Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 329, 2005 г.

С. С. Подкорытов

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ СФЕРЫ В ОДНОСВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Введение

Полагаем $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. Для конечного множества E и числа $r \in \mathbb{N}$ полагаем

$$E(r) = \{\, F \subset E : |F| \leqslant r \,\}.$$

Для отображения $a\colon X \to Y$ полагаем: $\Gamma(a) \subset X \times Y$ – его график.

Основные термины. Пусть даны множества X, Y, число $r \in \mathbb{N}$ и абелева группа M.

Обозначение и определение. *Пусть даны конечное множество B отображений $a\colon X \to Y$ и конечное множество $E \subset X \times Y$. Для отображения $k\colon E(r) \to M$ задаём отображение $k_B\colon B \to M$ формулой*

$$k_B(a) = \sum_{F \in E(r):\, F \subset \Gamma(a)} k(F).$$

Отображение $g\colon B \to M$ называем (E, r)-определимым, если существует такое отображение $k\colon E(r) \to M$, что $g = k_B$.

Определение. *Пусть дано некоторое множество A отображений $a\colon X \to Y$. Отображение $f\colon A \to M$ называем r-определимым, если для любого конечного множества $B \subset A$ существует конечное множество $E \subset X \times Y$ такое, что отображение $f|_B$ (E, r)-определимо.*

Ср. понятие персептрона ограниченного порядка (см. [1]). Начнем с двух примеров r-определимых отображений.

Предложение 1. *Пусть A – множество всех измеримых отображений пространства X с конечной мерой в измеримое пространство Y, $p\colon (X \times Y)^r \to \mathbb{R}$ – ограниченная измеримая функция. Тогда*

Работа частично поддержана Фондом поддержки отечественной науки и грантом НШ-1914.2003.1.

отображение

$$f\colon A \to \mathbb{R}, \qquad f(a) = \int\limits_{X^r} p(x_1, a(x_1), \dots, x_r, a(x_r))\, dx_1 \dots dx_r,$$

r-определимо.

Доказательство. Для $a \in A$ зададим измеримую функцию

$$P_a\colon X^r \to \mathbb{R},$$

полагая

$$P_a(x_1, \dots, x_r) = p(x_1, a(x_1), \dots, x_r, a(x_r)).$$

Пусть дано конечное множество $B \subset A$. Для $x \in X^r$ зададим на B отношение

$$R_x = \{\, (a, a') : P_a(x) = P_{a'}(x) \,\}.$$

Пусть $Q = \{R_x \mid x \in X^r\}$. Множества

$$D_R = \{\, x \in X^r \mid R_x = R \,\}, \qquad R \in Q,$$

измеримы и образуют разбиение пространства X^r. Для каждого $R \in Q$ выберем точку $x_R \in D_R$. Для $R \in Q$, $a \in B$ пусть

$$F(R, a) = \{\, (x_s, a(x_s)) \mid s = 1, \dots, r \,\},$$

где $(x_1, \dots, x_r) = x_R$. Пусть

$$E = \bigcup_{R \in Q,\ a \in B} F(R, a).$$

Построим отображение $k\colon E(r) \to \mathbb{R}$. Для $F \in E(r)$ выберем, если можно, такое $a \in B$, что $F \subset \Gamma(a)$, и положим

$$k(F) = \sum_{R \in Q : F(R,a) = F} \int\limits_{D_R} P_a(x)\, dx.$$

От выбора a результат не зависит, так как при $F \subset \Gamma(a) \cap \Gamma(a')$ условия $F(R, a) = F$ и $F(R, a') = F$ равносильны и влекут совпадение функций P_a и $P_{a'}$ в точке x_R и, следовательно, на множестве D_R. Если нужного a не существует, зададим $k(F)$ произвольно. Для $a \in B$ имеем

$$k_B(a) = \sum_{F \in E(r) : F \subset \Gamma(a)} k(F) = \sum_{F \in E(r) : F \subset \Gamma(a)} \; \sum_{R \in Q : F(R,a) = F} \int\limits_{D_R} P_a(x)\, dx$$

$$= \sum_{R\in Q} \int_{D_R} P_a(x)\,dx = \int_{X^r} P_a(x)\,dx = f(a)$$

(здесь используется, что $F(R,a) \subset \Gamma(a)$). □

Предложение 2. *Пусть A – множество всех гладких вложений $a\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$, M – абелева группа. Тогда:*

(а) *любой инвариант Васильева $f\colon A \to M$ порядка не выше r $2r$-определим;*

(б) *любой r-определимый изотопический инвариант $f\colon A \to M$ – инвариант Васильева порядка не выше r.*

Сначала мы докажем утверждение (б), как более простое.

Доказательство п. (б). Пусть дан особый узел $a\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ с $r+1$ двойными точками $y_0,\dots,y_r \in \mathbb{R}^3$. Для $c_0,\dots,c_r = \pm 1$ пусть

$$a_{c_0\dots c_r}\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$$

– узел, получающийся из особого узла a разрешением, направление которого в точке y_s равно c_s, $s = 0,\dots,r$. Нужно показать, что

$$\sum_{c_0,\dots,c_r=\pm 1} c_0\dots c_r f(a_{c_0\dots c_r}) = 0.$$

Для каждого $s = 0,\dots,r$ выберем окрестность V_s точки y_s – так, чтобы эти окрестности не пересекались. Пусть $U_s = a^{-1}(V_s)$, $s = 0,\dots,r$. Считаем, что отображение $a_{c_0\dots c_r}$ на множестве U_s определяется числом c_s, а вне этих множеств совпадает с a. Пусть

$$B = \{a_{c_0\dots c_r} \mid c_0,\dots,c_r = \pm 1\}.$$

Есть такие конечное множество $E \subset S^1 \times \mathbb{R}^3$ и отображение $k\colon E(r) \to M$, что $k_B = f|_B$. Имеем

$$\sum_{c_0,\dots,c_r=\pm 1} c_0\dots c_r f(a_{c_0\dots c_r}) = \sum_{c_0,\dots,c_r=\pm 1} c_0\dots c_r \sum_{F\in E(r):F\subset\Gamma(a_{c_0\dots c_r})} k(F)$$

$$= \sum_{F\in E(r)} \Bigg(\sum_{c_0,\dots,c_r=\pm 1:F\subset\Gamma(a_{c_0\dots c_r})} c_0\dots c_r \Bigg) k(F).$$

Для любого $F \in E(r)$ существует такое s, что $F \cap U_s \times \mathbb{R}^3 = \varnothing$ и, следовательно, истинность включения $F \subset \Gamma(a_{c_0\dots c_r})$ не зависит от c_s, а значит, внутренняя сумма равна нулю. □

Гауссовы диаграммы. *Стрелка (со знаком)* – тройка (x, x', c), где $x, x' \in S^1 \setminus \{x_0\}$ (здесь x_0 – отмеченная точка), $x \neq x'$ и $c = \pm 1$. *Носителем* стрелки (x, x', c) называем множество $\{x, x'\}$. *(Гауссова) диаграмма* – конечное множество стрелок с непересекающимися носителями. Объединение носителей всех стрелок диаграммы g – её *носитель* $\operatorname{supp} g$. Пусть G_r – множество всех диаграмм мощности $\leqslant r$.

Считая, что $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, для отображения $a\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ полагаем:

$$a_g\colon S^1 \to \mathbb{R}^2, \qquad a_v\colon S^1 \to \mathbb{R}$$

– его проекции. Узел a называем *допустимым*, если a_g – погружение без самокасаний и тройных точек, причём $a_g(x_0)$ – его простая точка. С допустимым узлом a связана диаграмма $\delta(a)$ – множество таких стрелок (x, x', c), что

$$a_g(x) = a_g(x'),\ a_v(x) < a_v(x') \quad \text{и} \quad c = \operatorname{sgn}[da_g(x), da_g(x')]$$

(d – дифференцирование вдоль S^1, квадратные скобки – стандартная форма площади на $\mathbb{R}^2$).

Доказательство п. (a). Пусть даны абелева группа M и инвариант Васильева $f\colon A \to M$ порядка $\leqslant r$. По теореме Гусарова [4] существует отображение $p\colon G_r \to M$ такое, что для любого допустимого узла a

$$f(a) = \sum_{g \subset \delta(a) : |g| \leqslant r} p(g).$$

(Теорема Гусарова позволяет выбрать отображение p инвариантным относительно сохраняющих отмеченную точку изотопий окружности. Это не понадобится.) Покажем, что инвариант f $2r$-определим. Пусть дано конечное множество $B \subset A$. Пусть $Z \subset S^1$ – множество тех точек x, для которых существуют узлы $a, a' \in B$ с

$$a(x) = a'(x), \qquad da(x) \neq da'(x).$$

Множество Z конечно. Есть такой изотопный тождественному диффеоморфизм $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, что узлы $h \circ a$, $a \in B$, допустимы и носители их диаграмм не пересекаются с Z. Вместо $h \circ a$ пишем $\widetilde{a}$.

Заметим, что (*) если $a \in B$, $g \subset \delta(\widetilde{a})$ и отображение $a' \in B$ совпадает с a на множестве $\operatorname{supp} g$, то $g \subset \delta(\widetilde{a}')$. Для $a \in B$, $g \subset \delta(\widetilde{a})$ пусть

$$F(a,g) = \{\, (x, a(x)) \mid x \in \operatorname{supp} g \,\}.$$

Пусть E – объединение всех таких множеств. Оно конечно. Построим отображение

$$k\colon E(2r) \to M.$$

Для $a \in B$, $g \subset \delta(\widetilde{a})$, $|g| \leqslant r$, пусть $k(F(a,g)) = p(g)$ (это корректно, так как, по (*), равенство $F(a,g) = F(a',g')$ влечёт $g = g'$). Для остальных $F \in E(2r)$ пусть $k(F) = 0$. Для $a \in B$ имеем

$$k_B(a) = \sum_{F \in E(2r) : F \subset \Gamma(a)} k(F)$$

$$= \sum_{g \subset \delta(\widetilde{a}) : |g| \leqslant r} k(F(a,g)) = \sum_{g \subset \delta(\widetilde{a}) : |g| \leqslant r} p(g) = f(\widetilde{a}) = f(a)$$

(здесь используется тот факт, что если $F(a',g) \subset \Gamma(a)$, то, по (*), $g \subset \delta(\widetilde{a})$ и $F(a',g) = F(a,g)$). □

Основной результат. Пространство Y называем *допустимым*, если существуют клеточное пространство Z и (слабая гомотопическая) эквивалентность $e\colon Y \to Z$. Для числа $m \in \mathbb{N}$ и пунктированного пространства Y полагаем: $\Pi_m(Y)$ – множество всех *связанных* (т. е. отображающих отмеченную точку в отмеченную точку) непрерывных отображений $a\colon S^m \to Y$, и отображение

$$h\colon \Pi_m(Y) \to \pi_m(Y), \qquad h(a) = [a]$$

называем *основным*.

