Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 329, 2005 г.

Р. Я. Низкий

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И НАПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Введение

Одним из способов описания электромагнитного поля (ЭМ-поля) является задание в каждой точке (пространства Минковского M^4) бивектора над векторным пространством Минковского M_0. Целью работы является сопоставление с бивектором точки многообразия направлений физического пространства G^1. Оно основано на специальном разложении бивектора в сумму двух слагаемых, связанных, соответственно, со значениями электрического и магнитного полей в некотором каноническом классе систем координат.

В §1 приводятся различные способы описания ЭМ-поля и записи уравнений Максвелла в вакууме, рассматриваются их отличия друг от друга. Даются определения направления ЭМ-поля, электрического и магнитного коэффициентов.

В §2 уравнения Максвелла записываются в терминах направления ЭМ-поля.

В §3 вводятся дифференциальные операторы на некоторых классах отображений, с помощью них уравнения Максвелла, сформулированные в предыдущем разделе, записываются в инвариантной форме.

Наконец, §§4 и 5 посвящены ограничениям, которые уравнения Максвелла накладывают на направление ЭМ-поля. В §4 доказывается, что только постоянное ЭМ-поле может иметь постоянное направление. В §5 рассматриваются поля, для которых электрический и магнитный коэффициенты постоянны.

1. Различные способы описания электромагнитного поля

1.1. Рассмотрим пространство Минковского $M^4 = \mathbb{R}^4_{1,3}$ как модель пространства-времени и различные способы описания элек-

Работа частично поддержана грантом НШ-1914.2003.1.

тромагнитного поля. Выбранная точка $x_0 \in M^4$ и тетрада Минковского (e_0, e_1, e_2, e_3) – базис векторного пространства Минковского M_0, такой, что $\langle e_0, e_0 \rangle = 1$,

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = -1$$

и $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ при $i \neq j$, – задают в M^4 глобальную инерциальную систему координат (x^0, x^1, x^2, x^3). Это позволяет каждую точку пространства Минковского однозначно описать с помощью пространственной $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ и временной $t = x^0/c \in \mathbb{R}$ координат. В таких обозначениях ЭМ-поле принято описывать двумя отображениями, сопоставляющими с каждой точкой пространства Минковского элемент трехмерного арифметического евклидова пространства:

$$E : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, (\mathbf{x}, t) \mapsto E(\mathbf{x}, t) = (E_1(\mathbf{x}, t), E_2(\mathbf{x}, t), E_3(\mathbf{x}, t)), \quad (1)$$

$$H : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, (\mathbf{x}, t) \mapsto H(\mathbf{x}, t) = (H_1(\mathbf{x}, t), H_2(\mathbf{x}, t), H_3(\mathbf{x}, t)). \quad (2)$$

Отображение E называют напряженностью электрического поля, а отображение H – напряженностью магнитного поля.

Взяв другую тетраду Минковского $(\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$, такую что $e_0 = \tilde{e}_0$, мы получим другую систему координат $(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ с $x^0 = \tilde{x}^0$. При переходе от одной такой системы координат к другой, который является, по сути, заменой $\mathbf{x}$ на $\tilde{\mathbf{x}}$, величины E_1, E_2, E_3, так же, как и H_1, H_2, H_3, меняются как координаты вектора.

Отображения E и H для фиксированного ЭМ-поля определяются выбором тетрады (e_0, e_1, e_2, e_3). Но величины

$$(E, H)_{\mathbb{R}^3}, \quad (3)$$

$$(E, E)_{\mathbb{R}^3} - (H, H)_{\mathbb{R}^3}, \quad (4)$$

где $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^3}$ обозначает скалярное произведение в пространстве значений отображений E и H, не зависят от выбора тетрады и называются инвариантами ЭМ-поля (см. [6, §25]).

В этих обозначениях уравнения Максвелла, задающие ограничения для E и H, которые накладывают на ЭМ-поля законы электродинамики, в простейшем случае – в вакууме – выглядят так:

$$\operatorname{div} E = \frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} = 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} E = \left(\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3}, \frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1}, \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2}\right) = -\frac{\partial H}{\partial x^0}, \tag{6}$$

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial H_1}{\partial x^1} + \frac{\partial H_2}{\partial x^2} + \frac{\partial H_3}{\partial x^3} = 0, \tag{7}$$

$$\operatorname{rot} H = \left(\frac{\partial H_3}{\partial x^2} - \frac{\partial H_2}{\partial x^3}, \frac{\partial H_1}{\partial x^3} - \frac{\partial H_3}{\partial x^1}, \frac{\partial H_2}{\partial x^1} - \frac{\partial H_1}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial E}{\partial x^0}. \tag{8}$$

От популярной формы записи уравнений Максвелла уравнения (5)–(8) отличаются только использованием $x^0 = ct$ вместо t.

Уравнения (5)–(8) верны для систем координат, задаваемых тетрадами Минковского с фиксированными временной и пространственной ориентациями (см. [3]). Любые две такие тетрады (e_0, e_1, e_2, e_3) и $(\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ задают одну и ту же ориентацию M_0, и, кроме того, $\langle e_0, \tilde{e}_0\rangle > 0$. Переход от одной такой системы координат к другой является ограниченным преобразованием Лоренца, т.е. преобразованием из компоненты связности единицы группы Лоренца. В дальнейшем мы будем рассматривать только допустимые тетрады Минковского – тетрады с фиксированными временной и пространственной ориентациями.

В каждой такой системе координат уравнения Максвелла являются системой из 8 дифференциальных уравнений в частных производных, связывающей 6 вещественнозначных функций, заданных в M^4. Несмотря на то, что отображения E и H существенно зависят от системы координат, системы уравнений (5)–(8), записанные для разных систем координат, эквивалентны. Однако для каждого из этих уравнений в отдельности среди аналогичных уравнений для другой системы координат в общем случае не найдется эквивалентного.

1.2. Более симметричный вид уравнений Максвелла удается получить, рассматривая для каждой системы координат величину

$$F_{ik}(x) = \begin{pmatrix} 0 & E_1(x) & E_2(x) & E_3(x) \\ -E_1(x) & 0 & -H_3(x) & H_2(x) \\ -E_2(x) & H_3(x) & 0 & -H_1(x) \\ -E_3(x) & -H_2(x) & H_1(x) & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

зависящую от $x \in M^4$. Известно, что свойства ЭМ-поля таковы, что при переходе от системы координат, заданной (e_0, e_1, e_2, e_3), к системе, заданной другой допустимой тетрадой, координаты F_{ik} изменяются как координаты тензора ранга $(0,2)$. Тензор F_{ik}, определяемый равенством (9), называется тензором ЭМ-поля. Так как F_{ik} – кососимметрический, то его можно записать в виде дифференциальной формы:

$$\begin{aligned} F(x) = E_1(x)dx^0 \wedge dx^1 + E_2(x)dx^0 \wedge dx^2 + E_3(x)dx^0 \wedge dx^3 \\ - H_3(x)dx^1 \wedge dx^2 + H_2(x)dx^1 \wedge dx^3 - H_1(x)dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

В [1, §19] для кососимметрических тензоров в псевдоримановом пространстве определен оператор Ходжа $*$, с помощью которого уравнения Максвелла в вакууме принимают следующий вид (см. [7]):

$$\begin{cases} dF = 0 \\ d(*F) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

где dF и $d(*F)$ – внешние дифференциалы дифференциальных форм F и $*F$.

Каждое из уравнений (10) является равенством тензоров и не зависит от системы координат. Однако система (10) описывает только свойства тензора F_{ik} в целом и не использует понятия электрического и магнитного полей.

1.3. В псевдоримановом пространстве существует каноническое соответствие между тензорами различного ранга, которое устанавливается с помощью поднятия и опускания индексов (описание и доказательство корректности этой операции дано в [1, §19]). Таким образом, тензор ЭМ-поля F_{ik} может быть записан и в контравариантной форме как F^{ik}, где

$$F^{ik} = g^{ip}g^{kq}F_{pq}.$$

Для всех рассматриваемых нами систем координат в пространстве Минковского метрический тензор g^{ij} имеет вид

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

F^{ik} является полем кососимметрических тензоров ранга $(2,0)$, а значение ЭМ-поля $F^{ik}(x_0)$ в точке x_0 – бивектором над M_0. В системе координат, заданной тетрадой (e_0, e_1, e_2, e_3), этот бивектор имеет вид

$$F(x_0) = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant 3} F^{ij}(x_0) e_i \wedge e_j \in \Lambda_2(M_0).$$

В терминах напряженностей электрического и магнитного полей в данной системе координат его можно записать как

$$F(x_0) = -E_1 e_0 \wedge e_1 - E_2 e_0 \wedge e_2 - E_3 e_0 \wedge e_3 - H_3 e_1 \wedge e_2 + H_2 e_1 \wedge e_3 - H_1 e_2 \wedge e_3. \tag{11}$$

Инварианты (3) и (4) с помощью тензора электромагнитного поля записываются как

$$\frac{1}{2} F_{ik} F^{ik}, \tag{12}$$

$$-\frac{1}{4} \varepsilon^{ijkl} F_{ij} F_{kl}, \tag{13}$$

соответственно (см. [1, §21]). Здесь ε^{ijkl} – величина, меняющая знак при перестановке любых двух индексов и такая, что $\varepsilon^{1234} = 1$. При замене координат, соответствующей переходу от одной допустимой тетрады Минковского к другой, ε^{ijkl} является кососимметрическим тензором (см. [6, §6]). Величины (12) и (13) являются тензорами ранга (0,0) и не зависят от координат в случае, если системы координат соответствуют допустимым тетрадам.

