Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 329, 2005 г.

М. Ю. Никанорова

О КАНОНИЧЕСКИМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ КАСАТЕЛЬНЫХ ВЕКТОРОВ ГРАССМАНИАНА

Введение

В работе [2] были доказаны существование и единственность канонического разложения касательного вектора к грассманиану $G^+_{p,n}$ в плюккеровой модели. На основании такого разложения в [2] построена теория стационарных углов между ориентированными p-плоскостями в n-мерном евклидовом пространстве и исследованы глобальные свойства внутренней метрики многообразий $G^+_{p,n}$. В частности, получены явные формулы для геодезических и кривизн Римана [2, 8]. В настоящей работе решается задача о конструктивном построении канонического разложения для произвольного касательного вектора к грассманову многообразию $G^+_{p,n}$.

В §1 описывается структура плюккерова вложения грассманианов во внешнюю алгебру над исходным евклидовым пространством и поясняется переход к упрощенной форме записи касательных векторов многообразия $G^+_{p,n}$. В §2 вводятся некоторые обозначения и изучается связь между различными представлениями фиксированного касательного вектора. Полученные результаты используются в §3 для построения канонического разложения для касательных векторов некоторого специального вида (теорема 3). В §4 исследуется общий случай (предложение 4, теорема 5).

§1. Предварительные сведения

Напомним конструкцию плюккерова вложения грассманианов $G^+_{p,n}$, образованных p-мерными ориентированными плоскостями n-мерного евклидова пространства V^n, в подпространство $\Lambda_p(V^n)$ внешней алгебры $\Lambda(V^n)$ (см. [1, 3]).

Работа частично поддержана грантом НШ-1914.2003.1.

Каждой ориентированной p-плоскости $U \in G^+_{p,n}$ взаимно-однозначно соответствует простой единичный p-вектор $P(U) = \omega = e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p$. (Здесь $\{e_i\}_{i=1}^p$ – некоторый ортонормированный базис, определяющий ориентацию плоскости U.) При этом плюккерово отображение

$$P : G^+_{p,n} \to \Lambda_p$$

является гладким вложением, а подмногообразие $P\left(G^+_{p,n}\right) \subset \Lambda_p$ называется *плюккеровой моделью* грассманиана $G^+_{p,n}$.

Действие группы $SO(n)$ в многообразии $P\left(G^+_{p,n}\right)$ осуществляется движением объемлющего пространства Λ_p, поэтому внутренняя риманова метрика, индуцированная на грассманиане $G^+_{p,n}$ плюккеровым вложением, $SO(n)$-инвариантна. (Единственность с точностью до множителя $SO(n)$-инвариантных римановых метрик на многообразиях $G^+_{p,n}$ для всех (p,n), кроме $(2,4)$ доказана в работах [4, 5]; многообразие $G^+_{2,4}$ диффеоморфно $S^2 \times S^2$, и любая метрика, задаваемая как риманово произведение сфер произвольных радиусов R_1 и R_2, является $SO(4)$-инвариантной [6].)

Согласно определению, данному в [1], *ранговым пространством* $V_{\tilde\omega}$ произвольного p-вектора $\tilde\omega \in \Lambda_p(V^n)$ называется минимальное из подпространств $W \subset V^n$, таких, что $\tilde\omega \in \Lambda_p(W)$. Для простого p-вектора $\omega = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$ ранговое пространство V_ω совпадает с линейной оболочкой векторов $e_1, \ldots, e_p$.

Операцией внутреннего умножения "$\llcorner$" называется билинейное отображение

$$\llcorner : \Lambda_p(V^n) \times \Lambda_q(V^n) \to \Lambda_{p-q}(V^n), \quad p \geq q \geq 0,$$
$$(\varphi, \xi) \mapsto \varphi \llcorner \xi,$$

такое, что для любых $\varphi \in \Lambda_p(V^n)$, $\xi \in \Lambda_q(V^n)$, $\zeta \in \Lambda_{p-q}(V^n)$, выполнено равенство

$$\langle \varphi \llcorner \xi, \zeta \rangle = \langle \varphi, \xi \wedge \zeta \rangle .$$

Рассмотрим элемент $(\omega, X) \in TG^+_{p,n}$ касательного расслоения грассманова многообразия $G^+_{p,n} \subset \Lambda_p(V^n)$ в его плюккеровой модели.

