Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 329, 2005 г.

В. В. Макеев

ГЕОМЕТРИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ НА ЕВКЛИДОВОЙ СФЕРЕ

Обозначения.

- $\mathbb{R}^n$ – стандартное n-мерное евклидово пространство.
- $O \in \mathbb{R}^n$ – начало координат.
- $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ – стандартная единичная сфера с центром O.

§1. О геометрии пары норм

Начнем с нескольких возможных определений ортогональности прямых в конечномерном вещественном нормированном пространстве.

Назовем две проходящие чере O прямые ℓ_1 и ℓ_2 в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ $\|\cdot\|$-*ортогональными*, если для них выполняется одно из нижеперечисленных условий 1–4.

1. Для коллинеарных им ортов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ выполняется $\|\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\|$.

2. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 делят площадь единичного круга с центром O в их плоскости на 4 равные части.

3. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 делят периметр единичной окружности с центром O в их плоскости на 4 равные части.

4. Любые две гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, проходящие через O и ортогональные прямым ℓ_1 и ℓ_2 относительно некоторой зафиксированной в $\mathbb{R}^n$ евклидовой структуры, делят объем единичного шара нормы $\|\cdot\|$ на 4 равные части.

Теорема 1. *При любом вышеописанном понимании ортогональности в $\mathbb{R}^n$ найдется набор из n прямых, попарно-ортогональных относительно двух наперед заданных в $\mathbb{R}^n$ норм.*

Замечание 1. При четвертом определении ортогональности мы получаем утверждение из [6] о том, что для любых центрально-

Работа частично поддержана грантом НШ-1914.2003.1.

симметричных выпуклых тел $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ с общим центром симметрии O найдутся n гиперплоскостей, проходящих через O, любые 2 из которых делят объем каждого из тел K_1, K_2 на 4 равные части. Отсюда в силу центральной симметрии тел K_1, K_2 автоматически следует, что любые 3 гиперплоскости делят объем каждого из тел K_1, K_2 на 8 равных частей.

Обозначения.

• $\mathbb{RP}^{n-1}$ – модель проективного пространства, состоящая из прямых в $\mathbb{R}^n$, проходящих через O.

• $\mathfrak{M}$ – "взрезанное произведение" n экземпляров $\mathbb{RP}^{n-1}$ (т.е. подмножество произведения $(\mathbb{RP}^{n-1})^n$, состоящее из точек с различными координатами), профакторизованное по симметрической группе перестановок координат.

• $\mathfrak{N}$ – многообразие неупорядоченных наборов из n взаимноперпендикулярных прямых в $\mathbb{R}^n$, проходящих через O. Очевидно, $\dim \mathfrak{N} = n(n-1)/2$.

• Пусть

$$[\mathfrak{N}] \in H_{n(n-1)/2}(\mathfrak{M}; \mathbb{Z}_2)$$

– класс гомологий $\mathbb{Z}_2$-цикла, реализованного многообразием $\mathfrak{N}$.

Утверждение. *Индекс самопересечения цикла $[\mathfrak{N}]$ в многообразии $\mathfrak{M}$ равен $1 \in \mathbb{Z}_2$.*

Доказательство. Рассмотрим аффинное преобразование $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, переводящее шар с центром O в разноосный эллипсоид E с тем же центром. Преобразование A индуцирует преобразование $\mathbb{RP}^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ и, следовательно, преобразование взрезанного произведения: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$. Обозначим через $A(\mathfrak{N})$ образ многообразия $\mathfrak{N}$ при последнем преобразовании. Очевидно, что циклы, представленные в $\mathfrak{M}$ многообразиями $\mathfrak{N}$ и $A(\mathfrak{N})$, гомологичны, так как аффинное преобразование A можно гладко продеформировать в тождественное. Ясно, что $\mathfrak{N} \cap A(\mathfrak{N})$ состоит из одной точки – набора осей эллипсоида E. Трансверсальность $\mathfrak{N}$ и $A(\mathfrak{N})$ проверяется без труда (ср. [7]). $\square$

Доказанное утверждение можно считать топологическим вариантом теоремы о существовании набора из n попарно-ортогональных осей относительно двух скалярных произведений в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала случай, когда нормы являются гладкими функциями вне нуля, что мы и предполагаем в дальнейшем.