В [4] определен оператор Ходжа для внешней алгебры над линейным пространством со скалярным произведением. Суженный на подпространство бивекторов $\Lambda_2(M_0)$ внешней алгебры $\Lambda(M_0)$ он является линейным оператором на $\Lambda_2(M_0)$:

$$* : \Lambda_2(M_0) \to \Lambda_2(M_0),$$

который, как показано в работе [5], действует на базисе, порожденном допустимой тетрадой Минковского (e_0, e_1, e_2, e_3), следующим образом:

$$\begin{gathered} *(e_0 \wedge e_1) = -e_2 \wedge e_3, \quad *(e_0 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_3, \quad *(e_0 \wedge e_3) = -e_1 \wedge e_2, \\ *(e_1 \wedge e_2) = e_0 \wedge e_3, \quad *(e_1 \wedge e_3) = -e_0 \wedge e_2, \quad *(e_2 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_2. \end{gathered} \tag{14}$$

Если каждый тензор ранга $(0, 2)$ в пространстве Минковского отождествить с бивектором из $\Lambda_2(M_0)$ с помощью поднятия индексов, то операторы Ходжа $*$, определенные в [4] и [1], будут отличаться на пространстве бивекторов знаком, и справедливость второго уравнения из (10) не зависит от того, какой из этих операторов используется. В дальнейшем символом $*$ будем обозначать только оператор, определенный в [4], и для которого верно (14).

Непосредственно из (14) следует

$$**=-\mathrm{id}_{\Lambda_2(M_0)}, \tag{15}$$

что позволяет ввести на $\Lambda_2(M_0)$ структуру комплексного линейного пространства, полагая для любых $\varphi\in\Lambda_2(M_0)$, $z\in\mathbb{C}$

$$z\varphi=(\operatorname{Re}z)\varphi+(\operatorname{Im}c)*\varphi. \tag{16}$$

В работе [5] рассматривалось лоренц-инвариантное скалярное произведение на пространстве бивекторов $\Lambda_2(M_0)$. Если (e_0,e_1,e_2,e_3) – тетрада Минковского, то базисные бивекторы

$$e_0\wedge e_1,\quad e_0\wedge e_2,\quad e_0\wedge e_3,\quad e_1\wedge e_2,\quad e_1\wedge e_3,\quad e_2\wedge e_3$$

составляют ортогональный базис $\Lambda_2(M_0)$ для данного скалярного произведения, а скалярные квадраты этих бивекторов равны

$$\langle e_0\wedge e_1,e_0\wedge e_1\rangle=\langle e_0\wedge e_2,e_0\wedge e_2\rangle=\langle e_0\wedge e_3,e_0\wedge e_3\rangle=-1,$$

$$\langle e_1\wedge e_2,e_1\wedge e_2\rangle=\langle e_1\wedge e_3,e_1\wedge e_3\rangle=\langle e_2\wedge e_3,e_2\wedge e_3\rangle=1.$$

С помощью этого скалярного произведения выделим некоторые специальные подмножества $\Lambda_2(M_0)$. Пусть K_0 – конус бивекторов со скалярным произведением, равным нулю, (такие бивектора называются изотропными)

$$K_0=\{\varphi\in\Lambda_2(M_0)\mid\langle\varphi,\varphi\rangle=0\},$$

K_2 – конус простых бивекторов, т.е. бивекторов, представимых в виде внешнего произведения двух векторов,

$$K_2=\{v_1\wedge v_2\in\Lambda_2(M_0)\mid v_1,v_2\in M_0\}.$$

Многообразие направлений физического пространства

$$G^1=\{\omega\in K_2\mid\langle\omega,\omega\rangle=-1\}$$

(см. [5]) с метрикой, индуцированной вложением в $\Lambda_2(M_0)$, является четырехмерным псевдоримановым многообразием с сигнатурой $(++--)$. Его можно рассматривать как некоторый аналог грассманова многообразия над евклидовым пространством для случая пространства Минковского, так как каждому $\omega\in G^1$ можно поставить в соответствие ориентированную плоскость в M_0, содержащую времениподобное направление (вектор с положительным скалярным квадратом).

В [2] показано, что для любого бивектора $\varphi \in \Lambda_2(M_0)$, $\varphi \notin K_0 \cap K_2$, существуют $\omega \in G^1$ и $e, h \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\varphi = e\omega + h(*\omega)$$

или, на языке комплексной структуры (16),

$$\varphi = z\omega, \tag{17}$$

где $z = e + ih$.

Комплексная структура (16) и скалярное произведение на пространстве бивекторов $\Lambda_2(M_0)$ позволяют ввести комплекснозначную билинейную квадратичную форму

$$A(\omega, \varphi) = \langle \omega, \varphi \rangle + i\langle \omega, *\varphi \rangle, \;\; \omega, \varphi \in \Lambda_2(M_0).$$

В [2] показано, что $A(\varphi, \varphi)$ является полным инвариантом бивектора φ, в том смысле, что для двух бивекторов $\varphi_1, \varphi_2 \in \Lambda_2(M_0)$ $A(\varphi_1, \varphi_1) = A(\varphi_2, \varphi_2)$ тогда и только тогда, когда существует преобразование Лоренца, которое переводит φ_1 в φ_2.

Если $z \in \mathbb{C}$, $\omega \in$ такие, что $\varphi = z\omega$, то

$$A(\varphi, \varphi) = \bar{z}^2 A(\omega, \omega) = -\bar{z}^2.$$

Для всех значений $A(\varphi, \varphi) \in \mathbb{C} \setminus [0; +\infty)$ ровно для одного корня уравнения $-\bar{z}^2 = A(\varphi, \varphi)$ выполняется $\operatorname{Re} z > 0$. Для каждого значения $z \neq 0$, удовлетворяющего (17), $\omega \in G^1$ определяется однозначно и равно $z^{-1}\varphi$.

Утверждение 1.1 [2]. *Для каждого $\varphi \in \Lambda_2(M_0)$ верны следующие эквивалентности:*

$$\varphi \in K_2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} A(\varphi, \varphi) = 0,$$

$$\varphi \in K_0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} A(\varphi, \varphi) = 0,$$

$$\varphi \in K_0 \cap K_2 \Leftrightarrow A(\varphi, \varphi) = 0.$$

Таким образом, из $A(\varphi, \varphi) \notin [0; +\infty)$ следует существование представления (17) и единственность z и ω, таких, что $\operatorname{Re} z > 0$ и $\varphi = z\omega$. Эти факты лежат в основе следующего определения.

Определение 1.1. *Пусть значение ЭМ-поля в точке* $x_0 \in M^4$ *задается бивектором* $F(x_0)$ *и* $A(F(x_0), F(x_0)) \notin [0; +\infty)$. *Пусть* $\omega(x_0) \in G^1$ *и* $e(x_0), h(x_0) \in \mathbb{R}$ *таковы, что*

$$F(x_0) = e(x_0)\omega(x_0) + h(x_0)(*\omega(x_0)) \tag{18}$$

и $e(x_0) > 0$. *Тогда* $\omega(x_0)$ *будем называть направлением ЭМ-поля в точке* x_0, *а* $e(x_0)$ *и* $h(x_0)$ *– электрическим и магнитным коэффициентами электромагнитного поля в точке* x_0.

Целью данной работы является получение системы уравнений, эквивалентной уравнениям Максвелла для поля F (5)–(8) или (10), содержащей только отображения ω, e и h и их дифференциалы. Для этого определяются дифференциальные операторы специального вида, действующие на отображениях $f : V_1 \to V_2$, где V_1, V_2 – двумерные псевдоримановы многообразия с фиксированной сигнатурой. Отличия полученой записи уравнений Максвелла от (5)–(8) и (10) заключается в следующем: с одной стороны, ω, e и h не зависят от системы координат (e и h однозначно определяются инвариантами поля (3) и (4) в данной точке), а с другой — она использует разделение ЭМ-поля на электрическое и магнитное поля (e и h равны, с точностью до знака, модулям векторов напряженностей электрического и магнитного полей в некоторых, связанных с ω, системах координат).

Дальнейшее изложение построено следующим образом: в §2 уравнения Максвелла записываются через e, h, ω и коэффициенты их дифференциалов в некоторой системе координат. В §3 с помощью определенных в нем дифференциальных операторов уравнения приводятся к бескоординатной форме. В §§4 и 5 рассматриваются множества решений уравнений Максвелла, для которых направление ЭМ-поля и электрический и магнитный коэффициенты имеют специальный вид.

2. Вывод уравнений Максвелла в терминах направления электромагнитного поля

2.1. Для переформулировки уравнений Максвелла в точке x_0 будет удобно пользоваться некоторой особой системой координат. Выберем допустимую тетраду Минковского (e_0, e_1, e_2, e_3) такую, что

$$\omega(x_0) = e_0 \wedge e_1, \ *\omega(x_0) = -e_2 \wedge e_3, \tag{19}$$

и связанную с ней систему координат (x^0, x^1, x^2, x^3) в M^4. Такая тетрада не единственна, но для каждой такой тетрады в системе координат, связанной с ней, контравариантный тензор ЭМ-поля будет иметь вид

$$F(x_0) = e(x_0)e_0 \wedge e_1 - h(x_0)e_2 \wedge e_3,$$

а значит, согласно (11), напряженности электрического поля (1) и магнитного поля (2) в таких системах координат будут равны

$$E(x_0) = (-e(x_0), 0, 0)\,, \;\; H(x_0) = (h(x_0), 0, 0)\,. \tag{20}$$

Выбор тетрады, удовлетворяющей (19), и имеющей фиксированные временную и пространственную ориентации, соответствует выбору ортонормированных базисов фиксированных ориентаций в двумерных линейных подпространствах

$$V_{\omega(x_0)} = \mathrm{Lin}\,\{e_0, e_1\} \subset M_0) \quad \text{и} \quad V_{*\omega(x_0)} = \mathrm{Lin}\,\{e_2, e_3\} \subset M_0.$$

Множество всех таких тетрад является подмногообразием, гомеоморфным

$$SO(\mathbb{R}^2_{1,1}) \times SO(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^1 \times S^1,$$

многообразия $V^M_{4,4}$ всех тетрад Минковского.

