению $\mathbb{Z}_5$-эквивариантна.

Утверждение. *В типичной ситуации степень отображения G не делится на 5.*

Доказательство. Продеформируем гладкое п.в.ф. ϕ_0 в расслоении γ_2^3 в гладкое поле ϕ_1, состоящее из фигур, C^1-близких к кругам. Пусть для $0 \leqslant t \leqslant 1$ M_t обозначает пространство аффинных образов $A_1 \dots A_5$ правильного пятиугольника, вписанных в фигуры поля ϕ_t. Мы предполагаем, что деформация типична, т.е.

$$N = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant 1} M_t \times t$$

является компактным гладким четырехмерным многообразием с краем $M_0 \times 0 \cup M_1 \times 1$. Послойные отображения $p_1 \circ F_t \colon M_t \to \mathbb{R}^5$ задают отображение

$$H \colon N \to \mathbb{R}^5,$$

про которое мы предполагаем, что $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^5$ является его регулярным значением.

Прообраз $H^{-1}(\{(0, \dots, 0)\})$ состоит из конечного числа орбит, образованных точек многообразия N. Окружим эти точки малыми непересекающимися между собой и с многообразиями $M_0 \times 0$ и $M_1 \times 1$ шарами $D_1, \dots, D_N$ так, чтобы шары с центрами в точках из одной $\mathbb{Z}_5$-орбиты переходили друг в друга под действием группы $\mathbb{Z}_5$.

Сужение отображения

$$p_2 \circ H \,| : N \setminus \bigcup_{i=1}^{N} \operatorname{int}(D_i) \to S^3$$

на край

$$(M_0 \times 0) \cup (M_1 \times 1) \cup \bigcup_{i=1}^{N} \partial D_i$$

имеет степень 0. Так как по построению степень сужения

$$p_2 \circ H \,| : \bigcup_{i=1}^{N} \partial D_i \to S^3$$

делится на 5, то степени сужений $p_2 \circ H$ на $M_0 \times 0$ и $M_1 \times 1$ по модулю 5 отличаются знаком. Поскольку $M_1 \times 1 \cong SO(3)$, то, как показано в [4], степень сужения $p_2 \circ H|\colon M_1 \times 1 \to S^3$ не делится на 5, а значит, и степень сужения $p_2 \circ H|\colon M_0 \times 0 \to S^3$ не делится на 5. Следовательно, сужение отображения $p_2 \circ H$ на $M_0 \times 0$ сюръективно, и прообраз точки

$$\left(\frac{-1}{2\sqrt{5}}, \frac{-1}{2\sqrt{5}}, \frac{-1}{2\sqrt{5}}, \frac{-1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

содержит требуемые аффинно-вписанные в фигуры поля 10-угольники. Лемма 1 доказана. $\bullet$

Из леммы 1 непосредственно следует, что некоторая ортогональная проекция выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ описана вокруг аффинного образа 10-угольника класса T, а значит, некоторая параллельная проекция тела K описана вокруг 10-угольника класса T, что и завершает доказательство оценки асферичности из теоремы 2.

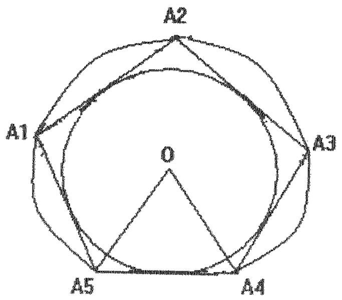

Рис. 3.