Теорема. *Для любого $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, существует такое $r \in \mathbb{N}$, что для любого односвязного допустимого пунктированного пространства Y основное отображение $h\colon \Pi_m(Y) \to \pi_m(Y)$ r-определимо.*

Более слабое утверждение доказано в [2].

§1. Предварительный материал

(1.1) Симплициальные объекты. Множества $[p] = \{0, \dots, p\}$, $p \in \mathbb{N}$, и нестрого возрастающие отображения между ними образуют категорию. Для $i \in [p]$ полагаем:

$$\delta_i^p : [p-1] \to [p]$$

– морфизм с $\operatorname{im}\delta_i^p = [p] \setminus \{i\}$. Для симплициального множества $\mathbf{T}$ морфизм $k\colon [q] \to [p]$ индуцирует отображение $k^\star\colon \mathbf{T}_p \to \mathbf{T}_q$.

Комбинаторный p-симплекс $\mathbf{\Delta}^p$ ($p \in \mathbb{N}$) – симплициальное множество с $\mathbf{\Delta}^p_q = \operatorname{Hom}([q],[p])$ и очевидными структурными отображениями; $\dot{\mathbf{\Delta}}^p \subset \mathbf{\Delta}^p$ – его край. Морфизм $k\colon [q] \to [p]$ индуцирует симплициальное отображение $k_\Delta\colon \mathbf{\Delta}^q \to \mathbf{\Delta}^p$. Для симплициального множества $\mathbf{T}$ и симплекса $t \in \mathbf{T}_p$ ($p \in \mathbb{N}$) симплициальное отображение $[t]\colon \mathbf{\Delta}^p \to \mathbf{T}$ – комбинаторное характеристическое отображение симплекса t. Полагаем $\mathbf{I} = \mathbf{\Delta}^1$.

Симплициальное отображение $\mathbf{f}$ называем *сюръективным*, если отображения $\mathbf{f}_q$, $q \in \mathbb{N}$, сюръективны, и *инъективным*, если они инъективны. Симплициальную абелеву группу $\mathbf{U}$ называем *свободной*, если группы $\mathbf{U}_q$, $q \in \mathbb{N}$, свободны, и *плоской*, если они плоские, т.е. не имеют кручения.

Пусть дана симплициальная абелева группа $\mathbf{U}$. Пусть $\mathbf{V}$ – симплициальная абелева группа, у которой $\mathbf{V}_q$ – группа симплициальных отображений $\mathbf{h}\colon \mathbf{I} \times \mathbf{\Delta}^q \to \mathbf{U}$, равных нулю на нижнем основании, и очевидные структурные гомоморфизмы. Полагаем $\mathbf{PU} = \mathbf{V}$ (*группа путей*). Если группа $\mathbf{U}$ свободна, то группа $\mathbf{V}$ тоже свободна. Группа $\mathbf{V}$ стягиваема. *Канонический* симплициальный гомоморфизм $\mathbf{c}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ задаётся правилом $[\mathbf{c}_q(\mathbf{h})] = \mathbf{h} \circ \mathbf{i}^1$, $\mathbf{h} \in \mathbf{V}_q$, $q \in \mathbb{N}$, где $\mathbf{i}^1\colon \mathbf{\Delta}^q \to \mathbf{I} \times \mathbf{\Delta}^q$ – верхнее основание. Если группа $\mathbf{U}$ связна, то гомоморфизм $\mathbf{c}$ сюръективен.

(1.2) Комплексы. Цепи и коцепи симплициальных множеств ненормализованные.

Для комплекса $A = A^*$ и числа $p \in \mathbb{Z}$ полагаем $A^{p+*} = A^{*+p} = B^*$, где B^* – комплекс с $B^q = A^{p+q}$ и $d_B = (-1)^p d_A$.

Пусть дан бикомплекс $K = K^{**}$. Дифференциалы $d'\colon K^{(p-1)q} \to K^{pq}$ (горизонтальный) и $d''\colon K^{p(q-1)} \to K^{pq}$ (вертикальный). Для $p \in \mathbb{Z}$ полагаем $K^{p*} = B^*$, где B^* – комплекс с $B^q = K^{pq}$ и $d_B = (-1)^p d''$. Полагаем: $\overline{K} = \overline{K}^*$ – диагональный комплекс, $E_*^{**}(K)$ – первая спектральная последовательность (так что $E_0^{pq}(K) = K^{pq}$, $d_0 = d''$).

(1.3) Универсальные отображения. У пунктированного множества есть (очевидное) *универсальное* связанное отображение его в абелеву группу. У пунктированного симплициального множества есть *универсальное* связанное симплициальное отображение его в симплициальную абелеву группу.

(1.4) Действия абелевых групп. Действие элемента u абелевой группы обозначаем $u\rangle$ или $\langle u$.

(1.5) Одно конкретное обозначение. Для условия (предиката) C вводим величину $[C] \in \mathbb{Z}$, равную 1 при $C = \mathrm{True}$ и 0 при $C = \mathrm{False}$.

§2. Регулярные отображения

Отображение $f\colon U \to V$, где U, V – абелевы группы, называем *r-регулярным* ($r \in \mathbb{N}$), если для любых $u, u_0, \ldots, u_r \in U$ имеем

$$\sum_{e_0,\ldots,e_r=0,1} (-1)^{e_0+\ldots+e_r} f(u + e_0 u_0 + \ldots + e_r u_r) = 0,$$

и *регулярным*, если оно r-регулярно для какого-нибудь $r \in \mathbb{N}$ (см [5]).

Для множества T и элемента $s \in \mathbb{N}^T$ полагаем

$$s_* = \sum_{t\in T} s_t.$$

2.1. Лемма. *Пусть даны множество T, абелева группа V и число $r \in \mathbb{N}$. Пусть U – абелева группа, свободно порождённая множеством T; считаем, что $U \subset \mathbb{Z}^T$. Тогда правило*

$$f(u) = \sum_{s\in\mathbb{N}^T : s_* \leqslant r} \biggl(\prod_{t\in T} \binom{u_t}{s_t}\biggr) v_s, \qquad u \in U,$$

где $v_s \in V$ – какие-нибудь элементы, задаёт r-регулярное отображение $f\colon U \to V$. Так получается любое такое отображение. $\square$

2.2. Следствие. *Пусть даны абелевы группы U, V, W, r-регулярное ($r \in \mathbb{N}$) отображение $f\colon U \to V$ и эпиморфизм $p\colon W \to V$. Если группа U свободна, то существует такое r-регулярное отображение $g\colon U \to W$, что $f = p \circ g$.* $\square$

2.3. Лемма. *Пусть даны абелевы группы U, V, W, отображение $f\colon U\times V \to W$ и числа $r, s \in \mathbb{N}$. Предположим, что для любого $v \in V$ отображение $U \to W$, $u \mapsto f(u,v)$, r-регулярно и для любого $u \in U$ отображение $V \to W$, $v \mapsto f(u,v)$, s-регулярно. Тогда отображение f $(r+s)$-регулярно.* $\square$

2.4. Лемма. *Пусть даны абелевы группы U, V, W, r-регулярное отображение $f\colon U \to V$ и s-регулярное отображение $g\colon V \to W$ ($r, s \in \mathbb{N}$). Тогда отображение $g \circ f$ rs-регулярно.* $\square$

Пусть даны множество T, абелевы группы U, V и отображения $j\colon T \to U$ и $k\colon T \to V$. Отображение k называем *r-регулярным* ($r \in \mathbb{N}$) *относительно* j, если существует такое r-регулярное отображение $f\colon U \to V$, что $k = f \circ j$, и *регулярным относительно* j, если оно r-регулярно относительно j для какого-нибудь $r \in \mathbb{N}$.

Пусть даны множество T, абелева группа U и отображение $j\colon T \to U$. Для абелевой группы V пусть $R_j(V)$ – группа всех регулярных относительно j отображений $k\colon T \to V$. R_j – аддитивный функтор из категории абелевых групп в себя (задание на морфизмах очевидное). Отображение j называем *удобным*, если функтор R_j точен.

Пусть дано пунктированное множество S. Пусть $i\colon S \to X$ – универсальное связанное отображение его в абелеву группу. Пусть ещё даны свободные абелевы группы Y, Z и связанное регулярное отображение $g\colon X \times Y \to Z$. Рассмотрим пунктированное множество $T = S \times Y$ и абелеву группу $U = X \times Y \times Z$. Зададим связанное отображение

$$j\colon T \to U, \quad j(s, y) = (i(s), y, g(i(s), y)).$$

Такое отображение называем *особым*. Особые отображения удобны (легко проверить, используя следствие 2.2 и лемму 2.4).

Пусть даны симплициальная абелева группа $\mathbf{U}$ и абелева группа M. Коцепь $X : \mathbf{U}_q \to M$ называем *$[r]$-регулярной*, если она – $[r]$-регулярное отображение. Очевидно, $[r]$-регулярные коцепи образуют подкомплекс комплекса коцепей.

Пусть даны симплициальное множество $\mathbf{T}$, симплициальная абелева группа $\mathbf{U}$, симплициальное отображение $\mathbf{j} : \mathbf{T} \to \mathbf{U}$ и абелева группа M. Коцепь $X : \mathbf{T}_q \to M$ называем *регулярной относительно* $\mathbf{j}$, если она – отображение, регулярное относительно $\mathbf{j}_q$. Регулярные относительно $\mathbf{j}$ коцепи образуют подкомплекс комплекса коцепей.

Пусть даны симплициальное множество $\mathbf{T}$, симплициальные абелевы группы $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ и симплициальные отображения

$$\mathbf{j} : \mathbf{T} \to \mathbf{U}, \quad \mathbf{k}\colon \mathbf{T} \to \mathbf{V}.$$

Отображение $\mathbf{k}$ называем *r-регулярным* ($r \in \mathbb{N}$) *относительно* $\mathbf{j}$, если для каждого $q \in \mathbb{N}$ отображение $\mathbf{k}_q$ r-регулярно относительно $\mathbf{j}_q$, и *регулярным относительно* $\mathbf{j}$, если оно r-регулярно относительно $\mathbf{j}$ для какого-нибудь $r \in \mathbb{N}$.

Пусть даны симплициальное множество $\mathbf{T}$, симплициальная абелева группа $\mathbf{U}$ и симплициальное отображение $\mathbf{j} : \mathbf{T} \to \mathbf{U}$. Отображение $\mathbf{j}$ называем *удобным*, если отображения $\mathbf{j}_q$, $q \in \mathbb{N}$, удобны, и *особым*, если они особы. Для абелевой группы M пусть

$$^{\circ}C^*(\mathbf{T}; M) \subset C^*(\mathbf{T}; M)$$

подкомплекс регулярных относительно $\mathbf{j}$ коцепей. Отображение $\mathbf{j}$ называем *нормальным*, если для любой абелевой группы M включение $^{\circ}C^*(\mathbf{T}; M) \to C^*(\mathbf{T}; M)$ – квазиизоморфизм.