Из (20) видно, что для бивектора $F(x_0)$ такого, что

$$A(F(x_0), F(x_0)) \notin [0; +\infty),$$

инварианты (3) и (4) равны $-e(x_0)h(x_0)$ и $e(x_0)^2 - h(x_0)^2$ соответственно. Из [1, Теорема 21.1] следует, что $\omega(x_0)$, $e(x_0)$, $h(x_0)$ могут быть корректно определены, если

$$(E, H)_{\mathbb{R}^3} \neq 0$$

или

$$(E, H)_{\mathbb{R}^3} = 0, \; (E, E)_{\mathbb{R}^3} - (H, H)_{\mathbb{R}^3} > 0.$$

Мы будем предполагать, что ЭМ-поле $F(x)$ гладко зависит от точки x, поэтому для каждой точки $x_0 \in M^4$, такой что $A(F(x_0), F(x_0)) \notin [0; +\infty)$, можно выбрать окрестность U точки x_0 (зависящую от F), для каждой точки которой выполняется аналогичное ограничение. В дальнейшем изложении под ω, e, h будем понимать отображения

$$\omega : U \to G^1,$$

$$e : U \to (0, +\infty)$$

$$h : U \to \mathbb{R},$$

где $x_0 \in U$ и $A(F(x), F(x)) \notin [0; +\infty)$ для каждой точки $x \in U$.

2.2. Система координат (x_0, x_1, x_2, x_3), связанная с тетрадой Минковского (e_0, e_1, e_2, e_3), удовлетворяющей (19), каноническим образом задает базис в касательном пространстве $T_{x_0}M^4$. С другой стороны, плюккерово вложение G^1 в $\Lambda_2(M_0)$, как показано в [5], позволяет рассматривать $T_{\omega(x_0)}G^1$ как линейное подпространство в $\Lambda_2(M_0)$ с ортонормированным базисом

$$(e_0 \wedge e_2, e_0 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3). \tag{21}$$

Поэтому дифференциал отображения $\omega : U \to G^1$ в точке x_0 может быть описан с помощью чисел $\lambda_i^{02}, \lambda_i^{03}, \lambda_i^{12}, \lambda_i^{13}$, $(0 \leqslant i \leqslant 3)$, являющихся коэффициентами разложения бивекторов $\partial\omega/\partial x^i(x_0)$ по базису (21):

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^i}(x_0) = \lambda_i^{02} e_0 \wedge e_2 + \lambda_i^{03} e_0 \wedge e_3 + \lambda_i^{12} e_1 \wedge e_2 + \lambda_i^{13} e_1 \wedge e_3 \in T_{x_0} \subset \Lambda_2(M_0). \tag{22}$$

Если бивектор $\omega(x)$ имеет разложение по базису $\Lambda_2(M_0)$, связанному с тетрадой Минковского (e_0, e_1, e_2, e_3),

$$\begin{aligned} \omega(x) = \omega^{01}(x) e_0 \wedge e_1 + \omega^{02}(x) e_0 \wedge e_2 + \omega^{03}(x) e_0 \wedge e_3 \\ + \omega^{12}(x) e_1 \wedge e_2 + \omega^{13}(x) e_1 \wedge e_3 + \omega^{23}(x) e_2 \wedge e_3, \end{aligned}$$

то, согласно (22),

$$\frac{\partial\omega^{01}}{\partial x^i}(x_0) = \frac{\partial\omega^{23}}{\partial x^i}(x_0) = 0,$$

$$\frac{\partial\omega^{02}}{\partial x^i}(x_0) = \lambda_i^{02}, \quad \frac{\partial\omega^{03}}{\partial x^i}(x_0) = \lambda_i^{03},$$

$$\frac{\partial\omega^{12}}{\partial x^i}(x_0) = \lambda_i^{12}, \quad \frac{\partial\omega^{13}}{\partial x^i}(x_0) = \lambda_i^{13}.$$

Заметим также, что

$$\omega^{01}(x_0) = 1, \quad \omega^{02}(x_0) = \omega^{03}(x_0) = \omega^{12}(x_0) = \omega^{13}(x_0) = \omega^{23}(x_0) = 0.$$

2.3. Согласно правилу опускания индексов и нашим обозначениям ЭМ-поле $F(x)$ можно записать в виде дифференциальной формы

$$\begin{aligned} F(x) = &\left(-e(x)\omega^{01}(x) - h(x)\omega^{23}(x)\right) dx^0 \wedge dx^1 \\ &+ \left(-e(x)\omega^{02}(x) + h(x)\omega^{13}(x)\right) dx^0 \wedge dx^2 \\ &+ \left(-e(x)\omega^{03}(x) - h(x)\omega^{12}(x)\right) dx^0 \wedge dx^3 \\ &+ \left(e(x)\omega^{12}(x) - h(x)\omega^{03}(x)\right) dx^1 \wedge dx^2 \\ &+ \left(e(x)\omega^{13}(x) + h(x)\omega^{02}(x)\right) dx^1 \wedge dx^3 \\ &+ \left(e(x)\omega^{23}(x) - h(x)\omega^{01}(x)\right) dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned} \tag{23}$$

Из (15) и (18) видно, что выражение для $*F(x)$ получается заменой в (23) $e(x)$ и $h(x)$ на $-h(x)$ и $e(x)$, соответственно.

2.4. Чтобы записать уравнения Максвелла в точке x_0 в терминах отображений e, h и ω, воспользуемся (10) и (23): возьмем внешний дифференциал от дифференциальных форм F и $*F$ и приравняем коэффициенты внешних дифференциалов dF и $d(*F)$ к нулю. Для упрощения записи через e, h, $\partial e/\partial x^i$, $\partial h/\partial x^i$ будем обозначать значение соответствующих отображений в точке x_0.

$$\begin{aligned} (dF)_{012}(x_0) &= \frac{\partial(F_{12})}{\partial x^0}(x_0) - \frac{\partial(F_{02})}{\partial x^1}(x_0) + \frac{\partial(F_{01})}{\partial x^2}(x_0) \\ &= \frac{\partial(e\omega^{12} - h\omega^{03})}{\partial x^0}(x_0) - \frac{\partial(-e\omega^{02} + h\omega^{13})}{\partial x^1}(x_0) + \frac{\partial(-e\omega^{01} - h\omega^{23})}{\partial x^2}(x_0) \\ &= \frac{\partial e}{\partial x^0}(x_0)\omega^{12}(x_0) + \frac{\partial \omega^{12}}{\partial x^0}(x_0)e(x_0) - \frac{\partial h}{\partial x^0}(x_0)\omega^{03}(x_0) - \frac{\partial \omega^{03}}{\partial x^0}(x_0)h(x_0) \\ &+ \frac{\partial e}{\partial x^1}(x_0)\omega^{02}(x_0) + \frac{\partial \omega^{02}}{\partial x^1}(x_0)e(x_0) - \frac{\partial h}{\partial x^1}(x_0)\omega^{13}(x_0) - \frac{\partial \omega^{13}}{\partial x^1}(x_0)h(x_0) \\ &- \frac{\partial e}{\partial x^2}(x_0)\omega^{01}(x_0) - \frac{\partial \omega^{01}}{\partial x^2}(x_0)e(x_0) - \frac{\partial h}{\partial x^2}(x_0)\omega^{23}(x_0) - \frac{\partial \omega^{23}}{\partial x^2}(x_0)h(x_0) \\ &= -\frac{\partial e}{\partial x^2} + \left(\lambda_0^{12} + \lambda_1^{02}\right) e + \left(-\lambda_0^{03} - \lambda_1^{13}\right) h = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} (dF)_{013}(x_0) &= \frac{\partial(F_{13})}{\partial x^0}(x_0) - \frac{\partial(F_{03})}{\partial x^1}(x_0) + \frac{\partial(F_{01})}{\partial x^3}(x_0) \\ &= -\frac{\partial e}{\partial x^3} + \left(\lambda_0^{13} + \lambda_1^{03}\right) e + \left(\lambda_0^{02} + \lambda_1^{12}\right) h = 0, \end{aligned} \tag{25}$$

$$(dF)_{023}(x_0) = \frac{\partial(F_{23})}{\partial x^0}(x_0) - \frac{\partial(F_{03})}{\partial x^2}(x_0) + \frac{\partial(F_{02})}{\partial x^3}(x_0)$$
$$= -\frac{\partial h}{\partial x^0} + \left(\lambda_2^{03} - \lambda_3^{02}\right) e + \left(\lambda_2^{12} + \lambda_3^{13}\right) h = 0, \quad (26)$$

$$(dF)_{123}(x_0) = \frac{\partial(F_{23})}{\partial x^1}(x_0) - \frac{\partial(F_{13})}{\partial x^2}(x_0) + \frac{\partial(F_{12})}{\partial x^3}(x_0)$$
$$= -\frac{\partial h}{\partial x^1} + \left(-\lambda_2^{13} + \lambda_3^{12}\right) e + \left(-\lambda_2^{02} - \lambda_3^{03}\right) h = 0. \quad (27)$$

Заменяя в (14), (25)–(27) e на h, а $-h$ на e, получаем еще четыре уравнения:

$$\frac{\partial h}{\partial x^2} + \left(-\lambda_0^{03} - \lambda_1^{13}\right) e + \left(-\lambda_0^{12} - \lambda_1^{02}\right) h = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x^3} + \left(\lambda_0^{02} + \lambda_1^{12}\right) e + \left(-\lambda_0^{13} - \lambda_1^{03}\right) h = 0, \quad (29)$$

$$-\frac{\partial e}{\partial x^0} + \left(\lambda_2^{12} + \lambda_1^{13}\right) e + \left(-\lambda_2^{03} + \lambda_3^{02}\right) h = 0, \quad (30)$$

$$-\frac{\partial e}{\partial x^1} + \left(-\lambda_2^{02} - \lambda_3^{03}\right) e + \left(\lambda_2^{13} - \lambda_3^{12}\right) h = 0. \quad (31)$$

2.5. Уравнения (5)–(8) выражают закономерности между отображениями E и H в некоторой системе координат. (5) соответствует закону Гаусса, (6) – закону Фарадея, (8) – закону Ампера при отсутствии токов.