Константа $\sec(\pi/5)$ есть отношение радиусов описанной и вписанной окружности для правильного пятиугольника $A_1 \ldots A_5$ (рис. 3). Очевидно, что при уменьшении радиуса внешней окружности стороны четырехугольника (тем более треугольника) не могут пройти в зазор между вписанной и внешней окружностью внутри угла $\angle A_5 \mathcal{O} A_4$ величиной $8\pi/5$. Теперь неулучшаемость данной в теореме 2 оценки следует из того, что параллельная проекция тетраэдра $K \subset \mathbb{R}^3$ на плоскость есть треугольник или четырехугольник. $\bullet$

§3. Частичное приближение кругом в случае центрально-симметричного тела

Теорема 3. *У всякого центрально-симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ существует тень, $(\sec(\pi/7)-1)$-асферическая на $6/7$. Для октаэдра K данная оценка неулучшаема.*

Обозначим через S класс выпуклых плоских 14-угольников $A_1A_2\dots A_{14}$, таких, что для некоторой точки O плоскости

$$\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \dots = \angle A_{13}OA_{14} = \angle A_{14}OA_1$$

и

$$|OA_2| = \dots = |OA_7| = |OA_9| = \dots = |OA_{14}| \leqslant |OA_1| = |OA_8|,$$

т.е. $A_1\dots A_{14}$, возможно, отличается от правильного 14-угольника лишь тем, что две его симметричные вершины несколько более удалены от центра.

Лемма 2. *Всякое поле центрально-симметричных выпуклых фигур в расслоении γ_2^3 содержит фигуру, описанную вокруг некоторого 14-угольника класса S.*

Доказательство. Докажем, что всякое поле центрально-симметричных выпуклых фигур в расслоении γ_2^4 содержит фигуру, описанную вокруг выпуклого семиугольника $A_1\dots A_7$ такого K, что

$$\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \dots = \angle A_7OA_1$$

и

$$|OA_2| = \dots = |OA_7| \leqslant |OA_1|,$$

где O – центр симметрии фигуры K.

Обозначим через M многообразие упорядоченных плоских наборов лучей $(\ell_1,\dots,\ell_7)$, исходящих из центров симметрии фигур рассматриваемого поля фигур и лежащих в их плоскостях в расслоении γ_2^4 с углом $2\pi/7$ между соседними лучами. Очевидно, $M \cong V_2(\mathbb{R}^4)$ – многообразие Штифеля 2-реперов в $\mathbb{R}^4$.

Рассмотрим непрерывное отображение

$$F\colon M \to \mathbb{R}^7, \quad (\ell_1,\dots,\ell_7) \mapsto (|OA_1|,\cdots,|OA_7|),$$

где OA_i – отрезок, высекаемый на луче ℓ_i фигурой из поля из плоскости лучей $\ell_1,\dots,\ell_7$ с центром O (для $1 \leqslant i \leqslant 7$).

Мы должны доказать, что образ $F(M)$ содержит точку $(x_1,\dots,x_7)$ с координатами $x_2=\dots=x_7\leqslant x_1$. Можно считать, что $F(M)$ не имеет общих точек с прямой $\ell\subset\mathbb{R}^7$, заданной уравнениями $x_1=\dots=x_7$ (иначе доказывать нечего).

Пусть P – гиперплоскость, заданная уравнением $x_1+\dots+x_7=0$. Рассмотрим проекцию

$$p_1\colon\mathbb{R}^7\to P,\quad (x_1,\dots,x_7)\mapsto(x_1-s,x_2-s,\dots,x_7-s),$$

где $s=(x_1+\dots+x_7)/7$.

Обозначим через S^5 единичную сферу в гиперплоскости P и определим проекцию

$$p_2\colon P\setminus(0,\dots,0)\to S^5,\quad x\mapsto\frac{x}{|x|}.$$

Циклическая группа $\mathbb{Z}_7$ действует в M циклическими перестановками лучей $(\ell_1,\dots,\ell_7)$ и в $\mathbb{R}^7$ циклическими перестановками координат. Это действие свободно в M и в $\mathbb{R}^7\setminus\ell$. Если образ $F(M)$ не задевает ℓ, то возникает непрерывное $\mathbb{Z}_7$-эквивариантное отображение

$$p_2\circ p_1\circ F\colon M\to S^5.$$

В [4] доказано, что его степень не делится на 7, а значит оно сюръективно и прообраз

$$F^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{42}},\frac{-1}{\sqrt{42}},\dots,\frac{-1}{\sqrt{42}}\right)$$

содержит конфигурации лучей $(\ell_1,\dots,\ell_7)$, которые пересекают границу фигуры K из своего слоя расслоения γ_2^4 в точках $A_1,\dots,A_7$, являющихся вершинами интересующего нас 7-угольника. Очевидно, что продолжения лучей $OA_1,\dots,OA_7$ пересекают границу фигуры K в точках, которые вместе с точками $A_1,\dots,A_7$ являются вершинами вышеописанного 14-угольника класса S.