Покажем, что в ситуации общего положения имеется нечетное число m искомых неупорядоченных наборов прямых.

Заметим, что размерность многообразия неупорядоченных наборов из n прямых, проходящих через O, равна $n^2 - n$. Требования теоремы налагают на искомый набор прямых $n^2 - n$ независимых условий. Поэтому в типичной ситуации имеется конечное число m требуемых наборов прямых. По стандартным топологическим соображениям четность числа m не зависит от выбора типичной ситуации, так как все вышерассматриваемые нормы гладко деформируемы друг в друга, а условия теоремы не позволяют прямым из наборов неограниченно сближаться, что гарантирует компактность искомых наборов прямых в процессе деформации одной нормы в другую.

Как хорошо известно, если нормы евклидовы и общего положения, то искомый набор осей единственен.

Таким образом, теорема доказана для всюду плотного множества пар норм, а в остальных случаях доказывается предельным переходом. $\square$

Замечание 2. Для прямых в нормированном пространстве можно ввести много симметричных отношений ортогональности. Как видно из вышесказанного, для выполнения для них теоремы о существовании n попарно ортогональных прямых в $\mathbb{R}^n$ одновременно для двух заданных норм необходимо, чтобы для евклидовых норм эти отношения совпадали с обычным и “гладко” зависели от “гладкой” нормы, т.е. чтобы в типичном гладком однопараметрическом семействе норм $\|\cdot\|_t$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, такие наборы прямых составляли бы гладкое компактное и с краем подмногообразие в $\mathfrak{M} \times [0,1]$ размерности $n(n-1)/2+1$, трансверсальное к краю $\partial(\mathfrak{M} \times [0,1]) = \mathfrak{M} \times 0 \cup \mathfrak{M} \times 1$.

§2. Четные функции на евклидовой сфере

Назовем числовую функцию $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$ *четной*, если для любой точки $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ выполняется $f(-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. Пример такой функции дает любая норма в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Для любой непрерывной четной числовой функции $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$ найдется ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ такой,* *что при любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ выполняется*

$$f\left(\frac{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j}{\sqrt{2}}\right).$$

Следствие. *Для всякого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ и его внутренней точки O найдутся n попарно-ортогональных ортов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ таких, что для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ тело K высекает равные отрезки на лучах, проходящих через O вдоль векторов $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$.* □

Утверждение теоремы непосредственно вытекает из доказанной ниже леммы.

Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие положительно-ориентированных (правильных) 2^n-эдров в $\mathbb{R}^n$ с занумерованными ребрами и центром O. Группа G сохраняющих ориентацию самосовмещений 2^n-эдра действует перестановками в множестве его ребер. Рассмотрим ее действие в $\mathbb{R}^{2n(n-1)}$ перестановками координат точек с номерами, совпадающими с номерами ребер 2^n-эдра. Пусть $L_1 \subset \mathbb{R}^{2n(n-1)}$ – подпространство размерности $n(n-1)$, состоящее из точек, у которых равны координаты с номерами ребер 2^n-эдра, симметричных относительно центра. Пусть $L_2 \subset L_1$ – подпространство размерности $n(n-1)/2$ с равными четверками координат точек, с номерами, соответствующими ребрам 2^n-эдра, составляющими квадрат с центром O.

Лемма. *Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}^{2n(n-1)}$ – непрерывное G-эквивариантное отображение, и пусть $f(M) \subset L_1$. Тогда $f(M) \cap L_2 \neq \emptyset$.*

Доказательство. Лемму достаточно доказать для гладких отображений. В остальных случаях она доказывается предельным переходом.

