Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 329, 2005 г.

В. В. Макеев

О РАВНОРЕБЕРНЫХ СИМПЛЕКСАХ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Всюду в дальнейшем $(E, \|\cdot\|)$ – конечномерное нормированное вещественное пространство.

Легко проверить, что если $\dim E = 2$, то для любых двух точек $A_1, A_2 \in E$ найдутся по меньшей мере две такие точки $A_3 \in E$, что

$$\|A_1A_2\| = \|A_1A_3\| = \|A_2A_3\|,$$

т.е. любой отрезок служит основанием по крайней мере 2 равносторонних треугольников.

Петти [1] доказал, что если $\dim E = 3$, то для любых трех равноудаленных друг от друга точек $A_1, A_2, A_3 \in E$ найдется равноудаленная от них точка $A_4 \in E$ такая, что $\|A_1A_2\| = \|A_1A_4\|$. (Другими словами, в E всякий равносторонний треугольник служит основанием равнореберного тетраэдра.)

Ниже нам понадобится следующий результат, сформулированный в [3] и фактически доказанный в [4]. (См. [4, предложение 4.5].) Если $\dim E = 3$, то в E найдутся 4 равноудаленные друг от друга точки, которые также равноудалены от их общего центра тяжести.

В размерности 4 некоторые естественные утверждения не верны. Так, например, в [2] приведен пример четырехмерного нормированного пространства E и точек $A_1, A_2 \in E$ таких, что в E не существует трех точек A_3, A_4, A_5, равноудаленных от A_1 и A_2 и друг от друга на расстояние $\|A_1A_2\|$. (Иначе говоря, не каждый отрезок в E является ребром равнореберного симплекса.)

Тем не менее, имеет место следующий факт.

Теорема. *Пусть E – четырехмерное нормированное пространство, $x \geqslant 3/4$ – положительное число и $P \subset E$ – трехмерная плоскость. Тогда найдутся равноудаленные друг от друга точки*

Работа частично поддержана грантом НШ-1914.2003.1.

A_1, A_2, A_3, $A_4 \in P$ и равноудаленная от них точка $A_5 \in E$ такие, что $\|A_5A_1\| = x \cdot \|A_1A_2\|$.

Следствие. *Во всяком четырехмерном нормированном пространстве E существуют 5 точек, равноудаленных друг от друга.*

Другими словами, в E существует равнореберный симплекс, причем с основанием – в любой наперед заданной гиперплоскости P. Еще одна переформулировка: в E найдутся 5 попарно касающихся единичных шаров.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – центрально-симметричное строго выпуклое тело с центром симметрии O. (Здесь и далее O – начало координат.) Пусть T – вписанный в K тетраэдр с центром тяжести в O. Тогда в K нельзя вписать отличный от T положительный гомотет тетраэдра T.*

Доказательство. Предположив противное и совершив аффинное преобразование, в дальнейшем считаем тетраэдр $T = ABCD$ правильным с центром в O. Тогда тетраэдр $-T$ тоже вписан в тело K и выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(T \cup (-T))$ есть куб Q (рис. 1).

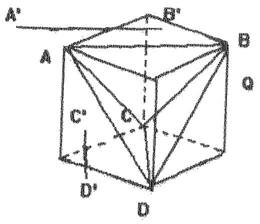

Рис. 1.

Пусть $T' = A'B'C'D'$ – положительный гомотет тетраэдра T, также вписанный в K. В силу строгой выпуклости тела K плоскости граней тетраэдров T и T' различны. Ровно 2 грани тетраэдра T' получаются из граней T сдвигом наружу, а 2 – сдвигом внутрь, поскольку в противном случае какая-то вершина одного из тетраэдров T и T' лежит внутри другого тетраэдра или внутри K.

Пусть, для определенности, наружу сдвигаются грани ABD и ABC (рис. 1), а внутрь – две другие.

В этом случае ребро $A'B'$ расположено выше верхней грани куба Q (рис. 1), а ребро $C'D'$ – выше нижней. Так как точки A', B', C', D' лежат вне Q, то либо A' лежит внутри трехгранного угла, "вертикального" трехгранному углу куба Q при вершине A, либо B' – внутри трехгранного угла, "вертикального" трехгранному углу куба Q при вершине B. В первом случае $A \in \mathrm{conv}(T' \cup (-T))$, а во втором – $B \in \mathrm{conv}(T' \cup (-T))$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. •

Доказательство теоремы. Теорему достаточно доказать для случая, когда единичный шар B в E является гладким строго выпуклым телом, что мы и предполагаем в дальнейшем. В остальных случаях теорема получается предельным переходом.