Заметим, что все выпуклые фигуры, описанные вокруг 14-угольников класса S имеют равномерно ограниченную асферичность. Действительно, если 14-угольник $A_1\dots A_{14}$ класса S вписан в выпуклую фигуру $K\subset\mathbb{R}^2$, то K содержит круг, вписанный в 12-угольник $A_2A_3\dots A_7A_9\dots A_{14}$ (определенный с точностью до подобия), и содержится в круге с тем же центром, описанном вокруг 12-угольной звезды, ограниченной продолжениями сторон

12-угольника $A_2A_3\dots A_7A_9\dots A_{14}$. Пусть постоянная M ограничивает асферичность всех выпуклых фигур, описанных вокруг каких-либо 14-угольников класса S.

Для завершения доказательства леммы 2 рассмотрим продолжение поля центрально-симметричных выпуклых фигур с γ_2^3 до γ_3^4, исходя из включения $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$, где $\mathbb{R}^3$ выделено условием $x_4 = 0$. Возникает включение $G_2(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow G_2(\mathbb{R}^4)$, где плоскости из $G_2(\mathbb{R}^3)$ лежат в гиперплоскости $x_4 = 0$. Введем проекцию

$$\pi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3).$$

Покажем, что для некоторого $\varepsilon > 0$ имеющееся п.в.ф. в γ_2^3 допускает продолжение до поля центрально-симметричных выпуклых фигур в γ_2^4 со следующими свойствами:

1. Для плоскости $g \in G_2(\mathbb{R}^4)$, составляющей с осью x_4 угол $\leqslant \varepsilon$, для фигуры $K(g) \subset g$ из поля ее проекция $\pi(K(g))$ есть фигура из рассматриваемого поля в плоскости $\pi(g)$.

2. Асферичность фигур $K(g)$ из плоскостей $g \in G_2(\mathbb{R}^4)$, составляющих с осью x_4 угол $< \varepsilon$, больше M.

Первое условие однозначно определяет продолжение п.в.ф. с γ_2^3 на плоскости из $G_2(\mathbb{R}^4)$, составляющие с осью x_4 угол $\geqslant \varepsilon$. В качестве фигуры $K(g)$ из такой плоскости $g \in G_2(\mathbb{R}^4)$ мы должны взять $\pi^{-1}(K)$, где K – фигуры из поля из плоскости $\pi(g) \in G_2(\mathbb{R}^3)$.

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ для всех фигур из плоскостей, составляющих угол ε с осью x_4, отношение их ширины в любом направлении, перпендикулярном оси x_4, по крайней мере в M раз меньше их ширины в направлении оси x_4.

Остается продолжить п.в.ф. на плоскости в $G_2(\mathbb{R}^4)$, составляющие с осью x_4 угол $< \varepsilon$, до поля центрально-симметричных выпуклых фигур с сохранением вышеуказанного свойства, например, так, что фигуры в плоскостях, содержащих ось x_4, – равные прямоугольники, причем ось x_4 проходит по их наибольшей средней линии, которая превосходит меньшую сторону прямоугольника более, чем в M раз.

Мы доказали, что в одну из фигур $K(g)$ построенного поля в расслоении γ_2^4 вписан 14-угольник класса S с тем же центром симметрии. Из вышесказанного следует, что такая фигура $K(g)$ лежит в плоскости g, составляющей с осью x_4 угол $\geq \varepsilon$, а значит в фигуру $\pi(K(g))$ из плоскости $\pi(g)$ вписан аффинный образ 14-угольника класса S. Лемма 2 доказана. $\bullet$

Доказательство теоремы 3. Применяя лемму 2 к п.в.ф., полученным ортогональным проектированием центрально-симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ на всевозможные плоскости $g \in G_2(\mathbb{R}^3)$, мы получаем, что в ортогональную плоскую проекцию K вписан аффинный образ 14-угольника класса S, а значит, в некоторую параллельную плоскую проекцию K вписан 14-угольник класса S.