Ортонормированным базисам $\{e_i\}_{i=1}^p$ и $\{n_j\}_{j=1}^q$, $(q = n - p)$, пространств V_ω и $V_\omega^\perp$ сопоставляется ортонормированный базис

$\{\eta_{ij}\}$ касательного пространства $T_\omega G^+_{p,n}$ (см. [1]):

$$\eta_{ij} = e_1 \wedge \dots \wedge e_{i-1} \wedge n_j \wedge e_{i+1} \wedge \dots \wedge e_p = n_j \wedge (\omega \llcorner e_i). \qquad (1)$$

Таким образом, вектор X может быть представлен в виде

$$X = N_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_p + e_1 \wedge N_2 \wedge \dots \wedge e_p + \dots + e_1 \wedge \dots \wedge e_{p-1} \wedge N_p = \sum_{i=1}^{p} N_i \wedge (\omega \llcorner e_i). \qquad (2)$$

В данной сумме векторы N_i не обязательно попарно ортогональны. В работе [2] было показано, что попарная ортогональность данных векторов возможна при некотором удачном выборе исходных базисов пространств V_ω и $V_\omega^\perp$. А именно, для каждого касательного вектора $X \in T_\omega G^+_{p,n}$ существуют ортонормированные базисы $\{\hat{e}_i\}_1^p$, $\{\hat{n}_j\}_1^q$ пространств V_ω и $V_\omega^\perp$, такие, что формула (2) имеет следующий частный вид:

$$X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \hat{n}_i \wedge (\omega \llcorner \hat{e}_i), \quad r \leq \min\{p,q\}, \quad 0 < \lambda_i \leq \lambda_j, \quad i < j. \qquad (3)$$

Данное разложение вектора X, называемое *каноническим*, единственно. (Приведенные подобные слагаемые в любых двух канонических разложениях при одинаковых λ_i и сами наборы $\{\lambda_i\}$ должны совпадать.)

Доказательство существования такого разложения основано на том, что попарная ортогональность векторов N_i достигается при условии минимальности количества ненулевых слагаемых в сумме (2) и минимальности произведения $|N_1|\cdot|N_2|\cdot\ldots\cdot|N_r|$, $r \leq p$. При этом возникает задача нахождения некоторого специального ортогонального преобразования пространства V_ω, переводящего о.н.б. $\{e_i\}_{i=1}^p$ в новый базис $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^p$, позволяющий представить вектор X в каноническом виде (3). (Очевидно, что при фиксированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^p$ векторы N_i в сумме (2) определяются единственным образом.)

В процессе решения указанной задачи нам будет удобно использовать упрощенную форму записи касательных векторов к грассманиану $G^+_{p,n}$ в точке ω. Напомним, что в [2] для любого фиксированного p-мерного подпространства $W \subset V^n$ определено линейное пространство

$$\Lambda_{r,s}(W) = \mathrm{Lin}\,\{\Lambda_r(W) \wedge \Lambda_s(W^\perp)\} \subset \Lambda_{r+s}(V^n).$$

В частности, $T_\omega G^+_{p,n} = \Lambda_{p-1,1}(V_\omega)$.

