Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 329, 2005 г.

В. В. Макеев

ОБ ОБЪЕМЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ, ОПИСАННЫХ ВОКРУГ ТРЕХМЕРНОГО ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

Всюду в дальнейшем под *выпуклым телом* понимаем компактное выпуклое множество с непустой внутренностью, а $V(K)$ и $S(K)$ обозначают объем и площадь множества K, соответственно.

Белецкий и Радзишевский [1] доказали, что всякое выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^3$ содержит параллелепипед объемом $\geqslant \frac{2}{9}V(K)$, причем если K – тетраэдр, то данная оценка не может быть улучшена. Значительно более трудной является нерешенная задача нахождения такого наименьшего $C > 0$, что всякое выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^3$ содержится в параллелепипеде объемом $C \cdot V(K)$. Пример тетраэдра показывает, что $C \geqslant 3$. В [2] доказано, что $C \leqslant 3(1 + \sqrt{2}/2)$. Ниже мы докажем, что $C < 3\sqrt{2}$.

Теорема. *Всякое выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^3$ содержится в параллелепипеде объемом $< 3\sqrt{2} \cdot V(K)$.*

Для доказательства понадобится следующая лемма.

Лемма 1 [2]. *Пусть l – прямая в $\mathbb{R}^n$. Всякое выпуклое тело K в $\mathbb{R}^n$ содержится в выпуклом цилиндре C с параллельной l образующей и объемом $nV(K)$.*

Доказательство. Рассмотрим бесконечный выпуклый цилиндр C', образованный параллельными l прямыми, пересекающими тело K.

Две параллельные опорные к телу K гиперплоскости, проведенные в концах самой длинной параллельной l хорды тела K длиной h отсекают от цилиндра C' искомый цилиндр C.

Действительно, проведем не меняющую объемов штейнеровскую симметризацию относительно перпендикулярной l плоскости P. Тело K превратится в симметричное относительно P вы-

Работа частично поддержана грантом НШ-1914.2003.1.

пуклое тело $\widetilde{K}$, содержащее симметричный прямой биконус с высотой h и основанием $P \cap \widetilde{K}$, а цилиндр C – в прямой цилиндр $\widetilde{C}$ с высотой h и основанием, конгруэнтным $P \cap \widetilde{K}$. Поэтому

$$V(K) = V(\widetilde{K}) \geqslant \frac{S(P \cap \widetilde{K}) \cdot h}{n} = \frac{V(\widetilde{C})}{n} = \frac{V(C)}{n},$$

что и требовалось доказать. $\square$

С учетом того, что основание построенного в лемме 1 цилиндра C является параллельной проекцией тела K на плоскость, для доказательства теоремы осталось доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Всякое выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^3$ имеет плоскую параллельную проекцию Θ, содержащуюся в параллелограмме площадью $\sqrt{2}S(\Theta)$.*

Доказательство. Из [3] следует, что в некоторую ортогональную проекцию Θ тела K вписан аффинный образ Ω правильного восьмиугольника. Покажем, что проекция Θ содержится в параллелограмме площадью $\sqrt{2}S(\Theta)$. Совершив аффинное преобразование, мы можем считать восьмиугольник Ω правильным. Доказательство леммы 2 завершается использованием следующего факта.

Лемма 3. *Если в выпуклую фигуру $\Theta \subset \mathbb{R}^2$ вписан правильный восьмиугольник Ω, то Θ содержится в прямоугольнике со сторонами, параллельными сторонам восьмиугольника Ω, и площадью $\sqrt{2}S(\Theta)$.*

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству леммы 3.

Доказательство леммы 3. В дальнейшем мы считаем, что ширина восьмиугольника Ω равна 1. Обозначим через $h_1, \dots, h_8$ расстояния от опорных прямых фигуры K_1, параллельных сторонам восьмиугольника Ω, до самих этих сторон. Вершины восьмиугольника Ω обозначим через $A_1, \dots, A_8$ (рис. 1).

Проведенные опорные прямые ограничивают два описанных вокруг фигуры Θ прямоугольника P_1 и P_2 с площадями

$$S(P_1) = (1+h_1+h_5)\cdot(1+h_3+h_7) \quad \text{и} \quad S(P_2) = (1+h_2+h_6)\cdot(1+h_4+h_8),$$

соответственно.