Рассмотрим центральное сечение единичного шара $B \subset E$ трехмерной плоскостью $P_0 \| P$. По цитированному выше предложению, в это сечение $P_0 \cap B$ вписан равнореберный тетраэдр T с центром тяжести в центре O шара B. В силу строгой выпуклости шара B тетраэдр T не вырожден (не лежит в двумерной плоскости), поскольку иначе единичный круг в его плоскости был бы параллелограммом.

Пусть P_1 – параллельная P_0 опорная трехмерная плоскость шара B. Рассмотрим всевозможные положительные гомотеты $A_1A_2A_3A_4$ тетраэдра T, вписанные в сечения $B \cap P_t$, где P_t — трехмерная плоскость, параллельная P_0 и P_1 и расположенная между ними (рис. 2).

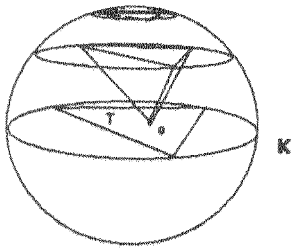

Рис. 2.

Для каждого такого гомотета рассмотрим отношение $\|OA_1\| : \|A_1A_2\|$. Для самого тетраэдра T отношение $\|OA_1\| : \|A_1A_2\| \leqslant$

$3/4$, так как $\|OA_1\| = \frac{3}{4}\|A_1G\|$, где G – центр тяжести грани $A_2A_3A_4$, а $\|A_1G\| \leqslant \|A_1A_2\|$. При $t_0 \to 1$ отношение $\|OA_1\|/\|A_1A_2\|$ для вписанных в $P_{t_0} \cap B$ гомотетов тетраэдра T стремится к бесконечности.

В ситуации общего положения множество M гомотетов тетраэдра T, вписанных в сечения $P_t \cap B$, является одномерным подмногообразием многообразия всех положительных гомотетов тетраэдра T, и его концевые точки – тетраэдры, вписанные в $P_{t_0} \cap B$ и $P_0 \cap B$.

Легко проверить, что в типичное сечение $P_t \cap B$ вписано нечетное число положительных гомотетов тетраэдра T (см. [5]). Поэтому M содержит связную компоненту M_1 – дугу, один из концов которой – тетраэдр, вписанный в $P_0 \cap B$, в силу леммы совпадающий с T, а другой конец – тетраэдр, вписанный в $P_t \cap B$. По очевидным соображениям непрерывности для некоторого тетраэдра $T \in M_1$ отношение $\|OA_1\|/\|A_1A_2\| = x$, что и завершает доказательство теоремы в ситуации общего положения. В остальных случаях теорема доказывается предельным переходом. •

Литература

1. Petty C., *Equilateral sets in Minkowski spaces.* — Proc. Amer. Math. Soc. **27** (1971), 369–374.
2. Brass P., *On equilateral simplices in normed spaces.* — Beiträge Algebra Geom. **40** (1999), 303–307.
3. Макеев В. В., *О некоторых геометрических свойствах выпуклых трехмерных тел.* — Алгебра и анализ **14**, № 5 (2002), 96–109.
4. Макеев В. В., *Трехмерные многогранники, вписанные и описанные вокруг выпуклых компактов.* 2. — Алгебра и анализ **13**, № 5 (2001), 110–134.
5. Макеев В. В., *Аффинно-вписанные и аффинно-описанные многоугольники и многогранники.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **231** (1995), 286–298.

Makeev V. V. Equilateral simplices in normed 4-space.

Let E be a 4-dimensional real normed space, $x \geqslant 3/4$ a positive number, and $P \subset E$ a 3-plane. It is proved that there exist 4 equidistant points A_1, A_2, A_3, $A_4 \in P$ and a point $A_5 \in E$ such that $\|A_5A_i\| = x \cdot \|A_1A_2\|$ for $i = 1, 2, 3, 4$. In particular, E contains an equilateral simplex.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: pp1687@vm1687.spb.edu

Поступило 25 декабря 2005 г.