Если пространство W ориентировано (т.е. зафиксирован один из двух единичных p-векторов $E \in W$), то во внешней алгебре $\Lambda(W)$ действует ортогональный оператор Ходжа:

$$*(W) : \Lambda(W) \to \Lambda(W), \quad *(W)(\varphi) = E \llcorner \varphi.$$

Пусть ω – единичный p-вектор ориентации пространства V_ω. Тогда существует единственный линейный оператор

$$*_\omega : \Lambda(V^n) \to \Lambda(V^n),$$

удовлетворяющий равенствам

$$*_\omega(x \wedge y) = (*(V_\omega)x) \wedge y, \quad x \in \Lambda(V_\omega), \quad y \in \Lambda(V_\omega^\perp).$$

Этот оператор является изометрией алгебры $\Lambda(V^n)$. Его сужение на $\Lambda_{r,s}(V_\omega)$ – изометрический изоморфизм пространств $\Lambda_{r,s}(V_\omega)$ и $\Lambda_{p-r,s}(V_\omega)$ (см. [2]). При этом для базисных векторов η_{ij} справедливо соотношение

$$*_\omega \eta_{ij} = e_i \wedge n_j. \tag{4}$$

Таким образом, вышеперечисленные свойства оператора $*_\omega$ позволяют в дальнейших обозначениях заменять векторы η_{ij} их образами $e_i \wedge n_j$. В частности, каноническое разложение вектора $X \in T_\omega G^+_{p,n}$ приобретет вид

$$X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \hat{e}_i \wedge \hat{n}_i, \quad r \le \min\{p, q\}, \quad 0 < \lambda_i \le \lambda_j, \quad i < j. \tag{5}$$

§2. Некоторые обозначения и вспомогательные предложения

В формуле (2) явно укажем разложение векторов N_i по ортонормированному базису $\{n_j\}_{j=1}^q$ пространства $V_\omega^\perp$ и исключим нулевые слагаемые. Тогда, с учетом некоторой перенумерации наборов $\{e_i\}_1^p$ и $\{n_j\}_1^q$, получим:

$$\begin{aligned} X = e_1 \wedge \left(A_1 \cdot (n_i)_{i=1}^l\right) + \\ + e_2 \wedge \left(A_2 \cdot (n_i)_{i=1}^l\right) + \dots + e_k \wedge \left(A_k \cdot (n_i)_{i=1}^l\right), \quad l \le q. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $A_i = (a_{i1}, \ldots, a_{il})$ – строки, образующие некоторую вещественную матрицу размером $k \times l$ $A = (a_{ij})$; $(n_i)_{i=1}^l$ – столбец $(n_1, \ldots, n_l)^T$. При этом считаем, что

$$N_j = A_j \cdot (n_i)_{i=1}^l = a_{j1}n_1 + a_{j2}n_2 + \cdots + a_{jl}n_l, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Следующее утверждение демонстрирует взаимосвязь между левой и правой частями бивекторов в сумме (6), возникающую при выражении одной из них через некоторый новый набор векторов соответствующего пространства.

Предложение 1. *Пусть* $(e_j)_{j=1}^k = B(\tilde{e}_i)_{i=1}^m$ *(здесь* $\tilde{e}_i \in V_\omega$, *а* B *– некоторая* $k \times m$ *матрица). Тогда вектор* X (6) *имеет вид*

$$X = \tilde{e}_1 \wedge \tilde{N}_1 + \tilde{e}_2 \wedge \tilde{N}_2 + \cdots + \tilde{e}_m \wedge \tilde{N}_m,$$

где $(\tilde{N}_j)_{j=1}^m = B^T A(n_i)_{i=1}^l = B^T (N_j)_{j=1}^k$.

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}
X &= (b_{11}\tilde{e}_1 + b_{12}\tilde{e}_2 + \cdots + b_{1m}\tilde{e}_m) \wedge (A_1 \cdot (n_i)_1^l) \\
&+ (b_{21}\tilde{e}_1 + b_{22}\tilde{e}_2 + \cdots + b_{2m}\tilde{e}_m) \wedge (A_2 \cdot (n_i)_1^l) \\
&+ \cdots + (b_1\tilde{e}_1 + b_2\tilde{e}_2 + \cdots + b_{km}\tilde{e}_m) \wedge (A_k \cdot (n_i)_1^l) \\
&= \tilde{e}_1 \wedge (b_{11}A_1 \cdot (n_i)_1^l + b_{21}A_2 \cdot (n_i)_1^l + \cdots + b_1 A_k \cdot (n_i)_1^l) \\
&+ \tilde{e}_2 \wedge (b_{12}A_1 \cdot (n_i)_1^l + b_{22}A_2 \cdot (n_i)_1^l + \cdots + b_2 A_k \cdot (n_i)_1^l) \\
&+ \cdots + \tilde{e}_m \wedge (b_{1m}A_1 \cdot (n_i)_1^l + b_{2m}A_2 \cdot (n_i)_1^l + \cdots + b_{km}A_k \cdot (n_i)_1^l).
\end{aligned}$$