Так как

$$\dim M = \dim L_1 - \dim L_2 = n(n-1)/2,$$

то в ситуации общего положения (т.е. когда f трансверсально к L_2) множество $f(M) \cap L_2$ состоит из конечного числа точек, а его прообраз $f^{-1}(f(M) \cap L_2)$ состоит из конечного числа m G-орбит. Так как все рассматриваемые G эквивариантные гладкие отображения $f\colon M \to L_1$ гладко гомотопны (например, линейно гомотопны), то четность числа m не зависит от выбора f в ситуации общего положения.

Покажем, что m нечетно. Для этого рассмотрим отображение

$$f_1\colon M \to L_1,$$

для которого i-я координата точки $f(\mathfrak{m})$ для 2^n-эдра $\mathfrak{m} \in M$ равна длине его i-го ребра относительно некоторой новой евклидовой нормы $\|\cdot\|_2$. Очевидно, что условие $f(\mathfrak{m}) \in L_2$ равносильно тому, что оси 2^n-эдра $\mathfrak{m}$ ортогональны относительно нового скалярного произведения, а для евклидовой нормы $\|\cdot\|_2$ в ситуации общего положения такой набор осей единственен, и нужная трансверсальность проверяется без труда. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы. Для каждого положительно-ориентированного ортонормированного базиса $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ рассмотрим n-мерный 2^n-эдр, являющийся выпуклой оболочкой концов векторов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, -\mathbf{e}_1, \dots, -\mathbf{e}_n\}$, и занумеруем его ребра. Теперь остается применить лемму к отображению f многообразия M положительно-ориентированных ортонормированных базисов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в $\mathbb{R}^{2n(n-1)}$, координатные функции которого суть $f\left(\frac{\pm\mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j}{\sqrt{2}}\right)$, причем номера координатных функций совпадают с номерами ребер 2^n-эдра, построенного по реперу $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. $\square$

Применяя доказанную теорему 2 к функции $(f(x) + f(-x))/2$ для произвольной непрерывной функции f на евклидовой сфере, получаем следствие.

Следствие. *Для любой непрерывной функции $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$ найдется ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ такой, что при любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ выполняется*

$$f\Big(\frac{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j}{\sqrt{2}}\Big) + f\Big(\frac{-\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j}{\sqrt{2}}\Big) = f\Big(\frac{\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j}{\sqrt{2}}\Big) + f\Big(\frac{\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i}{\sqrt{2}}\Big). \qquad \square$$

§3. Дополнение: Покрышки для множеств данного диаметра

У леммы из предыдущего параграфа есть еще одно применение. Мы построим семейство $2n^2$-гранников в $\mathbb{R}^n$, ограниченных n^2 парами удаленных друг от друга на расстояние параллельных d гиперплоскостей, такое, что всякое подмножество $\mathbb{R}^n$ диаметра

d можно поместить посредством движения в один из многогранников семейства.

Как известно, всякое подмножество $\mathbb{R}^n$ диаметра d содержится в выпуклом множестве постоянной ширины d, т.е. с расстоянием d между любыми парами параллельных опорных гиперплоскостей. Поэтому в дальнейшем возможность поместить в многогранники из семейства достаточно проверить лишь для подмножеств $\mathbb{R}^n$ постоянной ширины.

Проведя к плоской фигуре $K \subset \mathbb{R}^2$ постоянной ширины две пары перпендикулярных опорных прямых, мы опишем вокруг нее квадрат. Проведя к K две пары опорных прямых, перпендикулярных диагоналям построенного квадрата, мы опишем вокруг K равноугольный восьмиугольник. Очевидные соображения непрерывности показывают, что вокруг K можно описать равноугольный восьмиугольник, полученный из квадрата отсечением двух пар равных равнобедренных прямоугольных треугольников (рис. 1).

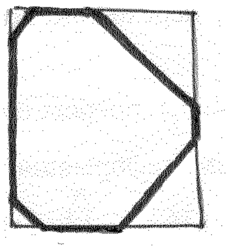

Рис. 1.

Нижеследующая теорема является многомерным аналогом этого утверждения.