Рассмотрим закон Гаусса в точке x_0 в системе координат, связанной с $\omega(x_0)$ (в системе, для которой выполняется (19). E и H принимают вид:

$$E(x) = (-e(x)\omega^{01}(x) - h(x)\omega^{23}(x), -e(x)\omega^{02}(x) + h(x)\omega^{13}(x),$$
$$- e(x)\omega^{03}(x) - h(x)\omega^{12}(x)),$$

$$H(x) = (-e(x)\omega^{23}(x) + h(x)\omega^{01}(x), e(x)\omega^{13}(x) + h(x)\omega^{02}(x),$$
$$- e(x)\omega^{12}(x) + h(x)\omega^{03}(x)).$$

Тогда

$$(\operatorname{div} E)(x_0) = \frac{\partial E_1}{\partial x^1}(x_0) + \frac{\partial E_2}{\partial x^2}(x_0) + \frac{\partial E_3}{\partial x^3}(x_0)$$
$$= -e_1 - \lambda_2^{02} e + \lambda_2^{13} h - \lambda_3^{03} e - \lambda_3^{12} h.$$

Таким образом, закон Гаусса в точке x_0 в системе координат (x_0, x_1, x_2, x_3), связанной с $\omega(x_0)$, равносилен (31).

Аналогично, закон Фарадея (6) в этой системе координат эквивалентен системе уравнений (24)–(26), а закон Ампера (8) – системе (28)–(30).

Уравнения (5), (7) и записанные в координатах уравнения (6), (8) в любой системе координат совпадают с системой (10), записанной в координатах, но только в системах координат, связанных с $\omega(x_0)$, совпадают с (24)–(31).

3. Инвариантная форма записи уравнений Максвелла

3.1. Соотношение (19) оставляет свободу выбора базисов в подпространствах $V_\omega(x_0)$, $V_*\omega(x_0)$, который влияет на значения слагаемых в (24)–(31). Выделим некоторые линейные комбинации коэффициентов дифференциалов отображений, не зависящие от выбора базисов в касательных пространствах.

Определение 3.1. *Пусть V_1, V_2 – вещественные многообразия, $\dim V_1 = 2$, $x_0 \in V_1$, $f : V_1 \to V_2$ – гладкое отображение,*

$$Df(x_0) : T_{x_0}V_1 \to T_{x_0}V_2$$

–дифференциал отображения f в точке x_0. Пусть $P \subseteq T_{f(x_0)}V_2$ – линейное подпространство, такое, что $Df(x_0)(T_{x_0}V_1) \subseteq P$, $\psi : T_{x_0}V_1 \to P$ – изоморфизм линейных пространств, (x_1, x_2) – система координат в окрестности точки x_0, $A = [Df(x_0) \circ \psi^{-1}]$ – матрица оператора $Df(x_0) \circ \psi^{-1} : P \to P$, где

$$Df(x_0)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = A_i^1 \psi\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) + A_i^2 \psi\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right).$$

Тогда положим

$$(\mathrm{dv}\, f)(x_0) = \mathrm{tr}\, A = A_1^1 + A_2^2.$$

Определение 3.2. *Пусть V_1, V_2 – ориентированные вещественные псевдоримановы многообразия, $\dim V_1 = 2$, V_1 имеет сигнатуру $(+,-)$, $x_0 \in V_1$, $f : V_1 \to V_2$ – гладкое отображение,*

$$Df(x_0) : T_{x_0}V_1 \to T_{x_0}V_2$$

– дифференциал отображения f в точке x_0. Пусть $P \subseteq T_{f(x_0)}V_2$ – линейное подпространство, такое, что $Df(x_0)(T_{x_0}V_1) \subseteq P$, ψ :

$T_{x_0}V_1 \to P$ – *изоморфизм линейных пространств, сохраняющий псевдориманову метрику и ориентацию,* (x_1, x_2) – *система координат в окрестности точки* x_0*, соответствующая ориентации* V_1*, в которой метрический тензор многообразия* V_1 *имеет вид* $(g_{ij}(x_0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = [Df(x_0) \circ \psi^{-1}]$ – *матрица оператора* $Df(x_0) \circ \psi^{-1} : P \to P$*, где*

$$Df(x_0)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = A_i^1 \psi\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) + A_i^2 \psi\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right).$$

Тогда положим

$$(\mathrm{rt}^{+-} f)(x_0) = A_1^2 + A_2^1.$$

Определение 3.3. *Пусть* V_1, V_2 – *ориентированные вещественные псевдоримановы многообразия,* $\dim V_1 = 2$, V_1 *имеет сигнатуру* $(-,-)$, $x_0 \in V_1$, $f : V_1 \to V_2$ – *гладкое отображение,*

$$Df(x_0) : T_{x_0}V_1 \to T_{x_0}V_2$$

– *дифференциал отображения* f *в точке* x_0*. Пусть* $P \subseteq T_{f(x_0)}V_2$ – *линейное подпространство, такое, что* $Df(x_0)(T_{x_0}V_1) \subseteq P$, $\psi : T_{x_0}V_1 \to P$ – *изоморфизм линейных пространств, сохраняющий псевдориманову метрику и ориентацию,* (x_1, x_2) – *система координат в окрестности точки* x_0*, соответствующая ориентации* V_1*, в которой метрический тензор многообразия* V_1 *имеет вид* $(g_{ij}(x_0)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = [Df(x_0) \circ \psi^{-1}]$ – *матрица оператора* $Df(x_0) \circ \psi^{-1} : P \to P$*, где*

$$Df(x_0)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = A_i^1 \psi\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) + A_i^2 \psi\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right).$$

Тогда положим

$$(\mathrm{rt}^{--} f)(x_0) = A_1^2 - A_2^1.$$

Утверждение 3.1. *Значения величин, определенных в определениях* 3.1–3.3*, не зависят от выбора системы координат* (x^1, x^2) *с указанными свойствами.*

Доказательство. $(Df) \circ \psi^{-1} : P \to P$ – линейный оператор на подпространстве P касательных векторов, поэтому элементы матрицы A, определяющие его действие на базисе $(\partial/\partial x^1,\ \partial/\partial x^2)$, соответствующем системе координат (x^1, x^2), при замене координат изменяются как координаты тензора ранга $(1,1)$.

Тогда величина $\operatorname{dv} f = A_1^1 + A_2^2 = A_i^i$ является тензором ранга $(0,0)$ и не меняется при замене координат.

Пусть $B = (\partial\tilde{x}^i/\partial x^j)$ – матрица замены координат (x^1, x^2) на $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$. Из того, что замена координат сохраняет метрический тензор g_{ij}, следует, что $|\det B| = 1$ (см. [1, §18]). Из того, что системы координат (x^1, x^2) и $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$ соответствуют одной и той же ориентации P, следует, что $\det B > 0$. Значит, $\det B = 1$.

Покажем, что величина ε^{ij}, где

$$\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1, \quad \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0,$$

является тензором ранга $(2,0)$ относительно замен координат, сохраняющих ориентацию и метрический тензор. Если координаты тензора ранга $(2,0)$ в системе координат (x^1, x^2) составляют матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, то в системе $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$ матрица координат будет иметь значение $B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} B^T$. Положив $b_{ij} = \partial\tilde{x}^i/\partial x^j$, получаем

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \\ -b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det B = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 1$, то данный тензор будет иметь одинаковые координаты во всех рассматриваемых системах координат.