§3. Лемма о P-ацикличности

Наша цель в §§3–5 – доказательство леммы 5.1 и следствия 5.2.

Функтор P**.** Пусть дана абелева группа U. Для (левого) U-модуля X элемент $x \in X$ называем *$[r]$-регулярным (относительно действия группы U)*, если отображение

$$U \to X, \quad u \mapsto u\rangle x,$$

$[r]$-регулярно, и полагаем: $P_r(X) \subset X$ – подмодуль r-регулярных элементов, $P(X) \subset X$ – подмодуль регулярных элементов. P_r, P – функторы из категории U-модулей в себя (задание на морфизмах очевидное). Эти функторы, очевидно, аддитивны и точны слева.

Прямые действия. (Правое) действие абелевой группы U на множестве T называем *прямым*, если стабилизатор любого элемента $t \in T$ – прямое слагаемое группы U.

Если на множестве T действует абелева группа U, то

$$M^T = \{f : T \to M\}$$

превращается в U-модуль:

$$(u\rangle f)(t) = f(t\langle u), \quad t \in T, f \in M^T, u \in U.$$

3.1. Лемма. *Пусть даны свободная абелева группа U и абелева группа M. Тогда модуль M^U (группа U действует на себе сдвигами) P_r-ацикличен для любого $r \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Инъективная резольвента

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow N' \longrightarrow 0$$

группы M даёт инъективную резольвенту

$$0 \longrightarrow M^U \longrightarrow N^U \longrightarrow N'^U \longrightarrow 0$$

модуля M^U. Как следует из следствия 2.2, функтор P_r сохраняет её точность. □

3.2. Лемма. *Пусть даны прямое действие свободной абелевой группы U в множестве T и абелева группа M. Тогда U-модуль M^T P-ацикличен.*

(В частности, абелева группа M с тривиальным действием свободной абелевой группы U – P-ацикличный U-модуль.)

Доказательство. Функтор P – индуктивный предел функторов P_r, $r \in \mathbb{N}$ (связанных морфизмами включения). Поэтому достаточно показать, что морфизм производных функторов $P_r^{(n)} \to P_{r+1}^{(n)}$ ($n > 0$), индуцированный морфизмом включения $P_r \to P_{r+1}$, равен нулю на модуле M^T. Функторы P_r, $r \in \mathbb{N}$, коммутируют с произведениями. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда группа U действует в T транзитивно, причём $T \neq \varnothing$. Так как действие – прямое, то можно считать, что даны свободные абелевы группы S и T, $U = S \oplus T$ и группа U действует в T сдвигами через проекцию $U \to T$. Пусть $E \subset S$ – базис. Введём на нём линейный порядок.

Для $e \in E$ зададим U-гомоморфизм

$$d_e \colon M^U \to M^U, \qquad (d_e f)(u) = f(u+e) - f(u)$$

(считаем, что $S \subset U$). Пусть Q^* – неотрицательный комплекс U-модулей с

$$Q^n = \prod_{e_1,\ldots,e_n \in E : e_1 < \ldots < e_n} M^U$$

и дифференциалом $d \colon Q^{n-1} \to Q^n$, заданным формулой

$$(df)_{e_1 \ldots e_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} d_{e_k} f_{e_1 \ldots \widehat{e_k} \ldots e_n}.$$

Пусть

$$c\colon M^T \to Q^0 = M^U$$

– U-гомоморфизм, индуцированный проекцией $U \to T$.

Для $e \in E$ зададим гомоморфизм (абелевых групп)

$$h_e\colon M^U \to M^U$$

условием $d_e \circ h_e = \mathrm{id}$ и требованием, что для $f \in M^U$ функция $h_e f$ равна нулю на подгруппе $U_e \subset U$, $U_e = S_e \oplus T$, где $S_e \subset S$ – подгруппа, порождённая всеми элементами множества E, кроме e.

Для $e \in E$ зададим гомоморфизм $S \to S$, $s \mapsto s|_e$, для $e' \in E$ полагая $e'|_e = [e' \leqslant e]e'$. Для $e \in E$, $u \in U$, $u = (s,t)$, полагаем $u|_e = (s|_e, t)$. Зададим гомоморфизмы (абелевых групп)

$$h\colon Q^n \to Q^{n-1}$$

формулой

$$(hf)_{e_1\dots e_{n-1}}(u) = (-1)^{n-1} \sum_{e\in E:e>e_{n-1}} (h_e f_{e_1\dots e_{n-1}e})(u|_e), \quad u \in U$$

(при $n = 1$ сумма по всем $e \in E$). Пусть

$$g\colon M^U = Q^0 \to M^T$$

– гомоморфизм (абелевых групп), индуцированный копроекцией $T \to U$. Верны равенства

$$g \circ c = \mathrm{id}, \quad c \circ g + h \circ d = \mathrm{id} \quad \text{и} \quad d \circ h + h \circ d = \mathrm{id}.$$

Значит,

$$0 \longrightarrow M^T \xrightarrow{\ c\ } Q^0 \xrightarrow{\ d\ } Q^1 \xrightarrow{\ d\ } \dots$$

– резольвента модуля M^T. Используя лемму 3.1, получаем, что она P_r-ациклична. Нетрудно видеть, что $h_e(P_r(M^U)) \subset P_{r+1}(M^U)$. Отсюда $h(P_r(Q^n)) \subset P_{r+1}(Q^{n-1})$, что и даёт нужное. $\square$

§4. Регулярные когомологии

Действие абелевой группы U в симплициальном множестве $\mathbf{T}$ называем *прямым*, если для каждого $q \in \mathbb{N}$ её действие на $\mathbf{T}_q$ – прямое.

4.1. Лемма. *Пусть свободная абелева группа U прямо действует в симплициальном множестве $\mathbf{T}$. Пусть дана абелева группа M. Предположим, что индуцированное действие на $H^*(\mathbf{T}; M)$ тривиально. Пусть ${}^\circ C^*(\mathbf{T}; M) \subset C^*(\mathbf{T}; M)$ – подкомплекс коцепей, регулярных относительно действия группы U. Тогда включение ${}^\circ C^*(\mathbf{T}; M) \to C^*(\mathbf{T}; M)$ – квазиизоморфизм.*

Это следует из леммы 3.2. □

§5. Регулярные когомологии симплициальной абелевой группы

Полагаем $\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $[\infty] = \mathbb{N}$. Множества $[p]$, $p \in \widehat{\mathbb{N}}$, и нестрого возрастающие отображения между ними образуют категорию. Полагаем: $\lambda_q \colon [q] \to [\infty]$ – включения, $\mu_p \colon [\infty] \to [p]$ – ретракции, $\mathbf{\Delta}^\infty$ – симплициальное множество с $\mathbf{\Delta}^\infty_q = \operatorname{Hom}([q], [\infty])$ и очевидными структурными отображениями.

Для симплициального множества $\mathbf{T}$ полагаем: $\mathbf{T}_\infty$ – индуктивный предел последовательности

$$\mathbf{T}_0 \xrightarrow{\sigma_1^\star} \mathbf{T}_1 \xrightarrow{\sigma_2^\star} \mathbf{T}_2 \xrightarrow{\sigma_3^\star} \dots,$$

где $\sigma_q \colon [q] \to [q-1]$ – ретракции. Сопоставление морфизму $k \colon [q] \to [p]$ $(p, q \in \mathbb{N})$ отображения $\mathbf{k}^\star \colon \mathbf{T}_p \to \mathbf{T}_q$ распространим на область $p, q \in \widehat{\mathbb{N}}$, сохраняя контравариантность и полагая: $\mu_q^\star \colon \mathbf{T}_q \to \mathbf{T}_\infty$ – каноническое отображение члена последовательности в её предел.

Функтор R. Для симплициального множества $\mathbf{T}$ полагаем:

$$\mathbf{RT} \subset \mathbf{T} \times \mathbf{\Delta}^\infty$$

– подмножество, порождённое симплексами (t, λ_q), $t \in \mathbf{T}_q$, $q \in \mathbb{N}$. $\mathbf{R}$ – функтор из категории симплициальных множеств в себя (задание на морфизмах очевидное).

Пусть дана абелева группа M. Коцепи с коэффициентами в группе M. Методом ацикличных моделей строятся естественные гомотопические эквивалентности

$$e \colon C^*(\mathbf{T}) \to C^*(\mathbf{RT}), \quad e' \colon C^*(\mathbf{RT}) \to C^*(\mathbf{T})$$

и естественные гомотопии

$$E \colon C^*(\mathbf{T}) \to C^*(\mathbf{T})$$

между морфизмами id, $e' \circ e$ и

$$E' : C^*(\mathbf{RT}) \to C^*(\mathbf{RT})$$

между морфизмами id, $e \circ e'$. Морфизм e индуцируется проекцией $\mathbf{RT} \to \mathbf{T}$, гомоморфизм $e' : C^q(\mathbf{RT}) \to C^q(\mathbf{T})$ задаётся правилом

$$e'(Y)(t) = \langle [t]^\sharp_{\mathbf{R}}(Y), I_q \rangle, \quad t \in \mathbf{T}_q,$$

гомоморфизм $E \colon C^q(\mathbf{T}) \to C^{q-1}(\mathbf{T})$ – правилом

$$E(X)(s) = \langle [s]^\sharp(X), J_q \rangle, s \in \mathbf{T}_{q-1},$$

гомоморфизм $E' \colon C^q(\mathbf{RT}) \to C^{q-1}(\mathbf{RT})$ – правилом

$$E'(Y)(s,m) = \langle [s]^\sharp_{\mathbf{R}}(Y), K_m \rangle, \quad (s,m) \in (\mathbf{RT})_{q-1},$$

где

$$I_q \in C_q(\mathbf{R}\mathbf{\Delta}^q), \quad J_q \in C_q(\mathbf{\Delta}^{q-1}), \qquad K_m \in C_q(\mathbf{R}\mathbf{\Delta}^{q-1})$$

– какие-то цепи.