Теорема 3. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое тело постоянной ширины. Тогда найдется ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ такой, что*

(1) *пары ортогональных ортам $\mathbf{e}_i$ и опорных к телу K гиперплоскостей ограничивают описанный вокруг K куб Q с центром O, причем*

(2) *для $1 \leqslant i < j \leqslant n$ середины ортогональных проекций тела K на прямые, проходящие через O и параллельные векторам $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$, находятся на равных расстояниях от O.*

Доказательство. Для каждого положительно-ориентированного ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, как и выше, построим положительно-ориентированный 2^n-эдр m, занумеруем его ребра и сопоставим с m точку $f(m) \in \mathbb{R}^{2n(n-1)}$, координаты которой равны расстояниям до O от середин ортогональных проекций тела K на прямые, параллельные векторам $\mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j$ для $1 \leqslant i < j \leqslant n$, проходящим через центр описанного вокруг тела K куба Q, ограниченного опорными к телу K и ортогональными векторам $\mathbf{e}_i$ гиперплоскостями, как это описано в теореме, причем номера координат равны номерам ребер 2^n-эдра.

Теперь для доказательства теоремы достаточно применить лемму к построенному отображению многообразия 2^n-эдров. $\square$

Замечание. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – тело постоянной ширины. Доказанная теорема гарантирует существование описанного вокруг K $2n^2$-гранника, ограниченного n^2 парами параллельных опорных гиперплоскостей, из описанного в теореме $n(n-1)/2$-параметрического семейства $2n^2$-гранников, которые параметризуются $n(n-1)/2$ расстояниями середин ортогональных проекций тела K от центра O указанного в теореме описанного вокруг тела K куба Q.

§4. Непрерывные функции на евклидовой сфере

Недавно была опровергнута старая гипотеза о том, что любые n точек на сфере S^{n-1} можно вращением сферы поместить в один уровень любой непрерывной функции на этой сфере [4, 3]. Однако для некоторых конкретных конфигураций точек сферы это утверждение верно. (Обзор подобных результатов имеется в [5].)

Ниже мы рассматриваем более общую задачу, когда для заданных точек сферы S^{n-1} путем ее вращения мы добиваемся выполнения некоторых линейных соотношений с коэффициентами ± 1 между значениями в этих точках заданной на сфере непрерывной функции.

Наша основная цель в §§4–6 состоит в доказательстве следующих двух теорем.

Теорема 4. *Пусть $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$ – произвольная непрерывная числовая функция. Тогда найдется $(n-1)$-мерный куб с центром O, вписанный в сферу S^{n-1} и такой, что все суммы значений функции f в вершинах его $(n-3)$-мерных граней равны между собой.*

Замечания. 1. При $n = 3$ утверждение теоремы превращается в теорему Дайсона [1] о том, что всякая непрерывная функция $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ принимает равные значения в вершинах некоторого квадрата, вписанного в большую окружность сферы S^2.

2. При $n = 4$ теорема 4 утверждает, что для любой непрерывной функции $f\colon S^3 \to \mathbb{R}$ найдется такой вписанный в большую двумерную сферу сферы S^3 трехмерный куб, при шахматной раскраске вершин которого функция f принимает равные значения во всех его "белых" вершинах, а также принимает равные значения во всех его "черных" вершинах.

Для четных функций имеет место более сильный результат.

Теорема 5. *Пусть $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$ – непрерывная четная числовая функция. Тогда найдется вписанный в сферу S^{n-1} n-мерный куб такой, что все суммы значений функции f в вершинах его $(n-3)$-мерных граней равны между собой.*

Замечания. 1. При $n = 2$ утверждение теоремы превращается в теорему [2] о том, что четная функция на двумерной сфере принимает равные значения в вершинах некоторого куба.

2. При $n = 4$ теорема утверждает, что для непрерывной четной функции $f\colon S^3 \to \mathbb{R}$ найдется такой вписанный в сферу четырехмерный куб, при шахматной раскраске вершин которого функция f принимает равные значения во всех его "белых" вершинах, а также принимает равные значения во всех его "черных" вершинах.