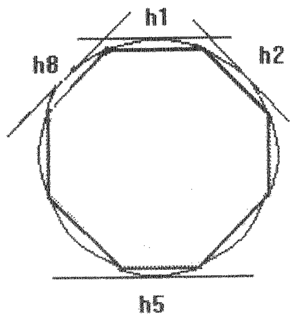

Рис. 1.

Сторона восьмиугольника Ω равна $\sqrt{2}-1$, а площадь его равна $2\sqrt{2}-2$, поэтому

$$S(\Theta) \geqslant 2\sqrt{2}-2+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{8} h_i,$$

так как кроме Ω фигура Θ содержит еще 8 треугольников с основаниями $A_1A_2, \ldots, A_8A_1$ и высотами $h_1, \ldots, h_8$, соответственно.

Пусть, для определенности,

$$h = h_1+h_3+h_5+h_7 \leqslant h_2+h_4+h_6+h_8.$$

Тогда

$$S(\Theta) \geqslant (2\sqrt{2}-2)\left(1+\frac{h}{2}\right),$$

а площадь прямоугольника P_1

$$S(P_1) \leqslant \left(1+\frac{h_1+h_3+h_5+h_7}{2}\right)^2 \leqslant \left(1+\frac{h}{2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\frac{S(P_1)}{S(\Theta)} \leqslant \frac{(1+h/2)^2}{(1+h/2)(2\sqrt{2}-2)} = \frac{1+h/2}{2\sqrt{2}-2}$$

и нам достаточно доказать что

$$\frac{1+h/2}{2\sqrt{2}-2} \leqslant \sqrt{2},$$

т.е. $h \leqslant 6-4\sqrt{2}$.

Утверждение. *Имеет место неравенство*

$$h = \min(h_1 + h_3 + h_5 + h_7, h_2 + h_4 + h_6 + h_8) \leqslant 6 - 4\sqrt{2}.$$

Проведя в вершинах $A_1, \ldots, A_8$ восьмиугольника Ω опорные прямые, мы сводим доказательство к случаю, когда фигура Θ – восьмиугольник, на сторонах которого лежат точки $A_1, \ldots, A_8$, при этом $h_1, \ldots, h_8$ – высоты треугольников, добавлением которых к Ω получается Θ (рис. 2).

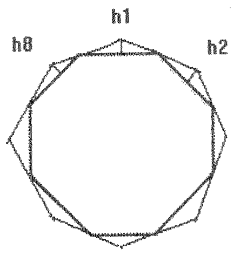

Рис. 2.

Далее мы также считаем, что

$$h_1 + h_3 + h_5 + h_7 = h_2 + h_4 + h_6 + h_8,$$

так как в противном случае поворотом одной из сторон Θ можно увеличить меньшую сумму, немного уменьшив большую.

По стандартным вариационным соображениям для сторон восьмиугольника Θ, вершины которого мы обозначаем ниже $B_1, \ldots, B_8$, не пересекающихся с $\partial\Omega$ по целым отрезкам (рис. 3), выполняются пропорции вида

$$\frac{|B_2A_1|}{|A_1B_1|} = \frac{|B_2A_2|}{|A_2B_3|}.$$

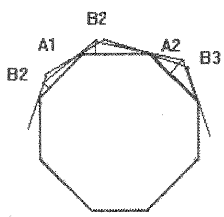

Рис. 3.

Действительно, если

$$\frac{|B_2A_1|}{|A_1B_1|} < \frac{|B_2A_2|}{|A_2B_3|},$$

то при малом сдвиге вершины B_2 параллельно отрезку A_1A_2 в сторону точки A_2 (рис. 3) для нового восьмиугольника Θ (изменяются еще положения вершин B_1 и B_3) не меняются высоты h_2, h_4, h_6, h_8, а также h_5 и h_7, но увеличивается сумма $h_1 + h_3$, так как очевидно увеличивается площадь $S(\Theta)$.

Таким образом, если ни одна из вершин $B_1, \ldots, B_8$ 8-угольника Θ не лежит на границе $\partial\Omega$ 8-угольника Ω, то $B_1B_3B_5B_7$ и $B_2B_4B_6B_8$ – квадраты со сторонами, параллельными сторонам 8-угольника Ω. Очевидно, что длина стороны одного из квадратов не превосходит двух длин сторон 8-угольника Ω. Пусть это квадрат $B_1B_3B_5B_7$. Тогда сумма $h_1 + h_3 + h_5 + h_7$ максимальна, если $|B_1B_3| = 2|A_1A_2|$, не зависит от положения центра квадрата и, как показывают простые вычисления, равна $6 - 4\sqrt{2}$.