Случай симплициальной абелевой группы. Пусть дана симплициальная абелева группа $\mathbf{U}$. Тогда $\mathbf{U}_\infty$ – абелева группа, для морфизма $k \colon [q] \to [p]$ $(p, q \in \widehat{\mathbb{N}})$

$$k^\star \colon \mathbf{U}_p \to \mathbf{U}_q$$

– гомоморфизм. Если группа $\mathbf{U}$ свободна, то группа $\mathbf{U}_\infty$ тоже свободна. Группа $\mathbf{U}_\infty$ действует в симплициальном множестве $\mathbf{U} \times \mathbf{\Delta}^\infty$ по правилу

$$(t,h) \langle u = (t + h^\star(u), h), \quad t \in \mathbf{U}_q, \quad h \in \mathrm{Hom}([q],[\infty]) \ \ (q \in \mathbb{N}).$$

Это действие – прямое и сохраняет подмножество $\mathbf{RU}$. Для каждого симплекса $G \in (\mathbf{R}\mathbf{\Delta}^n)_q$ $(n, q \in \mathbb{N})$ есть симплекс $a_G \in (\mathbf{RU})_q$ и гомоморфизм $b_G : \mathbf{U}_n \to \mathbf{U}_\infty$ такие, что

$$([t]_{\mathbf{R}})_q(G) = a_G \langle b_G(t), \quad t \in \mathbf{U}_n.$$

(Действительно, если $G = k^\star(F)$, где $k \in \mathrm{Hom}([q],[p])$ $(p \in \mathbb{N})$, $F = (f, \lambda_p) \in (\mathbf{R}\mathbf{\Delta}^n)_p$, то можно положить $a_G = (0, \lambda_p \circ k)$ и $b_G = (f \circ \mu_p)^\star$.)

Пусть ${}^{\circ}C^*(\mathbf{U}) \subset C^*(\mathbf{U})$ – подкомплекс регулярных коцепей, ${}^{\circ}C^*(\mathbf{RU}) \subset C^*(\mathbf{RU})$ – подкомплекс коцепей, регулярных относительно действия группы $\mathbf{U}_\infty$. Морфизмы e, e' и гомотопии E, E' сохраняют регулярность, т.е. у них есть сокращения

$$ {}^{\circ}e\colon {}^{\circ}C^*(\mathbf{U}) \to {}^{\circ}C^*(\mathbf{RU}), \dots, {}^{\circ}E'\colon {}^{\circ}C^*(\mathbf{RU}) \to {}^{\circ}C^*(\mathbf{RU}). $$

Для $e\colon C^q(\mathbf{U}) \to C^q(\mathbf{RU})$ это следует из равенства

$$ (u \rangle e(X))(t,n) = X(t + n^\star(u)), \quad (t,n) \in (\mathbf{RU})_q, \quad u \in \mathbf{U}_\infty, $$

для $e'\colon C^q(\mathbf{RU}) \to C^q(\mathbf{U})$ – из равенства

$$ e'(Y)(t) = \sum_{L \in (\mathbf{R}\boldsymbol{\Delta}^q)_q} (I_q)_L Y(a_L \langle b_L(t)), \quad t \in \mathbf{U}_q, $$

для $E\colon C^q(\mathbf{U}) \to C^{q-1}(\mathbf{U})$ – из равенства

$$ E(X)(s) = \sum_{k \in \mathrm{Hom}([q],[q-1])} (J_q)_k X(k^\star(s)), \quad s \in \mathbf{U}_{q-1}. $$

(Здесь $(I_q)_L \in \mathbb{Z}$ – коэффициент, с которым симплекс L входит в цепь I_q, аналогично понимается $(J_q)_k$.) Для E' достаточно тех же соображений. Очевидно, ${}^{\circ}e$, ${}^{\circ}e'$ – гомотопические эквивалентности.

5.1. Лемма. *Предположим, что группа* $\mathbf{U}$ *свободна и связна. Тогда включение* ${}^{\circ}C^*(\mathbf{U}) \to C^*(\mathbf{U})$ *– квазиизоморфизм.*

Доказательство. Так как группа $\mathbf{U}$ связна, то действие группы $\mathbf{U}_0$ в $H^*(\mathbf{U})$ тривиально. Слой $\mathbf{U} \to \mathbf{U} \times \boldsymbol{\Delta}^\infty$ над вершиной λ_0 согласован с гомоморфизмом $\lambda_0^\star\colon \mathbf{U}_\infty \to \mathbf{U}_0$ и индуцирует изоморфизм когомологий, поэтому действие группы $\mathbf{U}_\infty$ в $H^*(\mathbf{U} \times \boldsymbol{\Delta}^\infty)$ тривиально. Так как проекция $\mathbf{RU} \to \mathbf{U}$ индуцирует изоморфизм когомологий, то включение $\mathbf{RU} \to \mathbf{U} \times \boldsymbol{\Delta}^\infty$ тоже так делает. Поэтому действие группы $\mathbf{U}_\infty$ в $H^*(\mathbf{RU})$ тривиально.

Рассмотрим коммутативную диаграмму комплексов и морфизмов

$$ \begin{array}{ccc} {}^{\circ}C^*(\mathbf{U}) & \xrightarrow{{}^{\circ}e} & {}^{\circ}C^*(\mathbf{RU}) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ C^*(\mathbf{U}) & \xrightarrow{e} & C^*(\mathbf{RU}), \end{array} $$

где i, j – включения. По лемме 4.1, j – квазиизоморфизм. Так как e, ${}^{\circ}e$ – гомотопические эквивалентности, то i – тоже квазиизоморфизм. □

Для $r \in \mathbb{N}$ пусть ${}^{r}C^{*}(\mathbf{U}) \subset C^{*}(\mathbf{U})$ – подкомплекс, образованный r-регулярными коцепями, ${}^{r}H^{*}(\mathbf{U})$ – соответствующие группы когомологий.

5.2. Следствие. *Предположим, что группа* $\mathbf{U}$ *свободна и связна. Тогда:*

(а) *для любого* $q \in \mathbb{Z}$ *существует такое* $r \in \mathbb{N}$, *что гомоморфизм включения* $i\colon {}^{r}H^{q}(\mathbf{U}) \to H^{q}(\mathbf{U})$ *сюръективен;*

(б) *для любых* $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ *существует такое* $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant r$, *что ядра гомоморфизмов включения*

$$i\colon {}^{r}H^{q}(\mathbf{U}) \to H^{q}(\mathbf{U}) \quad \text{и} \quad k\colon {}^{r}H^{q}(\mathbf{U}) \to {}^{s}H^{q}(\mathbf{U})$$

совпадают.

Доказательство. Достаточно применить лемму 5.1 к когомологиям с коэффициентами в группе M^{T}, где $T = H^{q}(\mathbf{U})$ для а) и $\ker i$ для б). □

§6. Спектральная последовательность Серра и её регулярный вариант

В этом параграфе доказывается лемма 9.2.

Пусть дана абелева группа M. Если в обозначении группы коцепей или когомологий группа коэффициентов не указана, то подразумевается группа M.

(6.1) Морфизм $\mathbf{m}_{\nabla}$. Пусть даны симплициальные множества $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, инъективное симплициальное отображение $\mathbf{m}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ и подмножество $\mathbf{B} \subset \mathbf{Y}$. Пусть

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{m}^{-1}(\mathbf{B}) \subset \mathbf{X}, \quad \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{im}\,(\mathbf{m}) \cup \mathbf{B} \subset \mathbf{Y}.$$

Зададим морфизм $t\colon C^{*-1}(\dot{\mathbf{Y}}) \to C^{*}(\mathbf{Y})$ композицией

$$C^{q-1}(\dot{\mathbf{Y}}) \xrightarrow{\ r\ } C^{q-1}(\mathbf{Y}) \xrightarrow{\ d_{\mathbf{Y}}\ } C^{q}(\mathbf{Y}) \xrightarrow{\ s\ } C^{q}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}}),$$

где r – гомоморфизм продолжения нулём, s – гомоморфизм “обнуления” на $\dot{\mathbf{Y}}$. Задаём морфизм $\mathbf{m}_{\nabla}\colon C^{*-1}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \to C^{*}(\mathbf{Y}, \dot{\mathbf{Y}})$ коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} C^{q-1}(\dot{\mathbf{Y}},\mathbf{B}) & \xrightarrow{\mathbf{id}^\sharp} & C^{q-1}(\dot{\mathbf{Y}}) \\ {\scriptstyle\mathbf{n}^\sharp}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle t} \\ C^{q-1}(\mathbf{X},\dot{\mathbf{X}}) & \xrightarrow{\mathbf{m}_\nabla} & C^{q}(\mathbf{Y},\dot{\mathbf{Y}}), \end{array}$$

где $\mathbf{n}^\sharp$ – изоморфизм, индуцированный сокращением отображения $\mathbf{m}$.

(6.2) Гомотопии. Гомотопия $\mathbf{H}\colon \mathbf{I}\times(\mathbf{X},\dot{\mathbf{X}}) \to (\mathbf{Y},\dot{\mathbf{Y}})$ между симплициальными отображениями $\mathbf{f},\mathbf{g}\colon(\mathbf{X},\dot{\mathbf{X}})\to(\mathbf{Y},\dot{\mathbf{Y}})$ определяет гомотопию $\mathbf{H}^\natural\colon C^*(\mathbf{Y},\dot{\mathbf{Y}}) \to C^*(\mathbf{X},\dot{\mathbf{X}})$ между морфизмами $\mathbf{f}^\sharp,\mathbf{g}^\sharp\colon C^*(\mathbf{Y},\dot{\mathbf{Y}})\to C^*(\mathbf{X},\dot{\mathbf{X}})$.

Эквивалентности Эйленберга–Зильбера. Для каждого симплициального множества $\mathbf{X}$ есть естественные гомотопические эквивалентности

$$g_p\colon C^{p+*}((\mathbf{\Delta}^p,\dot{\mathbf{\Delta}}^p)\times\mathbf{X})\to C^*(\mathbf{X}),$$
$$g'_p\colon C^*(\mathbf{X})\to C^{p+*}((\mathbf{\Delta}^p,\dot{\mathbf{\Delta}}^p)\times\mathbf{X})$$

и естественные гомотопии

$$G_p\colon C^{p+*}((\mathbf{\Delta}^p,\dot{\mathbf{\Delta}}^p)\times\mathbf{X})\to C^{p+*}\times((\mathbf{\Delta}^p,\dot{\mathbf{\Delta}}^p)\times\mathbf{X})$$

между морфизмами id, $g'_p\circ g_p$,

$$G'_p\colon C^*(\mathbf{X})\to C^*(\mathbf{X})$$

между морфизмами id, $g_p\circ g'_p$ и

$$D^i_p\colon C^{p+*-1}\times((\mathbf{\Delta}^{p-1},\dot{\mathbf{\Delta}}^{p-1})\times\mathbf{X})\to C^*(\mathbf{X})$$

между морфизмами g_{p-1}, $g_p\circ(-1)^i(\delta^p_{i\,\triangle},\mathrm{id})_\nabla$. (Здесь

$$(\delta^p_{i\,\triangle},\mathrm{id})_\nabla\colon C^{p+*-1}((\mathbf{\Delta}^{p-1},\dot{\mathbf{\Delta}}^{p-1})\times\mathbf{X})\to C^{p+*}((\mathbf{\Delta}^p,\dot{\mathbf{\Delta}}^p)\times\mathbf{X}).)$$

(6.3) Бикомплекс симплициального отображения. Пусть даны симплициальные множества $\mathbf{T}$, $\widetilde{\mathbf{T}}$ и симплициальное отображение $\mathbf{f}\colon\mathbf{T}\to\mathbf{T}$.