Таким образом, величина $g_{ij}A_k^i\varepsilon^{jk}$ является тензором нулевого ранга и не зависит от системы координат. Если V_1 имеет сигнатуру $(+,+)$, то $g_{11} = g_{22} = 1$ и

$$g_{ij}A_k^i\varepsilon^{jk} = A_1^2 - A_2^1 = \operatorname{rt}^{--} f.$$

Если V_1 имеет сигнатуру $(+,-)$, то $g_{11} = -g_{22} = 1$ и

$$g_{ij}A_k^i\varepsilon^{jk} = A_2^1 + A_1^2 = \operatorname{rt}^{+-} f. \qquad \square$$

Матрица линейного отображения $(Df)\circ\psi^{-1}$ в базисе

$$(\partial/\partial\tilde{x}^1, \partial/\partial\tilde{x}^2)$$

равна $\tilde{A} = BAB^{-1}$. В случае $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ если замена координат сохраняет метрический тензор и ориентацию, то найдется $t \in [0, 2\pi)$ такое, что

$$B = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Вычисляя $\tilde{A}$, получаем

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t A_1^1 + \sin t A_1^2 & \cos t A_2^1 + \sin t A_2^2 \\ -\sin t A_1^1 + \cos t A_1^2 & -\sin t A_2^1 + \cos t A_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

и

$$\tilde{A}_2^1 = -\sin t \cos t A_1^1 + \cos^2 t A_2^1 - \sin^2 t A_1^2 + \sin t \cos t A_2^2,$$

$$\tilde{A}_1^2 = -\sin t \cos t A_1^1 - \sin^2 t A_2^1 + \cos^2 t A_1^2 + \sin t \cos t A_2^2,$$

$$\tilde{A}_1^2 - \tilde{A}_2^1 = A_1^2 - A_2^1.$$

Аналогично, для каждой замены координат, сохраняющей ориентацию и тензор $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, найдется $t \in \mathbb{R}$ такое, что

$$B = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & -\operatorname{sh} t \\ -\operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t A_1^1 + \operatorname{sh} t A_1^2 & \operatorname{ch} t A_2^1 + \operatorname{sh} t A_2^2 \\ \operatorname{sh} t A_1^1 + \operatorname{ch} t A_1^2 & \operatorname{sh} t A_2^1 + \operatorname{ch} t A_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & -\operatorname{sh} t \\ -\operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

и

$$\tilde{A}_2^1 = -\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t A_1^1 + \operatorname{ch}^2 t A_2^1 - \operatorname{sh}^2 t A_1^2 + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t A_2^2,$$

$$\tilde{A}_1^2 = \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t A_1^1 - \operatorname{sh}^2 t A_2^1 + \operatorname{ch}^2 t A_1^2 - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t A_2^2,$$

$$\tilde{A}_2^1 + \tilde{A}_1^2 = A_2^1 + A_1^2.$$

3.2. Множители перед e и h в (24)–(31) совпадают с $(\mathrm{dv}\, f)(x_0)$, $(\mathrm{rt}^{+-})(x_0)$, $(\mathrm{rt}^{--}\, f)(x_0)$ для некоторых отображений f. Чтобы определить такие f, мы воспользуемся операцией внутреннего умножения $\llcorner$, описанной в [4]. Рассмотрим операцию

$$\llcorner\colon \Lambda_2(M_0) \times \Lambda_1(M_0) \to \Lambda_1(M_0),$$

такую что для любого $\varphi \in \Lambda_2(M_0)$, $v \in M_0$, $u \in M_0$

$$\langle \varphi \llcorner v, u\rangle = \langle \varphi, v \wedge u\rangle.$$

Такая операция существует и единственна, линейна по каждому из своих аргументов, и для вектора

$$\lambda = \lambda^{02} e_0 \wedge e_2 + \lambda^{03} e_0 \wedge e_3 + \lambda^{12} e_1 \wedge e_2 + \lambda^{13} e_1 \wedge e_3$$

верно

$$\lambda \llcorner e_0 = \lambda^{02} e_2 + \lambda^{03} e_3,$$

$$\lambda \llcorner e_1 = -\lambda^{12} e_2 - \lambda^{13} e_3,$$

$$\lambda \llcorner e_2 = \lambda^{02} e_0 + \lambda^{12} e_1,$$

$$\lambda \llcorner e_3 = \lambda^{03} e_0 + \lambda^{13} e_1.$$

Утверждение 3.2. *Пусть $\omega : U \to G^1 \subset \Lambda_2(M_0)$ – гладкое отображение, где U – область в M. Тогда для $i = 0, 1, 2, 3$*

$$\forall v \in M_0 \qquad \frac{\partial \omega}{\partial x^i}(x) \llcorner v = \frac{\partial\, (\omega(x) \llcorner v)}{\partial x^i}.$$

Это непосредственно следует из линейности операции внутреннего умножения.

3.3.

Утверждение 3.3. *Пусть $\omega : U \to G^1 \subset \Lambda_2(M_0)$ – гладкое отображение, $x_0 \in U$, (e_0, e_1, e_2, e_3) – тетрада Минковского, удовлетворяющая* (19),

$$P_\omega = \left\{x \in M \mid x^2 = x_0^2, x^3 = x_0^3\right\} \quad и \quad P_{*\omega} = \left\{x \in M \mid x^0 = x_0^0, x_1 = x_0^1\right\}$$

– афинные подпространства, содержащие точку x_0, с касательными пространствами $T_{x_0} P_\omega = V_{\omega(x_0)}$ и $T_{x_0} P_{*\omega} = V_{*\omega(x_0)}$ в точке x_0. Рассмотрим отображения

$$\omega \llcorner e_i : U \to M_0 = \Lambda_1(M_0), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

и их сужения $\omega\llcorner e_0|_{P_{*\omega}}$, $\omega\llcorner e_1|_{P_{*\omega}}$, $\omega\llcorner e_2|_{P_\omega}$, $\omega\llcorner e_3|_{P_\omega}$ *на* P_ω *и* $P_{*\omega}$. *Пусть*

$$D(\omega\llcorner e_i|_{P_{*\omega}})(x_0) : V_{*\omega(x_0)} \to T_{\omega(x_0)\llcorner e_0}M = T_{\omega(x_0)\llcorner e_1}M = M^0, i = 0, 1,$$

$$D(\omega\llcorner e_i|_{P_\omega})(x_0), : V_{\omega(x_0)} \to M_0, \quad i = 2, 3$$

– *дифференциалы соответствующих сужений.*

Тогда
$D(\omega\llcorner e_i|_{P_{*\omega}})(x_0)(V_{*\omega(x_0)}) \subseteq V_{*\omega(x_0)} \subset M_0$, $i = 0, 1$,
$D(\omega\llcorner e_i|_{P_{*\omega}})(x_0)(V_\omega) \subseteq V_{\omega(x_0)}$, $i = 2, 3$
и

$$\begin{aligned}
\mathrm{dv}(\omega\llcorner e_0|_{P_{*\omega}})(x_0) &= \lambda_2^{02} + \lambda_3^{03}, & \mathrm{rt}^{--}(\omega\llcorner e_0|_{P_{*\omega}})(x_0) &= \lambda_2^{03} - \lambda_3^{02},\\
\mathrm{dv}(\omega\llcorner e_1|_{P_{*\omega}})(x_0) &= -\lambda_2^{12} - \lambda_3^{13}, & \mathrm{rt}^{--}(\omega\llcorner e_0|_{P_{*\omega}})(x_0) &= -\lambda_2^{13} + \lambda_3^{12},\\
\mathrm{dv}(\omega\llcorner e_2|_{P_\omega})(x_0) &= \lambda_0^{02} + \lambda_1^{12}, & \mathrm{rt}^{+-}(\omega\llcorner e_2|_{P_\omega})(x_0) &= \lambda_0^{12} + \lambda_1^{02},\\
\mathrm{dv}(\omega\llcorner e_3|_{P_\omega})(x_0) &= \lambda_0^{03} + \lambda_1^{13}, & \mathrm{rt}^{+-}(\omega\llcorner e_3|_{P_\omega})(x_0) &= \lambda_0^{13} + \lambda_1^{03},
\end{aligned}$$

где dv, rt^{+-}, rt^{--} – *операторы из определений* (3.1)–(3.3) *для систем координат* (x^0, x^1) *в* P_ω *и* (x^2, x^3) *в* $P_{*\omega}$, *ориентаций* $V_{\omega(x_0)}$ *и* $V_{*\omega(x_0)}$, *задаваемых произвольными базисами* (e_0, e_1) *и* (e_2, e_3), *удовлетворяющими* (19), *отображений* $\psi = \mathrm{id}_{V_{\omega(x_0)}}$ *и* $\psi = \mathrm{id}_{V_{*\omega(x_0)}}$, *соответственно, а* λ_i^{jk} *определены в* (22).

Доказательство. Из того, что любой касательный вектор $\lambda \in T_{\omega(x_0)}G^1$ может быть представлен в виде

$$\lambda = \lambda^{02}e_0 \wedge e_2 + \lambda^{03}e_0 \wedge e_3 + \lambda^{12}e_1 \wedge e_2 + \lambda^{13}e_1 \wedge e_3,$$

и утверждения 3.2 следует, что

$$D(\omega\llcorner e_i)(x_0)(M_0) \subseteq V_{*\omega}, \quad i = 0, 1,$$
$$D(\omega\llcorner e_i)(x_0)(M_0) \subseteq V_\omega, i = 2, 3.$$

а значит, и образы дифференциалов сужений этих отображений лежат в соответствующих пространствах. Формулы для λ_i^{jk} непосредственно следуют из равенств п. 3.2 и определений 3.1–3.3. □

Таким образом, в новых обозначениях уравнения (24)–(31) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial e}{\partial x^0} + e\,\mathrm{dv}(\omega\llcorner e_1|_{P_{*\omega}})(x_0) + h\,\mathrm{rt}^{--}(\omega\llcorner e_0|_{P_{*\omega}})(x_0) = 0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial e}{\partial x^1} + e\,\mathrm{dv}(\omega \llcorner e_0|_{P_{*\omega}})(x_0) + h\,\mathrm{rt}^{--}(\omega \llcorner e_1|_{P_{*\omega}})(x_0) = 0, \tag{33}$$

$$\frac{\partial e}{\partial x^2} + h\,\mathrm{dv}(\omega \llcorner e_3|_{P_\omega})(x_0) - e\,\mathrm{rt}^{+-}(\omega \llcorner e_2|_{P_\omega})(x_0) = 0, \tag{34}$$

$$\frac{\partial e}{\partial x^3} - h\,\mathrm{dv}(\omega \llcorner e_2|_{P_\omega})(x_0) - e\,\mathrm{rt}^{+-}(\omega \llcorner e_3|_{P_\omega})(x_0) = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x^0} + h\,\mathrm{dv}(\omega \llcorner e_1|_{P_{*\omega}})(x_0) - e\,\mathrm{rt}^{--}(\omega \llcorner e_0|_{P_{*\omega}})(x_0) = 0, \tag{36}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x^1} + h\,\mathrm{dv}(\omega \llcorner e_0|_{P_{*\omega}})(x_0) - e\,\mathrm{rt}^{--}(\omega \llcorner e_1|_{P_{*\omega}})(x_0) = 0, \tag{37}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x^2} - e\,\mathrm{dv}(\omega \llcorner e_3|_{P_\omega})(x_0) - h\,\mathrm{rt}^{+-}(\omega \llcorner e_2|_{P_\omega})(x_0) = 0, \tag{38}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x^3} + e\,\mathrm{dv}(\omega \llcorner e_2|_{P_\omega})(x_0) - h\,\mathrm{rt}^{+-}(\omega \llcorner e_3|_{P_\omega})(x_0) = 0. \tag{39}$$

Отметим, что уравнения (32)–(35) уже не зависят от выбора e_2, e_3, таких, что $e_2 \wedge e_3 = *\omega(x_0)$, а уравнения (36)–(39) не зависят от выбора e_0, e_1, таких, что $e_0 \wedge e_1 = \omega(x_0)$.