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теорем 4 и 5.

§5. Доказательство теоремы 5

Обозначим через $\mathfrak{M}$ многообразие положительно-ориентированных единичных кубов в $\mathbb{R}^n$ с центром O. Вершины куба из $\mathfrak{M}$ будем обозначать через $A_1, \dots, A_{2^n}$. Пусть G – группа сохраняющих ориентацию самосовмещений куба. Она действует в $\mathfrak{M}$ и в пространстве $\mathbb{R}^{2^n}$, переставляя координаты точек так же, как вершины кубов $A_1, \dots, A_{2^n}$. Пусть $L_1 \subset \mathbb{R}^{2^n}$ – подпространство, состоящее из точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2^n}$ с равными суммами координат с номерами, равными номерам вершин граней куба старшей размерности $n-1$. Наконец, пусть $L_2 \subset L_1$ – подпространство, состоящее из точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2^n}$ с равными суммами координат с номерами, равными номерам вершин граней куба размерности $n-2$. Легко проверить, что

$$\dim L_1 - \dim L_2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Лемма 1. *Пусть $f\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^{2^n}$ – непрерывное G-эквивариантное отображение такое, что $f(\mathfrak{M}) \subset L_1$. Тогда $f(\mathfrak{M}) \cap L_2 \neq \emptyset$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда отображение f – гладкое, что мы и предполагаем в дальнейшем. В остальных случаях она доказывается предельным переходом.

Так как $\dim \mathfrak{M} = n(n-1)/2$, то в ситуации общего положения $f^{-1}(L_2)$ представляет собой конечное G-инвариантное множество точек. Покажем, что в ситуации общего положения это множество состоит из нечетного числа ℓ G-орбит.

По стандартным топологическим соображениям вычет $\ell \mod 2$ не зависит от типичного отображения f, поскольку все такие отображения гладко и G-эквивариантно деформируемы друг в друга (например, линейно гомотопны).

Приведем пример отображения с $\ell \equiv 1 \mod 2$. Зафиксируем какой-нибудь разноосный эллипсоид E с центром O. Рассмотрим произвольный куб $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$. Тогда n взаимно-ортогональных гиперплоскостей, проходящих через O параллельно граням куба $\mathfrak{m}$, делят объем, ограниченный эллипсоидом E, на 2^n частей. Пусть $f(\mathfrak{m})$ – точка, i-я координата которой равна объему части, содержащей вершину A_i куба $\mathfrak{m}$. Покажем, что для такого отображения f имеем $\ell = 1$.

Пусть $P_1, \dots, P_n$ – взаимно-ортогональные гиперплоскости, проходящие через O и такие, что любые две из них делят объем, ограниченный эллипсоидом E, на 4 равные части. Пусть $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – аффинное преобразование, переводящее эллипсоид E в сферу. Тогда гиперплоскости $\alpha(P_1), \dots, \alpha(P_n)$ также взаимно ортогональны, поскольку любые две из них делят объем шара на 4 равные части. Следовательно, исходные гиперплоскости $P_1, \dots, P_n$ перпендикулярны осям эллипсоида E.

То, что рассматриваемая ситуация – общего положения, следует из того, что при движении вышеуказанного набора гиперплоскостей с ненулевой скоростью начинает нарушаться хотя бы одно из условий равенства объемов. Лемма 1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5. Отождествим $\mathfrak{M}$ с многообразием n-мерных кубов, вписанных в сферу S^{n-1}.

Теперь достаточно применить лемму 1 к отображению

$$F\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^{2^n}, \quad (A_1, \dots, A_{2^n}) \mapsto (f(A_1), \dots, f(A_{2^n})),$$

где $A_1, \dots, A_{2^n}$ – вершины соответствующего куба.