Для каждого симплекса $t \in \mathbf{T}_p$ $(p \in \mathbb{N})$ построим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_t & \xrightarrow{\mathbf{l}_t} & \widetilde{\mathbf{T}} \\ {\scriptstyle \mathbf{f}_t}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{f}} \\ \mathbf{\Delta}^p & \xrightarrow{[t]} & \mathbf{T} \end{array}$$

и положим $\dot{\mathbf{Z}}_t = \mathbf{f}_t^{-1}(\dot{\mathbf{\Delta}}^p) \subset \mathbf{Z}_t$. Для симплекса $t \in \mathbf{T}_p$ $(p \in \mathbb{N},\, p \geqslant 1)$ и числа $i \in [p]$ зададим симплициальное отображение

$$\mathbf{m}_t^i \colon \mathbf{Z}_s \to \mathbf{Z}_t,$$

где $s = \delta_i^{p\,\star}(t) \in \mathbf{T}_{p-1}$, условиями

$$\mathbf{f}_t \circ \mathbf{m}_t^i = \delta^p_{i\;\triangle} \circ \mathbf{f}_s \quad \text{и} \quad \mathbf{l}_t \circ \mathbf{m}_t^i = \mathbf{l}_s.$$

Это отображение инъективно.

Построим неотрицательный бикомплекс $K = K^{**}$. Пусть

$$K^{pq} = \prod_{t \in \mathbf{T}_p} C^{p+q}(\mathbf{Z}_t, \dot{\mathbf{Z}}_t)$$

(при $p \geqslant 0$). Зададим гомоморфизмы

$$d'_i \colon K^{(p-1)q} \to K^{pq}, \quad i \in [p],$$

правилом

$$(d'_i X)_t = (-1)^i \mathbf{m}^i_{t\;\triangledown}(X_s), \quad t \in \mathbf{T}_p,$$

где $s = \delta_i^{p\,\star}(t) \in \mathbf{T}_{p-1}$. Горизонтальный дифференциал

$$d' \colon K^{(p-1)q} \to K^{pq} \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

зададим формулой

$$d' = \sum_{i \in [p]} (-1)^i d'_i.$$

Вертикальный дифференциал $d'' \colon K^{p(q-1)} \to K^{pq}$ зададим правилом $(d''X)_t = dX_t$, $t \in \mathbf{T}_p$.

Методом ацикличных моделей строятся естественные гомотопические эквивалентности

$$a \colon \overline{K}^* \to C^*(\widetilde{\mathbf{T}}), \quad a' \colon C^*(\widetilde{\mathbf{T}}) \to \overline{K}^*$$

и естественные гомотопии $A \colon \overline{K}^* \to \overline{K}^*$ между морфизмами id, $a' \circ a$ и $A' \colon C^*(\widetilde{\mathbf{T}}) \to C^*(\widetilde{\mathbf{T}})$ между морфизмами id, $a \circ a'$.

(6.4) Вычисление групп $E_2^{pq}(K)$. Пусть дан декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathbf{T}} \arrow[r, "\widetilde{\mathbf{k}}"] \arrow[d, "\mathbf{f}"'] & \widetilde{\mathbf{V}} \arrow[d, "\mathbf{h}"] \\ \mathbf{T} \arrow[r, "\mathbf{k}"] & \mathbf{V}, \end{tikzcd}$$

где $\mathbf{V}$, $\widetilde{\mathbf{V}}$ – свободные симплициальные абелевы группы, $\mathbf{h}$ – сюръективный симплициальный гомоморфизм, $\mathbf{k}$, $\widetilde{\mathbf{k}}$ – симплициальные отображения. Пусть $\mathbf{W} = \mathbf{ker}(\mathbf{h})$. Группа $\mathbf{W}$ свободна. Предположим, что она связна.

Для каждого $q \in \mathbb{N}$ выберем такой гомоморфизм

$$R_q \colon \mathbf{V}_q \to \widetilde{\mathbf{V}}_q,$$

что $\mathbf{h}_q \circ R_q = \mathrm{id}$. Так как группа $\mathbf{W}$ связна, то канонический симплициальный гомоморфизм $\mathbf{c} \colon \mathbf{PW} \to \mathbf{W}$ сюръективен. Для каждого $q \in \mathbb{N}$ выберем такой гомоморфизм

$$S_q \colon \mathbf{W}_q \to (\mathbf{PW})_q,$$

что $\mathbf{c}_q \circ S_q = \mathrm{id}$. Таким образом, для каждого симплекса $w \in \mathbf{W}_q$ ($q \in \mathbb{N}$) имеем гомотопию

$$S_q(w) \colon \mathbf{I} \times \mathbf{\Delta}^q \to \mathbf{W}$$

между отображениями $0, [w] \colon \mathbf{\Delta}^q \to \mathbf{W}$.

Для каждого симплекса $t \in \mathbf{T}_p$ ($p \in \mathbb{N}$) зададим симплициальное отображение

$$\mathbf{e}_t \colon \mathbf{\Delta}^p \times \mathbf{W} \to \mathbf{Z}_t$$

условиями

$$\mathbf{f}_t \circ \mathbf{e}_t = \mathbf{q} \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathbf{k}} \circ \mathbf{l}_t \circ \mathbf{e}_t = [R_p(\mathbf{k}_p(t))] \circ \mathbf{q} + \mathbf{n} \circ \mathbf{q}',$$

где

$$\mathbf{q} \colon \mathbf{\Delta}^{p-1} \times \mathbf{W} \to \mathbf{\Delta}^{p-1}, \quad \mathbf{q}' \colon \mathbf{\Delta}^p \times \mathbf{W} \to \mathbf{W}$$

– проекции, $\mathbf{n} \colon \mathbf{W} \to \widetilde{\mathbf{V}}$ – включение. Имеем изоморфизм пар

$$\mathbf{e}_t \colon (\mathbf{\Delta}^p, \dot{\mathbf{\Delta}}^p) \times \mathbf{W} \to (\mathbf{Z}_t, \dot{\mathbf{Z}}_t).$$

Для симплекса $t \in \mathbf{T}_p$ ($p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$) и числа $i \in [p]$ зададим симплициальное отображение

$$\widehat{\mathbf{e}}_t^i \colon \mathbf{\Delta}^{p-1} \times \mathbf{W} \to \mathbf{Z}_s,$$

где $s = \delta_i^{p\,\star}(t) \in \mathbf{T}_{p-1}$, условиями

$$\mathbf{f}_s \circ \widehat{\mathbf{e}}_t^i = \mathbf{q} \quad \text{и} \quad \mathbf{m}_t^i \circ \widehat{\mathbf{e}}_t^i = \mathbf{e}_t \circ (\delta^p_{i\,\triangle}, \mathbf{id}),$$

где $\mathbf{q}\colon \mathbf{\Delta}^p \times \mathbf{W} \to \mathbf{\Delta}^p$ – проекция (здесь $(\delta^p_{i\,\triangle}, \mathbf{id})\colon \mathbf{\Delta}^{p-1} \times \mathbf{W} \to \mathbf{\Delta}^p \times \mathbf{W}$). Имеем изоморфизм пар

$$\widehat{\mathbf{e}}_t^i\colon (\mathbf{\Delta}^{p-1}, \dot{\mathbf{\Delta}}^{p-1}) \times \mathbf{W} \to (\mathbf{Z}_s, \dot{\mathbf{Z}}_s).$$

Ещё зададим симплициальное отображение

$$\mathbf{H}_t^i\colon \mathbf{I} \times \mathbf{\Delta}^{p-1} \times \mathbf{W} \to \mathbf{Z}_s$$

условиями

$$\mathbf{f}_s \circ \mathbf{H}_t^i = \mathbf{q}$$

и

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{k}} \circ \mathbf{l}_s \circ \mathbf{H}_t^i = {} & [R_{p-1}(\mathbf{k}_{p-1}(s))] \circ \mathbf{q} \\ & + S_{p-1}\left[\delta_i^{p\,\star}(R_p(\mathbf{k}_p(t))) - R_{p-1}(\mathbf{k}_{p-1}(s))\right] \circ \mathbf{Q} + \mathbf{n} \circ \mathbf{q}',\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{q}\colon \mathbf{I} \times \mathbf{\Delta}^{p-1} \times \mathbf{W} \to \mathbf{\Delta}^{p-1}, \quad \mathbf{Q}\colon \mathbf{I} \times \mathbf{\Delta}^{p-1} \times \mathbf{W} \to \mathbf{I} \times \mathbf{\Delta}^{p-1},$$
$$\mathbf{q}'\colon \mathbf{I} \times \mathbf{\Delta}^{p-1} \times \mathbf{W} \to \mathbf{W}$$

– проекции, $\mathbf{n}\colon \mathbf{W} \to \widetilde{\mathbf{V}}$ – включение. Это гомотопия между отображениями

$$\mathbf{e}_s, \widehat{\mathbf{e}}_t^i\colon (\mathbf{\Delta}^{p-1}, \dot{\mathbf{\Delta}}^{p-1}) \times \mathbf{W} \to (\mathbf{Z}_s, \dot{\mathbf{Z}}_s).$$

Пусть $L = L^{**}$ – неотрицательный бикомплекс с $L^{pq} = C^p(\mathbf{T}; C^q(\mathbf{W}))$ и дифференциалами

$$d' = d\colon L^{(p-1)q} \to L^{pq} \quad \text{и} \quad d'' = (-1)^p d_\sharp\colon L^{p(q-1)} \to L^{pq}.$$

Для каждого $p \in \mathbb{N}$ зададим морфизм

$$b\colon K^{p*} \to L^{p*},$$

полагая

$$b(X)(t) = g_p(\mathbf{e}_t^\sharp(X_t)), \quad t \in \mathbf{T}_p, \quad X \in K^{pq}, \quad q \in \mathbb{N},$$

морфизм

$$b'\colon L^{p*} \to K^{p*},$$

полагая

$$\mathbf{e}_t^\sharp(b'(Y)_t) = g'_p(Y(t)), \quad t \in \mathbf{T}_p, \quad Y \in L^{pq}, \quad q \in \mathbb{N},$$

гомотопию

$$B\colon K^{p*} \to K^{p*}$$

между морфизмами id, $b' \circ b$, полагая

$$\mathbf{e}_t^\sharp(B(X)_t) = G_p(\mathbf{e}_t^\sharp(X_t)), \quad t \in \mathbf{T}_p, \quad X \in K^{pq}, \quad g \in \mathbb{N},$$

и гомотопию

$$B'\colon L^{p*} \to L^{p*}$$

между морфизмами id, $b \circ b'$, полагая

$$B'(Y)(t) = G'_p(Y(t)), \quad t \in \mathbf{T}_p, \quad Y \in L^{pq}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, b, b' – гомотопические эквивалентности.