Обозначим через B_j j-й столбец матрицы B. Тогда

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_j &= b_{1j}A_1 \cdot (n_i)_1^l + \\
&+ b_{2j}A_2 \cdot (n_i)_1^l + \cdots + b_{kj}A_k \cdot (n_i)_1^l = B_j^T A(n_i)_1^l, \quad j = 1, \ldots, m.
\end{aligned}$$

Следовательно, $(\tilde{N}_j)_1^m = B^T A(n_i)_1^l$, что и требовалось доказать. □

Следствие. *Пусть в условиях предложения* 1 $(\tilde{e}_i)_1^k = P(e_i)_1^k$, P*-ортогональная матрица, т.е.* $\{\tilde{e}_i\}_1^k$ *– о.н.б. в* $\mathrm{Lin}\,\{e_i\}_1^k$. *Тогда*

$$X = \tilde{e}_1 \wedge \tilde{N}_1 + \tilde{e}_2 \wedge \tilde{N}_2 + \cdots + \tilde{e}_k \wedge \tilde{N}_k,$$

где $(\tilde{N}_i)_1^k = P(N_i)_1^k = PA(n_i)_1^l$.

Доказательство. $(e_i)_1^k = P^{-1}(\tilde{e}_i)_1^k = P^T(e_i)_1^k$, следовательно, $(\tilde{N}_i)_1^k = \left(P^T\right)^T (N_i)_1^k = P(N_i)_1^k$. □

Пусть $\tilde{V} = \mathrm{Lin}\,\{e_1, \dots, e_k\}$, и пусть A – вещественная матрица размером $k \times k$. Рассмотрим линейное преобразование

$$\mathcal{A} : \tilde{V} \to \tilde{V} : \mathcal{A}(e_i)_1^k = A(e_i)_1^k, \quad \text{т.е.} \quad \mathcal{A} : e_i \mapsto A_i \cdot (e_i)_1^k.$$

Мы будем называть A матрицей преобразования $\mathcal{A}$ в базисе $\{e_i\}_1^k$.

Предложение 2. *Пусть A, B – матрицы некоторых преобразований $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} : \tilde{V} \to \tilde{V}$ в базисе $\{e_i\}_1^k$. Тогда во введенных выше обозначениях имеем: $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})\,(e_i)_1^k = BA(e_i)_1^k$.*

Доказательство. Рассмотрим действие преобразования $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ на вектор e_i:

$$\mathcal{B}(e_i) = B_i(e_i)_1^k = b_{i1}e_1 + b_{i2}e_2 + \dots + b_{ik}e_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})\,(e_i) &= \sum_{j=1}^{k} b_{ij}\mathcal{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{k} b_{ij}A_j(e_i)_1^k \\ &= \sum_{j=1}^{k} b_{ij}\left(\sum_{s=1}^{k} a_{js}e_s\right) = \sum_{s=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k} b_{ij}a_{js}\right) e_s = B_iA(e_i)_1^k.\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(e_i)_1^k = BA(e_i)_1^k$. □

§3. Основная теорема для касательных векторов специального вида

Возвращаясь к вопросу о каноническом разложении касательных векторов, обратим внимание на особый случай представления вектора $X \in T_\omega G_{p,n}^{+}$ в виде (6). Если для некоторой $(k \times l)$-матрицы A набор векторов $(N_j)_{j=1}^k = (A_j(n_i)_{i=1}^l)_{j=1}^k$ ортогонален, то разложение (6) само является каноническим. Оно содержит $k_1 = \mathrm{rk}\,A = \dim\left(\mathrm{Lin}\{N_j\}_1^k\right)$ ненулевых слагаемых, $k_1 \le \min\{k, l\}$.