3.4. Рассмотрим

$$v = \alpha e_0 + \beta e_1 \in \mathrm{Lin}\{e_0, e_1\} = V_{\omega(x_0)}.$$

Тогда

$$\omega(x_0) \llcorner v = e_0 \wedge e_1 \llcorner (\alpha e_0 + \beta e_1) = \alpha e_1 + \beta e_0.$$

Поскольку операция $\llcorner$ линейна и

$$\frac{\partial e}{\partial x^0} = De(x_0)(e_0), \quad \frac{\partial e}{\partial x^1} = De(x_0)(e_1),$$

где $De(x_0)$ – дифференциал отображения e в точке x_0, то уравнения (32), (33) эквивалентны

$$\forall v \in V_{\omega(x_0)} \qquad De(x_0)(v) + e\,\mathrm{dv}((\omega \llcorner (\omega \llcorner v))|_{P_{*\omega}}) + h\,\mathrm{rt}^{--}((\omega \llcorner v)|_{P_{*\omega}}) = 0. \tag{40}$$

Данная форма уравнения никаких терминов, связанных с тетрадой (e_0, e_1, e_2, e_3), не содержит и не зависит от ее выбора. Аналогично можно записать

$$\forall v \in V_{\omega(x_0)} \qquad Dh(x_0)(v) + h\,\mathrm{dv}((\omega \llcorner (\omega \llcorner v))|_{P_{*\omega}}) - e\,\mathrm{rt}^{--}((\omega \llcorner v)|_{P_{*\omega}}) = 0. \tag{41}$$

Если же $v = \alpha e_2 + \beta e_3$, то

$$*\omega(x_0) \llcorner v = e_0 \wedge e_1 \llcorner (\alpha e_2 + \beta e_3) = -\alpha e_3 + \beta e_2,$$

а значит, (34), (35) превращаются в

$$\forall v \in V_{*\omega(x_0)} \quad De(x_0)(v) - h\,\mathrm{dv}((\omega \llcorner (*\omega \llcorner v))|_{P_\omega}) - e\,\mathrm{rt}^{+-}((\omega \llcorner v)|_{P_\omega}) = 0, \tag{42}$$

а (38), (39) – в

$$\forall v \in V_{*\omega(x_0)} \quad Dh(x_0)(v) + e\,\mathrm{dv}((\omega \llcorner (*\omega \llcorner v))|_{P_\omega}) - h\,\mathrm{rt}^{+-}((\omega \llcorner v)|_{P_\omega}) = 0. \tag{43}$$

Система уравнений (40)–(43) эквивалентна уравнениям Максвелла в вакууме (10), а также (5)–(8).

4. Электромагнитные поля постоянного направления

Функции $e(x)$, $h(x)$, $\omega(x)$, удовлетворяющие уравнениям (40)–(43), описывают некоторое ЭМ-поле, существование которого не противоречит уравнениям электродинамики.

Определение 4.1. *Набор гладких функций $e : U \to (0, +\infty)$, $h : U \to \mathbb{R}$, $\omega : U \to G^1$, удовлетворяющий для каждой $x_0 \in U$ в некоторой области $U \subset M$ уравнениям (40)–(43), будем называть допустимым электромагнитным полем в области U.*

Определение 4.2. *ЭМ-полем постоянного направления называется допустимое ЭМ-поле*
$\{e, h, \omega\}$, если $\omega(x)$ – постоянное отображение.

Утверждение 4.1. *Любое ЭМ-поле постоянного направления в области U постоянно в области U.*

Доказательство. Если $\omega(x) \equiv \omega_0$, то для каждого $v \in M_0$

$$\omega(x) \llcorner v \equiv \omega_0 \llcorner v, \quad \omega(x) \llcorner (\omega(x) \llcorner v) \equiv \omega_0 \llcorner (\omega_0 \llcorner v)$$

и дифференциалы сужений этих отображений на любое множество равны нулю. А значит, (40)–(43) превращаются в

$$\forall v \in M_0 \quad \forall x_0 \in U \qquad De(x_0) = Dh(x_0) = 0,$$

откуда и следует, что отображения $e(x)$ и $h(x)$ постоянны. □

5. Электромагнитные поля с постоянными электрическим и магнитным коэффициентами

5.1. В §4 показано, что если $\omega(x)$ постоянно для некоторого решения уравнения Максвелла, то из этого сразу следует, что $e(x)$ и $h(x)$ тоже постоянны. Обратное утверждение неверно – существуют допустимые ЭМ-поля, такие, что e и h являются постоянными отображениями, а направление ЭМ-поля ω постоянным отображением не является.

Некоторые свойства таких направлений ЭМ-поля следуют из того, что одна половина уравнений, описывающих свойства ЭМ-поля, получается заменой в другой половине уравнений $e(x)$ и $h(x)$ на $-h(x)$ и $e(x)$.

Утверждение 5.1. *Пусть* $\{e(x), h(x), \omega(x)\}$ *– допустимое ЭМ-поле, такое, что для любого* $x \in U$ $e(x) = e$, $h(x) = h$, *где* $e, h \in \mathbb{R}$, $e > 0$. *Тогда для любых* $x_0 \in U$, $v_1 \in V_{\omega(x_0)}$, $v_2 \in V_{*\omega(x_0)}$ *верно*

$$\mathrm{dv}\left((\omega \llcorner (\omega \llcorner v_1)) \,|_{P_{*\omega(x_0)}} \right)(x_0) = 0, \tag{44}$$

$$\mathrm{rt}^{--}\left((\omega \llcorner v_1)|_{P_{*\omega(x_0)}} \right)(x_0) = 0, \tag{45}$$

$$\mathrm{dv}\left((\omega \llcorner (*\omega \llcorner v_2)) \,|_{P_{\omega(x_0)}} \right)(x_0) = 0, \tag{46}$$

$$\mathrm{rt}^{+-}\left((\omega \llcorner v_2)|_{P_{\omega(x_0)}} \right)(x_0) = 0. \tag{47}$$

Доказательство. Для постоянных отображений $e(x)$ и $h(x)$ дифференциалы $De(x_0)$ и $Dh(x_0)$ обращаются в нуль, а равенства (40), (41) и (42), (43) можно расмотреть как системы линейных уравнений относительно переменных e и h. Для любых $x_0 \in U$, $v_1 \in V_{\omega(x_0)}$, $v_2 \in V_{*\omega(x_0)}$ они имеют нетривиальное решение, так как $e > 0$. Это возможно, только если определитель каждой системы равен нулю. Определитель системы, полученной из уравнений (40), (41), равен

$$\left(\mathrm{dv}\left((\omega \llcorner (\omega \llcorner v_1)) \,|_{P_{*\omega(x_0)}} \right)(x_0)\right)^2 + \left(\mathrm{rt}^{--}\left((\omega \llcorner v_1)|_{P_{*\omega(x_0)}} \right)(x_0)\right)^2 = 0,$$

а определитель системы, полученной из уравнений (42), (43), равен

$$-\left(\mathrm{dv}\left((\omega \llcorner (*\omega \llcorner v_2)) \,|_{P_{\omega(x_0)}} \right)(x_0)\right)^2 - \left(\mathrm{rt}^{+-}\left((\omega \llcorner v_2)|_{P_{\omega(x_0)}} \right)(x_0)\right)^2 = 0.$$

Равенство нулю определителей влечет равенство нулю каждого из слагаемых, откуда и следуют равенства (44)–(47). □

Запишем полученные соотношения в некоторой системе координат. Пусть $x_0 \in U$ и (e_0, e_1, e_2, e_3) – тетрада, удовлетворяющая (19), а λ_k^{ij} – определенные в (22) коэффициенты дифференциала отображения $\omega(x)$ в точке x_0. Тогда в случае, когда электрический и магнитный коэффициенты постоянны в U, верно

$$\lambda_0^{12} + \lambda_1^{02} = \lambda_0^{03} + \lambda_1^{13} = 0, \tag{48}$$

$$\lambda_0^{02} + \lambda_1^{12} = \lambda_0^{13} + \lambda_1^{03} = 0, \tag{49}$$

$$\lambda_2^{12} + \lambda_3^{13} = \lambda_2^{03} - \lambda_3^{02} = 0, \tag{50}$$

$$\lambda_2^{13} - \lambda_3^{13} = \lambda_2^{02} + \lambda_3^{03} = 0. \tag{51}$$

В справедливости этих равенств можно убедиться, рассматривая уравнения (24)–(31) как 4 линейных системы уравнений относительно e и h.