Покажем, что для любого p диаграмма комплексов и морфизмов

$$\begin{array}{ccc} K^{(p-1)*} & \xrightarrow{d'} & K^{p*} \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ L^{(p-1)*} & \xrightarrow{d'} & L^{p*} \end{array} \tag{1}$$

гомотопически коммутативна. Для $p \in \mathbb{N}$, $p > 0$, $i \in [p]$ зададим гомотопию

$$F_i\colon K^{(p-1)*} \to L^{p*}$$

между морфизмами $d'_i \circ b$ и $b \circ d'_i$ (здесь $d'_i\colon L^{(p-1)*} \to L^{p*}$ – морфизм, индуцированный отображением $\delta_i^{p\,\star}\colon \mathbf{T}_p \to \mathbf{T}_{p-1}$), полагая

$$F_i(X)(t) = g_{p-1}(\mathbf{H}_t^{i\,\natural}(X_s)) + D_p^i(\widehat{\mathbf{e}}_t^{i\,\sharp}(X_s)),$$

$$t \in \mathbf{T}_p, \quad X \in K^{(p-1)q}, \quad q \in \mathbb{N},$$

где $s = \delta_i^{p\,\star}(t) \in \mathbf{T}_{p-1}$. Для $p \in \mathbb{N}$ нужную гомотопию

$$F\colon K^{(p-1)*} \to L^{p*}$$

между морфизмами $b \circ d'$ и $d' \circ b$ зададим формулой

$$F = \sum_{i \in [p]} (-1)^i F_i.$$

Гомотопическая эквивалентность $b\colon E_0^{**}(K)\to E_0^{**}(L)$ индуцирует изоморфизм

$$E_1^{**}(K)\to E_1^{**}(L).$$

Так как диаграмма (1) гомотопически коммутативна, этот изоморфизм коммутирует с дифференциалом d_1 и, следовательно, индуцирует изоморфизм

$$E_2^{**}(K)\to E_2^{**}(L).$$

Очевидно, $E_1^{pq}(L) = C^p(\mathbf{T};H^q(\mathbf{W}))$ и, следовательно, $E_2^{pq}(L) = H^p(\mathbf{T};H^q(\mathbf{W}))$. Получаем изоморфизм

$$Q\colon E_2^{pq}(K)\to H^p(\mathbf{T};H^q(\mathbf{W})).$$

(6.5) Регулярный вариант. Пусть даны симплициальная абелева группа $\mathbf{U}$ и удобное симплициальное отображение $\mathbf{j}\colon \mathbf{T}\to\mathbf{U}$. Пусть

$$\widetilde{\mathbf{U}}=\mathbf{U}\times\widetilde{\mathbf{V}}, \widetilde{\mathbf{j}}=(\mathbf{j}\circ\mathbf{f})\times\widetilde{\mathbf{k}}\colon \widetilde{\mathbf{T}}\to\widetilde{\mathbf{U}}.$$

Пусть ${}^{\circ}C^*(\mathbf{T};N)\subset C^*(\mathbf{T};N)$ (N – абелева группа), ${}^{\circ}C^*(\widetilde{\mathbf{T}})\subset C^*(\widetilde{\mathbf{T}})$ – подкомплексы регулярных относительно $\mathbf{j}$, $\widetilde{\mathbf{j}}$ (соответственно) коцепей, ${}^{\circ}H^*(\mathbf{T};N)$, ${}^{\circ}H^*(\widetilde{\mathbf{T}})$ – их группы когомологий.

Для $t\in\mathbf{T}_p$ и таких морфизма $m\colon[r]\to[p]$ и симплекса $\widetilde{t}\in\widetilde{\mathbf{T}}_r$, что $m^\star(t)=\mathbf{f}_r(\widetilde{t})$, пусть

$$z_t(m,\widetilde{t})=z\in(\mathbf{Z}_t)_r$$

– такой симплекс, что $(\mathbf{f}_t)_r(z)=m$ и $(\mathbf{l}_t)_r(z)=\widetilde{t}$. Для таких $t\in\mathbf{T}_r$, $\widetilde{v}\in\widetilde{\mathbf{V}}_r$, что $\mathbf{k}_r(t)=\mathbf{h}_r(\widetilde{v})$, пусть

$$\widetilde{t}(t,\widetilde{v})=\widetilde{t}\in\widetilde{\mathbf{T}}_r$$

– такой симплекс, что $\mathbf{f}_r(\widetilde{t})=t$ и $\widetilde{\mathbf{k}}_r(\widetilde{t})=\widetilde{v}$.

Для морфизма $m\colon[r]\to[p]$ пусть

$$D_m=\{\,(t,\widetilde{t})\in\mathbf{T}_p\times\widetilde{\mathbf{T}}_r : m^\star(t)=\mathbf{f}_r(\widetilde{t})\,\},$$

и пусть

$$e_m : D_m\to\mathbf{U}_p\times\widetilde{\mathbf{U}}_r$$

– сужение отображения $(\mathbf{j}_p,\widetilde{\mathbf{j}}_r)$. Элемент $X\in K^{pq}$ называем *регулярным*, если для любого морфизма $m\colon[p+q]\to[p]$ отображение

$$D_m\to M,\quad (t,\widetilde{t})\mapsto X_t(z_t(m,\widetilde{t})),$$

регулярно относительно e_m. Пусть ${}^\circ K^{**} \subset K^{**}$ – подбикомплекс, образованный регулярными элементами.

Элемент $Y \in L^{pq}$ называем *вполне регулярным*, если отображение

$$\mathbf{T}_p \times \mathbf{W}_q \to M, \quad (t, w) \mapsto Y(t)(w),$$

регулярно относительно отображения

$$(\mathbf{j}_p, \mathrm{id})\colon \mathbf{T}_p \times \mathbf{W}_q \to \mathbf{U}_p \times \mathbf{W}_q.$$

Пусть ${}^\circ L^{**} \subset L^{**}$ – подбикомплекс, образованный вполне регулярными элементами.

Можно проверить, что морфизмы a, a', b, b' и гомотопии A, A', B, B', F "сохраняют кружки," т.е. у них есть сокращения

$${}^\circ a\colon \overline{{}^\circ K}^* \to {}^\circ C^*(\widetilde{\mathbf{T}}), \dots, {}^\circ F\colon {}^\circ K^{(p-1)*} \to {}^\circ L^{p*}.$$

Например, включение $b({}^\circ K^{pq}) \subset {}^\circ L^{pq}$ $(p, q \in \mathbb{N})$ легко получить, используя то, что гомоморфизм $b\colon K^{pq} \to L^{pq}$ задаётся правилом

$$b(X)(t)(w) = \sum_{\substack{m \in \mathrm{Hom}([p+q],[p]),\\ n \in \mathrm{Hom}([p+q],[q])}} c_{mn} X_t\Big(z_t\Big(m, \tilde{t}\Big(m^\star(t), m^\star R_p(\mathbf{k}_p(t)) + n^\star(w)\Big)\Big)\Big),$$

$$w \in \mathbf{W}_q, \quad t \in \mathbf{T}_p, \quad X \in K^{pq},$$

где $c_{mn} \in \mathbb{Z}$ – коэффициенты явной записи гомоморфизма g_p, регулярность отображения $\mathbf{k}$ относительно $\mathbf{j}$ и лемму 2.4. Так же проверяется остальное. Очевидно, ${}^\circ a$ и ${}^\circ b$ – гомотопические эквивалентности и для любого p диаграмма комплексов и морфизмов

$$\begin{array}{ccc} {}^\circ K^{(p-1)*} & \xrightarrow{d'} & {}^\circ K^{p*} \\ {\scriptstyle {}^\circ b}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle {}^\circ b} \\ {}^\circ L^{(p-1)*} & \xrightarrow{d'} & {}^\circ L^{p*} \end{array} \tag{2}$$

гомотопически коммутативна.

Как и выше, гомотопическая эквивалентность ${}^\circ b\colon E_0^{**}({}^\circ K) \to E_0^{**}({}^\circ L)$ индуцирует изоморфизм

$$E_1^{**}({}^\circ K) \to E_1^{**}({}^\circ L).$$

Так как диаграмма (2) гомотопически коммутативна, этот изоморфизм коммутирует с дифференциалом d_1 и, следовательно, индуцирует изоморфизм

$$E_2^{**}(^\circ K) \to E_2^{**}(^\circ L).$$

Используя лемму 2.3 и удобность отображения $\mathbf{j}$, легко видеть, что элемент $Y \in L^{pq}$ вполне регулярен тогда и только тогда, когда Y – регулярная относительно $\mathbf{j}$ коцепь и существует такое $s \in \mathbb{N}$, что для любого $t \in \mathbf{T}_p$ коцепь $Y(t) \in C^q(\mathbf{W})$ s-регулярна. Включение $^\circ L^{p*} \to {}^\circ C^p(\mathbf{T}; C^*(\mathbf{W}))$ индуцирует гомоморфизм

$$E_1^{pq}(^\circ L) \to {}^\circ C^p(\mathbf{T}; H^q(\mathbf{W}))$$

(ввиду удобности отображения $\mathbf{j}$). Используя следствие 5.2 и удобность отображения $\mathbf{j}$, можно увидеть, что это изоморфизм. Он, очевидно, коммутирует с d_1 и, значит, индуцирует изоморфизм

$$E_2^{pq}(^\circ L) \to {}^\circ H^p(\mathbf{T}; H^q(\mathbf{W})).$$

Вместе получаем изоморфизм

$$^\circ Q\colon E_2^{pq}(^\circ K) \to {}^\circ H^p(\mathbf{T}; H^q(\mathbf{W})).$$

(6.6) Сравнение спектральных последовательностей. Предположим, что для любой абелевой группы N включение $^\circ C^*(\mathbf{T}; N) \to C^*(\mathbf{T}; N)$ – квазиизоморфизм. Включения индуцируют изоморфизмы

$$J\colon {}^\circ H^p(\mathbf{T}; H^q(\mathbf{W})) \to H^p(\mathbf{T}; H^q(\mathbf{W})).$$

Пусть

$$I\colon E_2^{pq}(^\circ K) \to E_2^{pq}(K)$$

– гомоморфизм, индуцированный включением $^\circ K^{**} \to K^{**}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E_2^{pq}(^\circ K) & \xrightarrow{\ ^\circ Q\ } & ^\circ H^p(\mathbf{T}; H^q(\mathbf{W})) \\ {\scriptstyle I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J} \\ E_2^{pq}(K) & \xrightarrow{\ Q\ } & H^p(\mathbf{T}; H^q(\mathbf{W})). \end{array}$$

Видно, что I – изоморфизм. Значит, по теореме о сравнении спектральных последовательностей, включение $i\colon \overline{{}^\circ K}^* \to \overline{K}^*$ – квазиизоморфизм. Рассмотрим коммутативную диаграмму комплексов и морфизмов

$$\begin{array}{ccc} \overline{{}^\circ K}^* & \xrightarrow{{}^\circ a} & {}^\circ C^*(\widetilde{\mathbf{T}}) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \overline{K}^* & \xrightarrow{a} & C^*(\widetilde{\mathbf{T}}), \end{array}$$

где h – включение. Видно, что h – квазиизоморфизм.