Данное обстоятельство позволяет предположить, что и в случае произвольной матрицы A каноническое разложение вектора X тоже будет содержать $k_1 = \mathrm{rk}\,A$ слагаемых. Доказанные ниже теоремы 3 и 5 подтверждают это предположение, причем в процессе доказательства получен конструктивный способ нахождения ортонормированных базисов

$$\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^{k_1} \subset \mathrm{Lin}\,\{e_i\}_{i=1}^k, \quad \{\tilde{n}_i\}_{i=1}^{k_1} \subset \mathrm{Lin}\,\{N_i\}_{i=1}^k$$

и коэффициентов $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k_1}$, определяющих каноническое разложение вектора X:

$$X = \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i \tilde{e}_i \wedge \tilde{n}_i, \quad r \leq \min\{p, q\}, \quad 0 < \lambda_i \leq \lambda_j, \quad i < j. \tag{7}$$

Сначала рассмотрим случай, когда $l = k$ и квадратная матрица A невырожденна.

Теорема 3. *Пусть касательный вектор $X \in T_\omega G_{p,n}^{+}$ представлен в виде*

$$X = e_1 \wedge \left(A_1 \cdot (n_i)_1^k\right) + \dots + e_k \wedge \left(A_k \cdot (n_i)_1^k\right),$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0.$$

Тогда существует ортогональное преобразование $\mathcal{P}^*$ пространства $\tilde{V} = \operatorname{Lin}\{e_1, \dots, e_k\}$, переводящее ортонормированный базис $\{e_i\}_1^k$ в ортонормированный базис $\{\tilde{e}_i\}_1^k$ $((\tilde{e}_i)_1^k = P^T (e_i)_1^k$, P^T – матрица преобразования $\mathcal{P}^*$ в базисе $\{e_i\}_1^k)$ и такое, что разложение вектора X, имеющее вид

$$X = \tilde{e_1} \wedge \tilde{N}_1 + \tilde{e_2} \wedge \tilde{N}_2 + \dots + \tilde{e_k} \wedge \tilde{N}_k, \quad (\tilde{N}_i)_1^k = P^T A (n_i)_1^k,$$

является каноническим (т.е. $\langle \tilde{N}_i, \tilde{N}_j \rangle = 0$, $i \neq j$; $\tilde{N}_i \neq \overrightarrow{0}$ $\forall i$).

При этом набор квадратов коэффициентов $\{\lambda_i^2\}_1^k = \{|\tilde{N}_i|^2\}_1^k$ канонического разложения вектора X совпадает с набором собственных чисел симметрической матрицы $A^T A$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\tilde{V}} = \operatorname{Lin}\{n_i\}_{i=1}^k$. Рассмотрим самосопряженный оператор

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^* : \tilde{\tilde{V}} \to \tilde{\tilde{V}},$$

которому в базисе $\{n_i\}_1^k$ соответствует матрица $A^T A$.

Поскольку $\det A \neq 0$, то $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*$ – положительно определенный. Значит, существует ортонормированный базис $\{f_i\}_{i=1}^k$ пространства $\tilde{\tilde{V}}$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*$, в котором матрица данного преобразования имеет вид:

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_k^2), \quad 0 < \lambda_i \leq \lambda_j, \quad i < j,$$

($\{\lambda_i^2\}$ – набор собственных чисел матрицы A^TA), т.е.

$$\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^*(f_i)_1^k = D(f_i)_1^k = \begin{pmatrix}\lambda_1^2 f_1\\ \vdots \\ \lambda_k^2 f_k\end{pmatrix}.$$