5.2. Рассмотрим некоторую инерциальную систему координат. ЭМ-поле, для которого в этой системе вектор напряженности электрического поля E тождественно равен нулю, а вектор напряженности магнитного поля H постоянен, удовлетворяет уравнениям (5)–(8). Поэтому, если решениями уравнений (5)–(8) являются отображения $E^*(x,t)$ и $H^*(x,t)$, то и отображения

$$E^{**}(x,t) = E^*(x,t), \quad H^{**}(x,t) = H^*(x,t) + H$$

являются решениями уравнений Максвелла. Таким образом, зная во всех точках значения векторов напряженностей электрического поля для допустимого ЭМ-поля, невозможно однозначно определить значения вектора напряженности магнитного поля. И наоборот: если известен вектор напряженности магнитного поля, то нельзя определить по нему вектор напряженности электрического поля.

Если ЭМ-поле описывается отображениями $e(x)$, $h(x)$, $\omega(x)$, то можно представить вектор ЭМ-поля

$$F(x) = e(x)\omega(x) + h(x)(*\omega(x))$$

в виде суммы тензоров

$$F(x) = F_e(x) + F_h(x),$$

где $F_e(x) = e(x)\omega(x)$ – электрическая составляющая и $F_h(x) = h(x)(*\omega(x))$ – магнитная составляющая однозначно определяются по значению F в точке x. Если $F(x)$ является допустимым ЭМ-полем, то по тензору F_e почти всегда можно восстановить тензор F_h, и наоборот. То есть по отображениям $e(x)$ и $\omega(x)$ можно найти отображение $h(x)$ (и по отображениям $h(x)$ и $\omega(x)$ найти $e(x)$).

Предположим, что для допустимых электромагнитных полей

$$F^* = F^*_e + F^*_h = e^*\omega^* + h^*(*\omega^*) \quad \text{и} \quad F^{**} = F^{**}_e + F^{**}_h = e^* * \omega^{**} + h^{**}(*\omega^{**})$$

верно $F^*_e = F^{**}_e$. Тогда и поле

$$F = F^* - F^{**} = F^*_h - F^{**}_h$$

является допустимым. Поскольку равенство электрических составляющих тензоров ЭМ-полей влечет равенство электрических коэффициентов и направлений ЭМ-полей, то

$$F = h^*(*\omega^*) - h^{**}(*\omega^{**}) = (h^* - h^{**})(*\omega),$$

где $\omega = \omega^* = \omega^{**}$ – общее для тензоров F, F^*, F^{**} отображение ЭМ-поля. Электрический коэффициент e поля F тождественно равен нулю.

Подставив $e(x_0) = 0$ в (42) и (40), получим что значения F^*_h и F^{**}_h могут не совпадать в точке x_0 только в том случае, когда $\mathrm{rt}^{--}((\omega \llcorner v)|_{P_{*\omega}}) = 0$ для любого $v \in V_{\omega(x_0)}$ и $\mathrm{rt}^{+-}((\omega \llcorner v)|_{P_\omega}) = 0$ для любого $v \in V_{*\omega(x_0)}$. При этих же условиях (согласно (43) и (41)) могут не совпадать F^*_e и F^{**}_e при $F^*_h = F^{**}_h$. Таким образом, доказано утверждение.

Утверждение 5.2. *Пусть*

$$F(x) = e(x)\omega(x) + h(x)(*\omega(x))$$

– допустимое ЭМ-поле, $F_e(x) = e(x)\omega(x)$, $F_h(x) = h(x)(*\omega(x_0))$.

Если для некоторой точки x_0 и некоторых векторов $v_1 \in V_{\omega(x_0)}$ и $v_2 \in V_{*\omega(x_0)}$ верно

$$\mathrm{rt}^{--}((\omega \llcorner v_1)|_{P_{*\omega}}) \neq 0$$

или

$$\mathrm{rt}^{+-}((\omega \llcorner v_2)|_{P_\omega}) \neq 0,$$

то в некоторой окрестности точки x_0 значения каждого из тензоров $F_e(x)$ и $F_h(x)$ однозначно определяются по другому из них.
□

5.3. Найдем все решения уравнений (40)–(43), удовлетворяющие следующим ограничениям: $e(x) \equiv e \in (0, \infty)$, $h(x) \equiv h \in \mathbb{R}$, а $\omega(x) \in \Gamma \subset G^1$ для каждого $x \in U$, где Γ – вполне геодезическое подмногообразие в G^1 размерности 1 (геодезическая).

В работе [5] описаны все геодезические в многообразии G^1. Их можно разделить на два вида, в зависимости от того, принадлежит ли касательный вектор к геодезической в произвольной точке кривой к конусу $K_0 \cap K_2$ или нет. Если касательный вектор к геодезической Γ в некоторой точке не принадлежит $K_0 \cap K_2$, то касательные вектора геодезической Γ во всех ее точках не будут принадлежать $K_0 \cap K_2$ и найдутся допустимая тетрада (e_0, e_1, e_2, e_3) и числа $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такие, что геодезическая Γ имеет вид

$$\omega(t) = e_0(t) \wedge e_1(t),$$

а касательный вектор равен

$$\frac{\partial \omega(t)}{\partial t} = \alpha_0 e_0(t) \wedge e_2(t) - \alpha_1 e_1(t) \wedge e_3(t), \tag{52}$$

где

$$e_0(t) = e_0 \operatorname{ch}(\alpha_1 t) + e_3 \operatorname{sh}(\alpha_1 t), \quad e_1(t) = e_1 \cos(\alpha_0 t) + e_2 \sin(\alpha_0 t),$$
$$e_2(t) = e_1 \sin(\alpha_0 t) + e_2 \cos(\alpha_0 t), \quad e_3(t) = e_0 \operatorname{sh}(\alpha_1 t) + e_3 \operatorname{ch}(\alpha_1 t).$$

Для геодезических второго типа касательные вектора во всех точках принадлежат $K_0 \cap K_2$. Для каждой такой геодезической найдется допустимая тетрада (e_0, e_1, e_2, e_3), такая, что геодезическая имеет вид

$$\omega(t) = (e_0 + e_1) \wedge (e_1 + t e_3)$$

или

$$\omega(t) = (e_0 - e_1) \wedge (e_1 + t e_3),$$

а касательный вектор равен

$$\frac{\partial \omega(t)}{\partial t} = (e_0 + e_1) \wedge e_3$$

или

$$\frac{\partial \omega(t)}{\partial t} = (e_0 - e_1) \wedge e_3$$

соответственно.

5.4.

Утверждение 5.3. *Пусть*

$$\Gamma_1 = \{e_0(t) \wedge e_1(t) \in G^1 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

– геодезическая в G^1, где $e_0(t)$, $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ определены в (52). Тогда если $\{e(x), h(x), \omega(x)\}$ – допустимое ЭМ-поле, такое, что для любого $x \in U$

$$e(x) = e, \quad h(x) = h, \quad \omega(x) \in \Gamma_1,$$

где $e \in (0, \infty)$, $h \in \mathbb{R}$, то отображение $\omega(x)$ – постоянно.

Доказательство. Поскольку $\omega(x) \in \Gamma_1$ для любого $x \in U$, то можно определить отображение $s : U \to \mathbb{R}$, такое, что в U справедливо равенство

$$\omega(x) = e_0\left(s(x)\right) \wedge e_1\left(s(x)\right).$$

Пусть $x_0 \in U$. Тогда тетрада

$$(e_0(s(x_0)), \quad e_1(s(x_0)), \quad e_2(s(x_0)), \quad e_3(s(x_0)))$$

удовлетворяет условию (19). Рассмотрим связанную с ней систему координат (x^0, x^1, x^2, x^3). В этой системе коэффициенты из (22) равны

$$\lambda_i^{02} = \alpha_0 \frac{\partial s}{\partial x^i}(x_0),\ \lambda_i^{13} = -\alpha_1 \frac{\partial s}{\partial x^i}(x_0),\ \lambda_i^{12} = \lambda_i^{03} = 0\ (i = 0, 1, 2, 3),$$

и из равенств (48)–(51) следует, что

$$\alpha_0 \frac{\partial s}{\partial x^i}(x_0) = -\alpha_1 \frac{\partial s}{\partial x^i}(x_0) = 0\ (i = 0, 1, 2, 3).$$

Поскольку α_0 и α_1 не равны нулю одновременно, то

$$\frac{\partial s}{\partial x^i}(x_0) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

и отображение $s(x)$, а также отображение $\omega(x)$ постоянно. $\square$

5.5. Пусть геодезическая кривая Γ_2 имеет вид

$$\{(e_0 + e_1) \wedge (e_1 + te_3) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

где (e_0, e_1, e_2, e_3) – допустимая тетрада. Рассмотрим семейства векторов $\{e_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ и $\{e_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, гладко зависящие от t, такие что

$$e_0(t) \wedge e_1(t) = (e_0 + e_1) \wedge (e_1 + te_3), \quad \langle e_0(t) \wedge e_0(t)\rangle = 1,$$
$$\langle e_1(t) \wedge e_1(t)\rangle = -1, \quad \langle e_0(t) \wedge e_0\rangle > 0$$