§7. Пространства Эйленберга–Маклейна

Пусть даны абелевы группы L, M, эпиморфизм $p\colon L \to M$ и число $n \in \mathbb{N}$. Пусть $L' = \ker p$, $i\colon L' \to L$ – включение, $P = P_*$ – комплекс с

$$P_n = L, \quad P_{n+1} = L', \quad (\partial\colon P_{n+1} \to P_n) = i$$

и $P_q = 0$ при $q \neq n, n+1$.

Рассмотрим (см. [3, III.2]) симплициальную абелеву группу $\mathbf{V}$, у которой $\mathbf{V}_q$ $(q \in \mathbb{N})$ – группа морфизмов комплекса $C_*(\boldsymbol{\Delta}^q)$ в комплекс P_* и очевидные структурные гомоморфизмы. Полагаем $\mathcal{K}(p,n) = \mathbf{V}$. Если группа L свободна, то группа $\mathbf{V}$ тоже свободна. $|\mathbf{V}|$ – пространство Эйленберга–Маклейна типа (M,n). Коцикл $Z \in C^n(\mathbf{V}; M)$, заданный правилом $Z(v) = p(v(\epsilon_n))$, $v \in \mathbf{V}_n$, где $\epsilon_n = \mathrm{id}\colon [n] \to [n]$, называем *универсальным*. Класс $z \in H^n(\mathbf{V}; M)$ коцикла Z даёт изоморфизм

$$H_n(\mathbf{V}) \to M, \quad x \mapsto \langle z, x\rangle.$$

7.1. Лемма. *Пусть даны симплициальное множество $\mathbf{T}$, симплициальная абелева группа $\mathbf{U}$, удобное симплициальное отображение $\mathbf{j}\colon \mathbf{T} \to \mathbf{U}$ и регулярный относительно $\mathbf{j}$ коцикл $Y \in C^n(\mathbf{T}; M)$. Тогда существует регулярное относительно $\mathbf{j}$ симплициальное отображение $\mathbf{k}\colon \mathbf{T} \to \mathbf{V}$ такое, что $Y = \mathbf{k}^\sharp(Z)$.*

Доказательство. Так как отображение $\mathbf{j}$ удобно, то точна последовательность комплексов

$$0 \longleftarrow {}^\circ C^*(\mathbf{T}; M) \xleftarrow{p_\sharp} {}^\circ C^*(\mathbf{T}; L) \xleftarrow{i_\sharp} {}^\circ C^*(\mathbf{T}; L') \longleftarrow 0,$$

где кружок обозначает регулярность относительно $\mathbf{j}$. Поэтому есть такие коцепи $X \in {}^\circ C^n(\mathbf{T}; L)$ и $X' \in {}^\circ C^{n+1}(\mathbf{T}; L')$, что $Y = p_\sharp(X)$ и $dX = i_\sharp(X')$. Зададим морфизм

$$w = w_* \colon C_*(\mathbf{T}) \to P_*,$$

полагая $w_n = X$, $w_{n+1} = X'$ при очевидном отождествлении $\operatorname{Hom}(C_q(\mathbf{T}), N) = C^q(\mathbf{T}; N)$. Отображение $\mathbf{k}$ зададим, полагая

$$\mathbf{k}_q(t) = w \circ [t]_\sharp, \quad t \in \mathbf{T}_q, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Его регулярность относительно $\mathbf{j}$ легко проверить, используя удобность последнего. □

7.2. Следствие. *Пусть даны симплициальное множество $\mathbf{T}$, симплициальная абелева группа $\mathbf{U}$ и нормальное удобное симплициальное связанное отображение $\mathbf{j} \colon \mathbf{T} \to \mathbf{U}$. Предположим, что $n > 0$. Тогда для любого элемента $y \in H^n(\mathbf{T}; M)$ существует регулярное относительно $\mathbf{j}$ связанное симплициальное отображение $\mathbf{k} \colon \mathbf{T} \to \mathbf{V}$ такое, что $y = \mathbf{k}^*(z)$.*

Доказательство. Так как отображение $\mathbf{j}$ нормально, то класс y представим регулярным относительно $\mathbf{j}$ коциклом, и лемма 7.1 даёт регулярное относительно $\mathbf{j}$ симплициальное отображение $\mathbf{k} \colon \mathbf{T} \to \mathbf{V}$ с $y = \mathbf{k}^*(z)$. Заменим его на связанное отображение $\mathbf{k} - \mathbf{k} \circ \mathbf{o}$, где $\mathbf{o} \colon \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ – постоянное связанное симплициальное отображение. □

§8. Отображение $z_{\mathbf{T}}$

Геометрический n-симплекс:

$$\Delta^n = \{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant z_1 \leqslant \ldots \leqslant z_n \leqslant 1 \} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Для $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Delta^n$ полагаем

$$\sigma(z) = \{0, z_1, \ldots, z_n, 1\} \subset \mathbb{R}.$$

Пусть дано симплициальное множество $\mathbf{T}$. Для $z \in \Delta^n$ $(n \in \mathbb{N})$ задаём отображение $z_{\mathbf{T}} \colon \mathbf{T}_n \to \mathbf{T}$, полагая: $z_{\mathbf{T}}(t)$ – образ точки z при геометрическом характеристическом отображении $\Delta^n \to |\mathbf{T}|$ симплекса t.

8.1. Лемма. *Пусть даны такие точки $x \in \Delta^p$, $y \in \Delta^q$ $(p, q \in \mathbb{N})$, что $\sigma(x) \supset \sigma(y)$. Тогда $\operatorname{im} x_{\mathbf{T}} \supset \operatorname{im} y_{\mathbf{T}}$.* □

8.2. Лемма. *Пусть дана такая точка $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Delta^n$ $(n \in \mathbb{N})$, что $0 < z_1 < \ldots < z_n < 1$. Тогда отображение $z_{\mathbf{T}}$ инъективно.* □

§9. Блоки

Пусть даны пунктированное симплициальное множество $\mathbf{T}$, симплициальная абелева группа $\mathbf{U}$, связанное симплициальное отображение $\mathbf{j}\colon \mathbf{T} \to \mathbf{U}$, симплициальные абелевы группы $\mathbf{V}$, $\widetilde{\mathbf{V}}$ и сюръективный симплициальный гомоморфизм $\mathbf{h}\colon \widetilde{\mathbf{V}} \to \mathbf{V}$. Построим коммутативную диаграмму пунктированых симплициальных множеств и связанных отображений

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbf{U}} \arrow[d, "\mathbf{g}"'] & \widetilde{\mathbf{T}} \arrow[l, "\widetilde{\mathbf{j}}"'] \arrow[r, "\widetilde{\mathbf{k}}"] \arrow[d, "\mathbf{f}"'] & \widetilde{\mathbf{V}} \arrow[d, "\mathbf{h}"] \\
\mathbf{U} & \mathbf{T} \arrow[l, "\mathbf{j}"'] \arrow[r, "\mathbf{k}"] & \mathbf{V},
\end{tikzcd}$$

где правый квадрат декартов, $\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}\times\widetilde{\mathbf{V}}$, $\mathbf{g}$ – проекция, $\widetilde{\mathbf{j}} = (\mathbf{j}\circ\mathbf{f})\times \widetilde{\mathbf{k}}$. Такую диаграмму называем *блоком*. Как хорошо известно, $|\mathbf{h}|$ – расслоение (в смысле Серра). Так как правый квадрат декартов, то $|\mathbf{f}|$ – тоже расслоение.

9.1. Лемма. *Предположим, что группы $\mathbf{V}$, $\widetilde{\mathbf{V}}$ свободны, отображение $\mathbf{j}$ особо и отображение $\mathbf{k}$ регулярно относительно $\mathbf{j}$. Тогда отображение $\widetilde{\mathbf{j}}$ тоже особо.*

Легко проверить, используя лемму 2.4. □

9.2. Лемма. *Предположим, что группы $\mathbf{V}$, $\widetilde{\mathbf{V}}$ свободны, группа $\ker\mathbf{h}$ связна, отображение $\mathbf{j}$ удобно и нормально и отображение $\mathbf{k}$ регулярно относительно $\mathbf{j}$. Тогда отображение $\widetilde{\mathbf{j}}$ тоже нормально.*

Это доказано в §6. □

§10. Подъём в блоке

Пусть даны множества X, Y, конечное множество B отображений $a\colon X \to Y$ и конечное множество $E \subset X \times Y$. Для $a \in B$ задаём элемент $I_a \in \mathbb{Z}^E$, $(I_a)_t = [t \in \Gamma(a)]$.

10.1. Лемма. *Пусть даны абелева группа M, отображение $g\colon B \to M$ и число $r \in \mathbb{N}$. Тогда отображение g (E,r)-определимо в том и только в том случае, если существует r-регулярное отображение $h\colon \mathbb{Z}^E \to M$ такое, что $g(a) = h(I_a)$, $a \in B$.*

Доказательство. Если отображение g (E,r)-определимо, т.е. есть такое отображение $k\colon E(r) \to M$, что $k_B = g$, то нужное отображение h зададим формулой

$$h(u) = \sum_{F \in E(r)} \Big(\prod_{t \in F} u_t\Big) k(F),$$

(по лемме 2.1 оно r-регулярно). Наоборот, если h – такое отображение, то, по лемме 2.1, оно задаётся правилом

$$h(u) = \sum_{s \in \mathbb{N}^E : s_* \leqslant r} \Big(\prod_{t \in E} \binom{u_t}{s_t}\Big) m_s, \qquad u \in U,$$

где $m_s \in M$. Для $u \in \{0,1\}^E$

$$h(u) = \sum_{s \in \{0,1\}^E : s_* \leqslant r} \Big(\prod_{t \in E : s_t = 1} u_t\Big) m_s.$$

Нужное отображение k зададим, полагая $k(F) = m_s$, где $s_t = [t \in F]$. □

10.2. Лемма. *Пусть даны абелевы группы M, M', отображение $f\colon M \to M'$, отображение $g\colon B \to M$ и числа $r, s \in \mathbb{N}$. Предположим, что отображение f s-регулярно, а отображение g (E, r)-определимо. Тогда отображение $g' = f \circ g$ (E, rs)-определимо.*

Ввиду леммы 10.1 это следует из леммы 2.4. □

10.3. Лемма. *Пусть даны абелева группа M', подгруппа $M \subset M'$, отображение $g\colon B \to M$ и число $r \in \mathbb{N}$. Пусть $i\colon M \to M'$ – включение. Предположим, что группа M'/M – плоская и отображение $g' = i \circ g$ (E, r)-определимо. Тогда отображение g также (E, r)-определимо.*

Доказательство. Есть такое отображение $k'\colon E(r) \to M'$, что $g' = k'_B$. Пусть $N' \subset M'$ – подгруппа, порождённая множеством $\operatorname{im} k'$, $N = M \cap N'$. Группа N'/N свободна, так как она плоская и конечно порожденная. Поэтому есть такой гомоморфизм $p\colon N' \to N$, что $p|_N = \mathrm{id}$. Зададим отображение

$$k\colon E(r) \to M, \quad k(F) = p(k'(F)).$$

Легко проверить, что $g = k_B$. □

Для числа $m \in \mathbb{N}$ и абелевой группы U полагаем: $\Pi'_m U$ – абелева группа всех связанных отображений $a\colon S^m \to U$.