Пусть F – ортогональная $(k\times k)$-матрица: $(f_i)_1^k = F(n_i)_1^k$. Тогда $(n_i)_1^k = F^T(f_i)_1^k$. Рассмотрим преобразование $\mathcal{B}$, имеющее в базисе $(f_i)_1^k$ матрицу $B = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$. Очевидно, $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}\circ\mathcal{A}^*$ (так как $B^2 = D$). Имеем:

$$\mathcal{B}(n_i)_1^k = \mathcal{B}(F^T(f_i)_1^k) = F^TB(f_i)_1^k = F^TBF(n_i)_1^k.$$

Значит, в базисе $\{n_i\}_1^k$ преобразование $\mathcal{B}$ имеет матрицу F^TBF. (Очевидно, что данное правило верно для любого преобразования $\mathcal{B}$ и матрицы перехода F.)

Представим преобразование $\mathcal{A}$ в виде композиции ортогонального и диагонального преобразований в базисе $\{f_i\}_1^k$ (см. [7]):

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}\circ(\mathcal{B}^{-1}\circ\mathcal{A}). \tag{8}$$

(Действительно, в базисе $\{f_i\}_1^k$ преобразование $\mathcal{B}^{-1}\circ\mathcal{A}$ имеет матрицу FAF^TB^{-1}. Поскольку FA^TAF^T – матрица преобразования $\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^*$ в базисе $\{f_i\}_1^k$, то

$$(FAF^TB^{-1})^T\cdot(FAF^TB^{-1}) = B^{-1}FA^TF^TFAF^TB^{-1}$$
$$= B^{-1}FA^TAF^TB^{-1} = B^{-1}DB = E,$$

и, следовательно, преобразование $\mathcal{B}^{-1}\circ\mathcal{A}$ ортогонально.)

Напишем матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в базисе $\{n_i\}_1^k$, используя (8):

$$A = AF^TB^{-1}FF^TBF = (AF^TB^{-1})BF.$$

Поскольку FAF^TB^{-1} – матрица ортогонального преобразования $\mathcal{B}^{-1}\circ\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе $\{f_i\}_1^k$, то матрица $P = AF^TB^{-1}$ также ортогональна, при этом $A = PBF$. Последнюю формулу можно переписать в следующем виде: $P^TA = BF$.

Рассмотрим $(\tilde e_i)_1^k = P^T(e_i)_1^k$ – о.н.б. пространства $\tilde V$. Тогда, в силу следствия к предложению 1,

$$X = \tilde e_1\wedge\tilde N_1 + \tilde e_2\wedge\tilde N_2 + \cdots + \tilde e_k\wedge\tilde N_k,$$

где $(\tilde{N}_i)_1^k = P^T A(n_i)_1^k = BF(n_i)_1^k$. Очевидно, что

$$BF = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 F_1 \\ \vdots \\ \lambda_k F_k \end{pmatrix}.$$

(Здесь F_i – строки матрицы F.)

Следовательно, $\langle \tilde{N}_i, \tilde{N}_j \rangle = 0$ при $i \neq j$, $|\tilde{N}_i| = \lambda_i$. Положим

$$\tilde{n}_i := \frac{\tilde{N}_i}{\lambda_i} = f_i.$$

Тогда разложение

$$X = \lambda_1 \tilde{e}_1 \wedge \tilde{n}_1 + \dots + \lambda_k \tilde{e}_k \wedge \tilde{n}_k$$

является каноническим, а матрица P^T задает искомое преобразование $\mathcal{P}^*$.

Замечание 1. Пусть в условиях теоремы 3 матрица A симметрична. Тогда существует $\{\tilde{f}_i\}_1^k$ – о.н.б. пространства $\tilde{\tilde{V}}$, в котором преобразование $\mathcal{A}$ имеет диагональную матрицу

$$B = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_2), \quad 0 < |\mu_i| \leq |\mu_j|, \quad i < j.$$