В качестве предельного случая вышерассмотренной ситуации получается также случай, когда одна из точек $B_1, \ldots, B_8$ принадлежит $\partial\Omega$ (рис. 4). Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что хотя бы две из точек $B_1, \ldots, B_8$ принадлежат $\partial\Omega$.

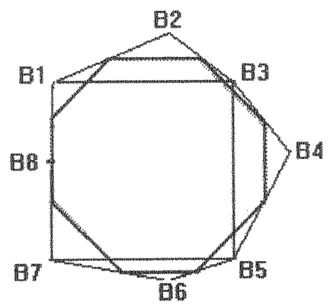

Рис. 4.

С точностью до самосовмещений возможны 4 нижеследующих случая выбора двух сторон восьмиугольника Ω, на которых лежат две вершины восьмиугольника Θ.

1) Пусть вершины B_4 и B_8 принадлежат двум противоположным сторонам восьмиугольника Ω (рис. 5)

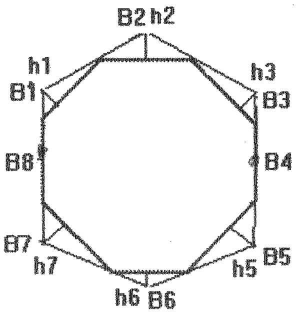

Рис. 5.

По аналогичным вышеизложенным вариационным соображениям при заданных h_2 и h_6 суммы $h_1 + h_3$ и $h_5 + h_7$ соответственно будут максимальными в том случае, если точки B_2 и B_6 проектируются в середины ближайших к ним сторон. Как показывают простые вычисления, в этом случае

$$h_1 + h_3 = \sqrt{2} - 2h_2 - 1,$$

$$h_5 + h_7 = \sqrt{2} - 2h_6 - 1$$

и условие

$$h_1 + h_3 + h_5 + h_7 = h_2 + h_6$$

дает

$$h_1 + h_3 + h_5 + h_7 = \frac{2}{3}(\sqrt{2} - 1) \approx 0,276 < 0,343 \approx 6 - 4\sqrt{2}.$$

2) Пусть только точки B_1 и B_8 принадлежат $\partial\Omega$ (рис. 6). В этом случае можно считать, что $B_1 = B_8$ и обе точки совпадают с одной из точек A_i.

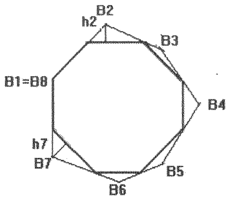

Рис. 6.

В этом случае очевидно, что малым поворотом прямых B_8B_7 и прямых B_2B_1, оставляя вблизи точки B_1 и B_8, можно увеличить обе суммы $h_1 + h_3 + h_5 + h_7$ и $h_2 + h_4 + h_6 + h_8$, что и завершает разбор случая.

3) Пусть вершины B_2 и B_7 принадлежат $\partial\Omega$ (рис. 7). Ясно, что $h_2 = h_7 = 0$.

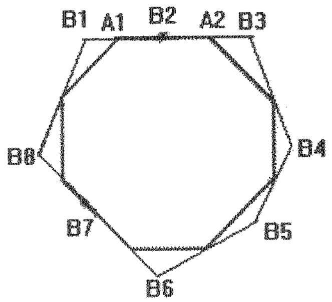

Рис. 7.

Сумма $\sum\limits_{i=1}^{8} h_i$ будет максимальна, только если точки A_i являются серединами тех проходящих через них сторон восьмиугольника Θ, которые не налегают на $\partial\Omega$ по целым отрезкам. Действительно, если например сторона B_4B_5 проходит через вершину A_4 и $|A_4B_4| < |A_4B_5|$, то, очевидно, малый поворот прямой B_4B_5 вокруг точки A_4, уменьшающий сторону B_3B_4, увеличивает $S(\Theta)$, а значит и сумму $\sum\limits_{i=1}^{8} h_i$.

Как показывают простые вычисления, в этом случае $B_1, \ldots, B_8$ получаются из B_1 последовательными симметричными отражениями относительно $A_1, \ldots, A_8$ (рис. 7). При этом B_1 лежит на продолжении стороны A_1A_2 на расстоянии $(\sqrt{2} - 1)|A_1A_2|$ от A_1 (рис. 7). В этом случае

$$\sum_{i=1}^{8} h_i = 2(6 - 4\sqrt{2}),$$

откуда следует требуемое утверждение.