Для завершения доказательства теоремы 3 остается заметить, что граница проекции со вписанным 14-угольником $A_1 \dots A_{14}$ класса S защемлена между концентрическими кругами с отношением радиусов $\sec(\pi/7)$ и общим центром в центре 14-угольника внутри вертикальных углов величиной $6\pi/7$ (это $\angle A_2OA_7$ и $\angle A_9OA_{14}$, расширенные в обе стороны на $\pi/14$).

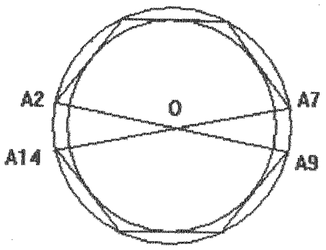

Рис. 4.

Три стороны правильного семиугольника вписываются в зазор между концентрическими окружностями с отношением радиусов $\sec \pi/7$, видный из центра под углом $6\pi/7$ (рис. 4). При уменьшении радиуса внешней окружности трехзвенная ломаная, очевидно, не может пройти этот зазор. Для доказательства неулучшаемости оценки для октаэдра остается заметить, что его проекция является параллелограммом или центрально-симметричным шестиугольником. $\bullet$

Замечание. Можно, конечно, ставить вопрос о том, сколь круглая параллельная или ортогональная k-мерная проекция существует у n-мерного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$. Верно ли, что экстремальными телами $K \subset \mathbb{R}^n$ по-прежнему являются n-мерный симплекс и, соответственно, 2^n-эдр (крестовый полиэдр) в случае центрально-симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$?

Известная теорема Дворецкого [1] утверждает, что при фиксированном k и достаточно большой размерности n у любого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ существует k-мерная ортогональная проекция, произвольно близкая к k-мерному шару. Оценки асферичности, близкие к точным (а иногда и точные), в том числе для неинтегрируемого случая – полей выпуклых тел в расслоении γ_k^n, – известны лишь при $k = 2$ [3–5].

Литература

1. A. Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces.* — Proc. Int. Symp. on Linear spaces. Jerusalem (1960), 123–160.
2. В. В. Макеев, *Аффинно-вписанные и аффинно-описанные многоугольники и многогранники.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **231** (1995), 286–298.
3. В. В. Макеев, *Плоские сечения выпуклых тел и универсальные расслоения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **280** (2002), 219–233.
4. В. В. Макеев, *Задача Кнастера и почти сферические сечения.* — Мат. сб. **180**, No. 3 (1989), 424–431.
5. В. В. Макеев, *О приближении кругами и эллипсами 2-мерных сечений выпуклых тел.* — Алгебра и анализ **16**, No. 6 (2004)

Makeev V. V. Asphericity of shadows of a convex body.

A shadow is a parallel projection F of a body K to a plane. F is ϵ-aspheric if the boundary ∂F lies in a circular ring with center at O and ratio of radii equal to $1+\epsilon$. F is ϵ-aspheric for a part of α if the same is true for the part of ∂F lying inside an angle of $2\alpha\pi$ with vertex at O (or within the union of two vertical angles of $\alpha\pi$ if K is centrally symmetric). It is proved that each convex body $K \subset \mathbb{R}^3$ has a $(\sqrt{2}-1)$-aspheric shadow and a shadow $(\sec \pi/5 - 1)$-aspheric for a part of $4/5$. If K is centrally symmetric, then K has a $(2/\sqrt{3}-1)$-aspheric shadow and a shadow $(\sec \pi/7 - 1)$-aspheric for a part of $6/7$.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: pp11687@vm11687.spb.edu

Поступило 1 марта 2005 г.