($\{\mu_i\}_1^k$ – набор собственных чисел A). Тогда $(\tilde{f}_i)_1^k = Q(n_i)_1^k$, где Q – ортогональная матрица, значит, $B = QAQ^T$. Пусть $(\tilde{e}_i)_1^k = Q(e_i)_1^k$. Тогда, по следствию к предложению 1,

$$X = \tilde{e}_1 \wedge \tilde{N}_1 + \tilde{e}_2 \wedge \tilde{N}_2 + \dots + \tilde{e}_k \wedge \tilde{N}_k;$$
$$(\tilde{N}_i)_1^k = QA(n_i)_1^k = BQ(n_i)_1^k.$$

Следовательно, $|\tilde{N}_i| = |\mu_i|$, $\langle \tilde{N}_i, \tilde{N}_j \rangle = 0$, $i \neq j$. Положим $\tilde{n}_i = \dfrac{\tilde{N}_i}{|\mu_i|} = \pm \tilde{f}_i$. Тогда разложение

$$X = |\mu_1| \tilde{e}_1 \wedge \tilde{n}_1 + \dots + |\mu_k| \tilde{e}_k \wedge \tilde{n}_k$$

– каноническое.

Значит, для симметричной матрицы A (с $\det A \neq 0$), преобразование $\mathcal{P}^*$ может быть задано матрицей Q. □

Следствие. *В условиях теоремы 3 количество слагаемых в каноническом разложении вектора X равно k.* □

§4. Общий случай

Теперь рассмотрим случай произвольных размерностей l, k и произвольной $(k \times l)$-матрицы A. При этом набор векторов $(N_i)_1^k = A(n_i)_1^l$ может быть линейно зависим. Напомним, что через k_1 мы обозначили ранг матрицы A (см. §3).

Предложение 4. *Пусть касательный вектор $X \in T_\omega G_{p,n}^+$ представлен в виде суммы k ненулевых слагаемых:*

$$X = e_1 \wedge A_1^{\cdot}(n_i)_1^l + \cdots + e_k \wedge A_k^{\cdot}(n_i)_1^l.$$

Тогда существует невырожденное преобразование $\mathcal{D}$ пространства $\tilde{V} = \mathrm{Lin}\{e_i\}_1^k$, задаваемое в базисе $\{e_i\}_1^k$ некоторой $(k \times k)$-матрицей D ($(g_i)_1^k = D(e_i)_1^k$), такое, что, с учетом некоторой перенумерации индексов,

$$X = g_1 \wedge \tilde{N}_1 + g_2 \wedge \tilde{N}_2 + \cdots + g_k \wedge \tilde{N}_k,$$

где

$$\tilde{N}_{k_1+1} = \tilde{N}_{k_1+2} = \cdots = \tilde{N}_k = \overrightarrow{0}; \quad \langle \tilde{N}_i, \tilde{N}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j \le k_1. \qquad (9)$$

(Здесь, в силу предложения 1, $(\tilde{N}_i)_1^k = (D^{-1})^T (N_i)_1^k = (D^{-1})^T A (n_i)_1^l$.)

Доказательство. Условия (9) означают, что k_1 строк матрицы $(\mathcal{D}^{-1})^T A$ должны быть ортонормированными, а остальные $k - k_1$ – нулевыми.

Рассмотрим процесс последовательной ортонормировки строк матрицы A:

$a_1 := A_1 / |A_1|$;

$a'_j := A_j - \sum\limits_{i=1}^{j-1} \langle a_i, A_j \rangle a_i$;

если $a'_j = \overrightarrow{0}$, то $a_j := a'_j = \overrightarrow{0}$;

если $a'_j \ne \overrightarrow{0}$, то $a_j := a'_j / |a'_j|$; $j = 2, \ldots, k$.