4) Пусть вершины B_2 и B_8 принадлежат $\partial\Omega$ (рис. 8). Очевидно, высота h_1 в этом случае максимально возможная и равна $3/2-\sqrt{2}$. Рассуждая, как в предыдущем случае, получаем, что $B_1, \ldots, B_8$ получаются из B_1 последовательными отражениями относительно $A_1, \ldots, A_8$, и $\sum\limits_{i=1}^{8} h_i = 2(6 - 4\sqrt{2})$, что и требуется.

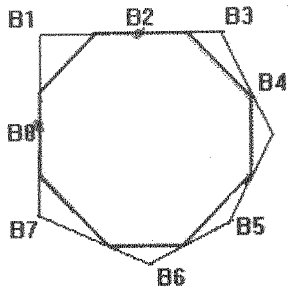

Рис. 8.

Разбор случаев, когда три и более из числа вершин $B_1, \dots, B_8$ лежат на $\partial\Omega$, очевиден. Утверждение, а с ним и лемма 3 доказаны. $\square$

Таким образом, мы доказали нестрогое неравенство в теореме. Строгое неравенство следует из того, что во всех вышерассмотренных случаях вокруг оптимального многоугольника Θ можно описать параллелограмм площадью $< \sqrt{2}S(\Theta)$. Рассмотрение круга в качестве Θ в лемме 2 показывает, что коэффициент $\sqrt{2}$ нельзя заменить на константу, меньшую $4/\pi$.

Теорема доказана. $\square$

Замечания. Из доказанной теоремы и [2] следует, что из аффинно правильных 4-, 6- и 8-угольных призм именно 4-угольные, т.е. параллелепипеды, наиболее хорошо приближают трехмерные выпуклые тела извне. Действительно, в [2] доказано, что всякое трехмерное выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^3$ содержится в афиннно-правильной восьмиугольной призме объемом $\leqslant 3\sqrt{2}V(K)$, причем для тетраэдра данная оценка неулучшаема. В [2] также доказано, что выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^3$ содержится в аффинно-правильной шестиугольной призме объемом $\leqslant 4,845V(K)$, причем для тетраэдра константа в неравенстве не может быть меньше $9/2$. Еще хуже обстоит дело с приближением выпуклого тела извне (косым) эллиптическим цилиндром. В [2] доказано, что всякое выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^3$ содержится в эллиптическом цилиндре объемом $\leqslant \frac{3\pi}{2}V(K)$, причем для тетраэдра данная оценка неулучшаема. При приближении тела изнутри ситуация иная. В [4] доказано, что всякое выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^3$ содержит эллиптический цилиндр объемом $\geqslant \frac{4\pi}{27\sqrt{3}}V(K)$, причем в случае тетраэдра данная оценка неулучшаема. Аффинно-правильная шестиугольная призма, вписанная в указанный цилиндр, имеет объем $\geqslant \frac{2}{9}V(K)$, и еще больший объем имеет вписанная в него аффинно-правильная восьмиугольная призма. Соответствующие точные константы при приближении трехмерного тела аффинно-правильными 6- и 8-угольными призмами автору не известны.

Литература

1. A. Bielecki, K. Radziszewski, *Sur les parallélépipédes inscrits dans les corps convexes.* — Ann. Univ. Mariae Curie–Sklodowska, Sect. A8 (1954), 97–100 (1956).
2. В. В. Макеев, *О приближении трехмерного выпуклого тела цилиндрами.* — Алгебра и анализ **17** (2005), No. 2, 133–144.
3. В. В. Макеев, *Аффинно-вписанные и аффинно-описанные многоугольники и многогранники.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **231** (1995), 286–298.
4. В. В. Макеев, *О некоторых геометрических свойствах выпуклых трехмерных тел.* — Алгебра и анализ **14** (2002), No. 5, 96–109.

Makeev V. V. Parallelepipeds circumscribed about a convex body in 3-space.

It is proved that each convex body $K \subset \mathbb{R}^3$ of volume $V(K)$ is contained in a parallelepiped of volume $3\sqrt{2}\,V(K)$.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: pp11687@vm11687.spb.edu

Поступило 16 ноября 2005 г.