для любого t и $e_0(0) = e_0$, $e_1(0) = e_1$. Пересечение каждого из двумерных подпространств

$$\mathrm{Lin}\{e_0(t), e_1(t)\} = V_{(e_0+e_1)\wedge(e_1+te_3)}$$

со световым конусом $\{v \in M_0 \mid \langle v, v\rangle = 0\}$ является объединением двух различных одномерных линейных подпространств (изотропных прямых). Эти прямые единственным образом можно разбить на два семейства, гладко зависящих от t, так чтобы пересечение $V_{(e_0+e_1)\wedge(e_1+te_3)}$ со световым конусом было равно объединению двух прямых – по одному из каждого семейства. Эти семейства будут иметь вид:

$$L_1(t) = \{\lambda(e_0(t) + e_1(t)) \in M_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

$$L_2(t) = \{\lambda(e_0(t) - e_1(t)) \in M_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Изотропный вектор $e_0 + e_1$ принадлежит $V_{(e_0+e_1)\wedge(e_1+te_3)}$ для каждого t, а значит, и одному из множеств $L_1(t)$, $L_2(t)$. А так как $e_0 = e_0(0)$ и $e_1 = e_1(0)$, то $e_0 + e_1 \in L_1(0)$. Семейства $L_1(t)$, $L_2(t)$ гладко зависят от t, поэтому $e_0 + e_1$ для всех t принадлежит прямой из одного и того же семейства, и существует $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\lambda(t)(e_0(t) + e_1(t) = e_0 + e_1.$$

Кроме того, так как

$$e_0(t), e_1(t) \in V_{(e_0+e_1)\wedge(e_1+te_3)} \subset \mathrm{Lin}\{e_0, e_1, e_3\},$$

а e_2 ортогонален всем векторам из $\mathrm{Lin}\{e_0, e_1, e_3\}$, то $e_0(t)$, $e_1(t)$ можно дополнить до допустимой тетрады $(e_0(t), e_1(t), e_2, e_3(t))$, где $e_3(t) \in \mathrm{Lin}\{e_0, e_1, e_3\}$ определяется однозначно. Причем

$$e_3 \in \mathrm{Lin}\{e_0(t), e_1(t), e_3(t)\} = \mathrm{Lin}\{e_0, e_1, e_3\}.$$

Утверждение 5.4. *Пусть*

$$\Gamma_2 = \big\{(e_0 + e_1) \wedge (e_1 + te_3) \in G^1 \mid t \in \mathbb{R}\big\}$$

– геодезическая в G^1 для некоторой допустимой тетрады (e_0, e_1, e_2, e_3). Тогда если $\{e(x), h(x), \omega(x)\}$ – допустимое ЭМ-поле, такое, что для любого $x \in U$ $e(x) = e$,

$$h(x) = h, \quad \omega(x) \in \Gamma_2,$$

где $e \in (0,\infty)$, $h \in \mathbb{R}$, *то существует функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *такая что в системе координат* (x^0, x^1, x^2, x^3), *связанной с* (e_0, e_1, e_2, e_3)

$$\omega = (e_0 + e_1) \wedge (e_1 + f(x^0 - x^1)e_3). \tag{53}$$

Доказательство. По аналогии с доказательством предыдущего утверждения определим отображение $s : U \to \mathbb{R}$, такое, что

$$\omega(x) = (e_0 + e_1) \wedge (e_1 + s(x)e_3).$$

Для точки $x_0 \in U$ рассмотрим тетраду $(e_0(t), e_1(t), e_2, e_3(t))$ и систему координат $(x^{*0}, x^{*1}, x^{*2}, x^{*3})$, с ней связанную. Так как $e_3 \in \mathrm{Lin}\{e_0(t), e_1(t), e_3(t)\}$ и

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial x^{*i}}(x_0) &= \frac{\partial s}{\partial x^{*i}}(x_0)(e_0 + e_1) \wedge e_3 \\ &= \frac{\partial s}{\partial x^{*i}}(x_0)\lambda(s(x_0))(e_0(s(x_0)) + e_1(s(x_0))) \wedge e_3,\end{aligned}$$

то существует такое $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, что

$$\lambda_i^{03} = \lambda_i^{13} = \alpha\frac{\partial s}{\partial x^{*i}}(x_0), \quad \lambda_i^{02} = \lambda_i^{12} = 0.$$

Равенства (48)–(51) принимают вид

$$\alpha\left(\frac{\partial s}{\partial x^{*0}}(x_0) + \frac{\partial s}{\partial x^{*1}}(x_0)\right) = 0,$$

$$\alpha\left(\frac{\partial s}{\partial x^{*2}}(x_0)\right) = \alpha\left(\frac{\partial s}{\partial x^{*3}}(x_0)\right) = 0.$$

Откуда

$$\frac{\partial s}{\partial x^{*0}}(x_0) + \frac{\partial s}{\partial x^{*1}}(x_0) = \frac{\partial s}{\partial x^{*2}}(x_0) = \frac{\partial s}{\partial x^{*3}}(x_0) = 0.$$

Поскольку $e_0(s(x_0)) + e_1(s(x_0))$ для каждого x_0 пропорционален вектору $e_0 + e_1$, то в системе координат (x^0, x^1, x^2, x^3), соответствующей тетраде (e_0, e_1, e_2, e_3), это условие можно переписать в виде

$$\frac{\partial s}{\partial x^i}(x_0) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{54}$$

Переходя к координатам (y^0, y^1, y^2, y^3) таким, что

$$y^0 = \frac{x^1 - x^0}{2},\ y^1 = \frac{x^0 + x^1}{2},\ y^2 = x^2,\ y^3 = x^3,$$

получим

$$\frac{\partial s}{\partial x^0} = \frac{\partial s}{\partial y^0}\frac{\partial y^0}{\partial x^0} + \frac{\partial s}{\partial y^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^0} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial s}{\partial y^0} + \frac{\partial s}{\partial y^1}\right)$$

и

$$\frac{\partial s}{\partial x^1} = \frac{\partial s}{\partial y^0}\frac{\partial y^0}{\partial x^1} + \frac{\partial s}{\partial y^1}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial y^0} + \frac{\partial s}{\partial y^1}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial s}{\partial y^i} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

и решениями (54) являются отображения вида $s(x) = f(2y^0) = f(x^0 + x^1)$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – произвольная гладкая функция. Направление ЭМ-поля в этом случае принимает вид

$$\omega = (e_0 + e_1) \wedge (e_1 + f(x^0 - x^1)e_3). \quad \square$$

Если в качестве Γ_2 взять кривую

$$\left\{(e_0 - e_1) \wedge (e_1 + te_3) \in G^1 \mid t \in \mathbb{R}\right\},$$

то аналогичными решениями уравнений (40)–(43) будут

$$\omega = (e_0 - e_1) \wedge (e_1 + f(x^0 + x^1)e_3). \tag{55}$$

В системе координат (x^0, x^1, x^2, x^3) ЭМ-поле с направлением, заданным (53), и постоянными электрическим коэффициентом e и магнитным коэффициентом h имеет вид

$$F = e(e_0 \wedge e_1 + f(x^0 - x^1)e_0 \wedge e_3 + f(x^0 - x^1)e_1 \wedge e_3) \\ + h(-e_2 \wedge e_3 - f(x^0 - x^1)e_1 \wedge e_2 + f(x^0 - x^1)e_0 \wedge e_2).$$

Разделяя пространственные и временные координаты, это поле можно рассматривать как плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x^1, с напряженностями электрического и магнитного полей равными

$$E = (-e, f(x^0 - x^1), -f(x^0 - x^1)),$$
$$H = (h, f(x^0 - x^1), f(x^0 - x^1)).$$

Данную волну можно представить в виде суммы постоянного ЭМ-поля с

$$E^* \equiv (-e, 0, 0), \;\; H^* \equiv (h, 0, 0)$$

и плоской поперечной волны

$$E^{**} = (0, f(x^0 - x^1), -f(x^0 - x^1)), \ \ H^{**} = (0, f(x^0 - x^1), f(x^0 - x^1)),$$

$$(E^{**}, H^{**})_{\mathbb{R}^3}.$$

ЭМ-поле, соответствующее решению (55), отличается только тем, что имеет в данной системе координат противоположное направление распространение волны.

Литература

1. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения.* 5-е изд., Эдиториал УРСС, М. (2001).
2. Д. В. Иванов, *Геометрия многообразия направлений физического пространства.* Диссертация канд. физ.-матем. наук, С.-Пб., СПбГУ (2003).
3. С. Е. Козлов, *Математические основы специальной теории относительности и пространство Лобачевского.* СПбГУ, С.-Пб. (1995).
4. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997).
5. С. Е. Козлов, *Топология и лоренц-инвариантная псевдориманова метрика многообразия направлений в физическом пространстве.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля.* 6-е изд., Наука, М. (1973).
7. В. Ф. Осипов, *Структура пространства-времени: векторная алгебра и анализ.* СПбГУ, С.-Пб. (1995).

Nizkii R. Ya. Maxwell equations and direction of electromagnetic field.

A mapping $F\colon U \to \Lambda_2(M_0)$, $U \subset \mathbb{R}^4$, satisfying the Maxwell equations is regarded as the tensor of a certain electromagnetic field (EM-field) in vacuum. The EM-field is described on the basis of a special decomposition $F = e\omega + h(*\omega)$, where the mapping $\omega\colon U \to G^1$ is called the direction of the EM-field, and $e\colon U \to (0, +\infty)$ and $h\colon U \to \mathbb{R}$ are the electric and magnetic coefficients of the EM-field. The Maxwell equations are reformulated in terms of ω, e, and h. EM-fields whose set of directions is a point or a one-dimensional subset of G^1 are considered.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: nizky@mail.ru

Поступило 17 июня 2004 г.