При этом вычитанию из строки j всех предыдущих строк, умноженных на некоторые числа α_i, соответствует умножение матрицы A слева на матрицу

$$\mathcal{D}_{1,j}(k\times k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{j-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det \mathcal{D}_{1,j} \neq 0.$$

Умножению j-й строки на число α соответствует умножение слева на матрицу

$$\mathcal{D}_{2,j}(k\times k) = \operatorname{diag}\,(1, 1, \dots, \alpha, 1, \dots, 1)\,, \quad \det \mathcal{D}_{2,j} \neq 0.$$

В результате получим матрицу размером $k \times l$:

$$\tilde{A} = \mathcal{D}_{2,k} \cdot \mathcal{D}_{1,k} \cdot \ldots \cdot \mathcal{D}_{2,2} \cdot \mathcal{D}_{1,2} \cdot \mathcal{D}_{2,1} \cdot A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}.$$

Количество нулевых строк матрицы $\tilde{A}$ равно $k - \operatorname{rk} A = k - k_1$; для всех a_i, таких, что $a_j \neq 0$, выполнено $\langle a_i, a_j\rangle = \delta_{ij}$. Значит, в качестве матрицы $\mathcal{D}$ можно взять

$$\mathcal{D} = \left((\mathcal{D}_{2,k} \cdot \mathcal{D}_{1,k} \cdot \ldots \cdot \mathcal{D}_{2,2} \cdot \mathcal{D}_{1,2} \cdot \mathcal{D}_{2,1})^{-1}\right)^T, \quad \det \mathcal{D} \neq 0. \qquad \square$$

Теорема 5. *В условиях предложения* 4 *количество ненулевых слагаемых канонического разложения вектора X равно рангу матрицы A.*

Доказательство. Результат предложения 4 позволяет представить вектор X в виде:

$$X = g_1 \wedge \tilde{N}_1 + \dots + g_{k_1} \wedge \tilde{N}_{k_1}. \tag{10}$$

Здесь набор векторов $\{g_i\}_1^{k_1} \subset \operatorname{Lin}\{e_i\}_1^k$ линейно независим; $\{\tilde{N}_i\}_1^{k_1} \subset \operatorname{Lin}\{n_i\}_1^l$, $\langle \tilde{N}_i, \tilde{N}_j\rangle = \delta_{ij}$. Пусть $\{\tilde{g}_i\}_1^{k_1}$ – о.н.б. в $\operatorname{Lin}\{g_i\}_1^{k_1}$ (его можно построить путем ортонормирования базиса $\{g_i\}_1^{k_1}$).

Значит, существует некоторая невырожденная $(k_1 \times k_1)$-матрица G, такая, что $(g_i)_1^{k_1} = G(\tilde{g}_i)_1^{k_1}$.

Переобозначив наборы $\{\tilde{g}_i\}_1^{k_1}$ и $\{\tilde{N}_i\}_1^{k_1}$, можно воспользоваться теоремой 3 и получить каноническое разложение вектора X. Количество ненулевых слагаемых в нем будет равно $k_1 = \operatorname{rk} A$. $\square$

Литература

1. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественых грассмановых многообразий.* I, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 84–107.
2. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественых грассмановых многообразий.* III. — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 108–129.
3. А. А. Борисенко, Ю. Н. Николаевский, *Многообразия Грассмана и грассманов образ многообразий.* — Успехи мат. наук **46**, No. 2 (1991), 41–81.
4. E. Cartan, *Oeuvres completes.* — I. Paris (1952).
5. K. Leichtweiss, *Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten.* — Math. Z. **76** (1961), 334–366.
6. С. Е. Козлов, *Ортогонально инвариантные римановы метрики на вещественных грассмановых многообразиях.* — Мат. физ. Анализ. Геометрия **4**, No. 1–2 (1997).
7. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц* — Наука, М. (1966).
8. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественых грассмановых многообразий.* V. — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998), 104–120.

Nikanorova M. Yu. Canonical representation of tangent vectors of Grassmannians.

The structure of the tangent bundle of the real Grassmann manifold $G^+_{p,n}$ under the Plücker embedding (in the exterior algebra of the initial Euclidean space) is studied. Explicit expressions for the relation between decompositions of a tangent vector with respect to different bases of the tangent space are obtained, and a constructive method yielding the canonical (= simplest) decomposition is presented.

С.-Петербургский государственный университет

E-mail: mashuk@mn10097.spb.edu

Поступило 5 декабря 2004 г.