Поскольку функция f – четная, то из того, что суммы ее значений в вершинах $(n-2)$-мерных граней куба одинаковы, следует, что одинаковы и суммы значений в вершинах его $(n-3)$-мерных граней. □

§6. Доказательство теоремы 4

Пусть теперь $\mathfrak{M}'$ – многообразие единичных $(n-1)$-мерных кубов с вершинами $A_1, \dots, A_{2^{n-1}}$ и центром O, а G – группа сохраняющих ориентацию движений пространства $\mathbb{R}^n$, переводящих некоторый фиксированный $(n-1)$-мерный куб в себя.

Лемма 2. *Пусть $f\colon \mathfrak{M}' \to \mathbb{R}^{2^{n-1}}$ непрерывное G-эквивариантное отображение. Тогда $f(\mathfrak{M}') \cap L_2 \neq \emptyset$.*

Доказательство. Как и в лемме 1, проверяется, что для типичного гладкого f имеется нечетное число требуемых положений куба.

Модельное отображение $f\colon \mathfrak{M}' \to \mathbb{R}^{2^{n-1}}$ строится аналогично с помощью сечений разноосного эллипсоида в $\mathbb{R}^n$ с центром O $n-1$ попарно-ортогональными гиперплоскостями, проходящими через отличную от O точку на одной из его осей. □

Доказательство теоремы 4. Отождествим $\mathfrak{M}'$ с многообразием $(n-1)$-мерных кубов, вписанных в большие $(n-2)$-мерные сферы.

Достаточно применить лемму 2 к отображению

$$F\colon \mathfrak{M}' \to \mathbb{R}^{2^{n-1}}, \quad (A_1, \dots, A_{2^{n-1}}) \mapsto (f(A_1), \dots, f(A_{2^{n-1}}),$$

где $A_1, \dots, A_{2^n}$ – вершины соответствующего куба. □

Литература

1. F. J. Dyson, *Continuous functions defined on spheres.* — Ann. Math. **54** (1951), 534–536.
2. T. Hausel, E. Makai, A. Szűcz, *Inscribing cubes and covering by rhombic dodecahedra via equivariant topology.* — Mathematica (2001).

3. A. Hinrichs, C. Richter, *New counterexamples to Knaster's conjecture.* Preprint (2003).
4. B. S. Kashin, S. J. Szarek, *The Knaster problem and the geometry of high dimensional cubes.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1, **336** (2003), 931–936.
5. В. В. Макеев, *Задача Кнастера о непрерывных отображениях сферы в евклидово пространство.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **167** (1987), 169–178.
6. В. В. Макеев, *Несколько теорем о делении непрерывно распределенной массы.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **329** (2006).
7. R. Rattray, *An antipodal point, orthogonal point theorem.* — Ann. Math. **60** (1954), 502–512.

Makeev V. V. Geometry of finite-dimensional normed spaces and continuous functions on the Euclidean sphere.

Let $\mathbb{R}^n$ be the n-dimensional Euclidean space, and let $\|\cdot\|$ be a norm in $\mathbb{R}^n$. Two lines ℓ_1 and ℓ_2 in $\mathbb{R}^n$ are said to be $\|\cdot\|$-orthogonal if their $\|\cdot\|$-unit directional vectors $\mathbf{e}_1$ and $\mathbf{e}_2$ satisfy $\|\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\|$. It is proved that for any two norms $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|'$ in $\mathbb{R}^n$ there are n lines $\ell_1,\dots,\ell_n$ that are $\|\cdot\|$- and $\|\cdot\|'$-orthogonal simultaneously.

Let $f\colon S^{n-1}\to\mathbb{R}$ be a continuous function on the unit sphere $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ with center O. It is proved that there exists an $(n-1)$-cube C centered at O, inscribed in S^{n-1}, and such that all sums of values of f at the vertices of $(n-3)$-faces of C are pairwise equal. If the function f is even, then there exists an n-cube with the same properties. Furthermore, there exists an orthonormal basis $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ such that for $1\leqslant i<j\leqslant n$ we have $f\left(\frac{\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j}{\sqrt{2}}\right)$.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: pp11687@vm11687.spb.edu

Поступило 1 марта 2005 г.