10.4. Лемма. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$ и плоская симплициальная абелева группа $\mathbf{U}$. Тогда группа $\Pi'_m|\mathbf{U}|/\Pi_m|\mathbf{U}|$ – плоская.*

Доказательство. Пусть дано $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Симплициальный гомоморфизм $\mathbf{q}\colon \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ умножения на q инъективен. Значит, $|\mathbf{q}|$ – топологическое вложение. Поэтому если для какого-то отображения $a \in \Pi'_m|\mathbf{U}|$ имеем $qa \in \Pi_m|\mathbf{U}|$, т. е. отображение $qa = |\mathbf{q}| \circ a$ непрерывно, то отображение a само непрерывно, т. е. $a \in \Pi_m|\mathbf{U}|$. □

10.5. Лемма. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$, плоская симплициальная абелева группа $\mathbf{U}$, отображение $f\colon B \to \Pi_m|\mathbf{U}|$ и число $r \in \mathbb{N}$. Для $x \in S^m$ пусть $l_x\colon \Pi_m|\mathbf{U}| \to |\mathbf{U}|$ – гомоморфизм вычисления в точке x. Предположим, что для любой точки $x \in S^m$ отображение $l_x \circ f$ (E, r)-определимо. Тогда отображение f (E, r)-определимо.*

Доказательство. По лемме 10.4 группа $\Pi'_m|\mathbf{U}|/\Pi_m|\mathbf{U}|$ плоска. Пусть $i\colon \Pi_m|\mathbf{U}| \to \Pi'_m|\mathbf{U}|$ – включение. Очевидно, отображение $i \circ f$ (E, r)-определимо. По лемме 10.3 отображение f (E, r)-определимо. □

10.6. Лемма. *Пусть даны симплициальное множество $\mathbf{T}$, симплициальная абелева группа $\mathbf{U}$, симплициальное отображение $\mathbf{j}\colon \mathbf{T} \to \mathbf{U}$, отображение $f\colon B \to |\mathbf{T}|$ и число $r \in \mathbb{N}$. Предположим, что отображение $|\mathbf{j}| \circ f$ (E, r)-определимо. Тогда существуют число $n \in \mathbb{N}$, точка $z \in \Delta^n$ и отображение $g\colon B \to \mathbf{T}_n$ такие, что $f = z_{\mathbf{T}} \circ g$ и отображение $\mathbf{j}_n \circ g$ (E, r)-определимо.*

Доказательство. Есть такое отображение $k\colon E(r) \to |\mathbf{U}|$, что $|\mathbf{j}| \circ f = k_B$. По лемме 8.1 есть число $n \in \mathbb{N}$ и точка $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Delta^n$ такие, что

$$\operatorname{im} z_{\mathbf{T}} \supset \operatorname{im} f, \quad \operatorname{im} z_{\mathbf{U}} \supset \operatorname{im} k \quad \text{и} \quad 0 < z_1 < \ldots < z_n < 1.$$

Есть такое отображение $g\colon B \to \mathbf{T}_n$, что $z_{\mathbf{T}} \circ g = f$, и такое отображение $l\colon E(r) \to \mathbf{U}_n$, что $z_{\mathbf{U}} \circ l = k$. Имеем

$$z_{\mathbf{U}} \circ \mathbf{j}_n \circ g = |\mathbf{j}| \circ z_{\mathbf{T}} \circ g = |\mathbf{j}| \circ f = k_B = (z_{\mathbf{U}} \circ l)_B = z_{\mathbf{U}} \circ l_B.$$

Так как, по лемме 8.2, $z_{\mathbf{U}}$ – мономорфизм, то $\mathbf{j}_n \circ g = l_B$. Значит, отображение $\mathbf{j}_n \circ g$ (E, r)-определимо. □

10.7. Лемма. *Пусть даны симплициальное множество* $\mathbf{T}$, *симплициальные абелевы группы* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, *симплициальные отображения* $\mathbf{j}\colon \mathbf{T} \to \mathbf{U}$, $\mathbf{k}\colon \mathbf{T} \to \mathbf{V}$, *отображение* $f\colon B \to |\mathbf{T}|$ *и числа* $r, s \in \mathbb{N}$. *Предположим, что отображение* $\mathbf{k}$ s*-регулярно относительно* $\mathbf{j}$ *и отображение* $|\mathbf{j}| \circ f$ (E, r)*-определимо. Тогда отображение* $|\mathbf{k}| \circ f$ (E, rs)*-определимо.*

Доказательство. По лемме 10.6 есть число $n \in \mathbb{N}$, точка $z \in \Delta^n$ и отображение $g\colon B \to \mathbf{T}_n$ такие, что $f = z_{\mathbf{T}} \circ g$ и отображение $\mathbf{j}_n \circ g$ (E, r)-определимо. Есть s-регулярное отображение $q\colon \mathbf{U}_n \to \mathbf{V}_n$ такое, что $\mathbf{k}_n = q \circ \mathbf{j}_n$. Так как отображение $\mathbf{j}_n \circ g$ (E, r)-определимо, а отображение q s-регулярно, то по лемме 10.2 отображение

$$q \circ \mathbf{j}_n \circ g = \mathbf{k}_n \circ g$$

(E, rs)-определимо. Так как $z_{\mathbf{V}}$ – гомоморфизм, то отображение

$$z_{\mathbf{V}} \circ \mathbf{k}_n \circ g = |\mathbf{k}| \circ f$$

также (E, rs)-определимо. □

10.8. Лемма. *Пусть даны число* $m \in \mathbb{N}$, *пунктированное симплициальное множество* $\mathbf{T}$, *симплициальные абелевы группы* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, *связанные симплициальные отображения*

$$\mathbf{j}\colon \mathbf{T} \to \mathbf{U}, \quad \mathbf{k}\colon \mathbf{T} \to \mathbf{V},$$

отображение $e\colon B \to \Pi_m|\mathbf{T}|$ *и числа* $r, s \in \mathbb{N}$. *Предположим, что группа* $\mathbf{V}$ *– плоская, отображение* $\mathbf{k}$ s*-регулярно относительно* $\mathbf{j}$ *и отображение* $|\mathbf{j}|_\sharp \circ e$ (E, r)*-определимо. Тогда отображение* $|\mathbf{k}|_\sharp \circ e$ (E, rs)*-определимо.*

Доказательство. Пусть $x \in S^m$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Pi_m|\mathbf{U}| \arrow[d, "l'"] & \Pi_m|\mathbf{T}| \arrow[l, "|\mathbf{j}|_\sharp"'] \arrow[r, "|\mathbf{k}|_\sharp"] \arrow[d, "l"] & \Pi_m|\mathbf{V}| \arrow[d, "l''"] \\
|\mathbf{U}| & |\mathbf{T}| \arrow[l, "|\mathbf{j}|"'] \arrow[r, "|\mathbf{k}|"] & |\mathbf{V}|,
\end{tikzcd}$$

где l, l', l'' – отображения вычисления в точке x. Так как l' – гомоморфизм, то отображение

$$l' \circ |\mathbf{j}|_\sharp \circ e = |\mathbf{j}| \circ l \circ e$$

(E,r)-определимо. По лемме 10.7 отображение

$$|\mathbf{k}| \circ l \circ e = l'' \circ |\mathbf{k}|_\sharp \circ e$$

(E,rs)-определимо. По лемме 10.5 отображение $|\mathbf{k}|_\sharp \circ e$ также (E,rs)-определимо. $\square$

10.9. Лемма. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, блок*

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathbf{U}} & \xleftarrow{\widetilde{\mathbf{j}}} & \widetilde{\mathbf{T}} & \xrightarrow{\widetilde{\mathbf{k}}} & \widetilde{\mathbf{V}} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{f}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{h}} \\ \mathbf{U} & \xleftarrow{\mathbf{j}} & \mathbf{T} & \xrightarrow{\mathbf{k}} & \mathbf{V}, \end{array}$$

отображение $e\colon B \to \Pi_m|\mathbf{T}|$ и числа $r, s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 1$. Предположим, что группа $\mathbf{V}$ – плоская, $\pi_m|\mathbf{V}| = 0$, отображение $\mathbf{k}$ s-регулярно относительно $\mathbf{j}$ и отображение $|\mathbf{j}|_\sharp \circ e$ (E,r)-определимо. Тогда существует отображение

$$\widetilde{e}\colon B \to \Pi_m|\widetilde{\mathbf{T}}|$$

такое, что $|\mathbf{f}|_\sharp \circ \widetilde{e} = e$ и отображение $|\widetilde{\mathbf{j}}|_\sharp \circ \widetilde{e}$ (E,rs)-определимо.

Доказательство. Есть такое отображение $p\colon E(r) \to \Pi_m|\mathbf{U}|$, что $|\mathbf{j}|_\sharp \circ e = p_B$. Продолжим его нулём до отображения

$$\bar{p}\colon E(rs) \to \Pi_m|\mathbf{U}|.$$

Очевидно, $\bar{p}_B = p_B$. По лемме 10.8 отображение $|\mathbf{k}|_\sharp \circ e$ (E,rs)-определимо, т.е. существует отображение $q\colon E(rs) \to \Pi_m|\mathbf{V}|$ такое, что $|\mathbf{k}|_\sharp \circ e = q_B$. Так как $|\mathbf{h}|$ – расслоение и $\pi_m|\mathbf{V}| = 0$, то

$$|\mathbf{h}|_\sharp\colon \Pi_m|\widetilde{\mathbf{V}}| \to \Pi_m|\mathbf{V}|$$

– эпиморфизм. Выберем такое отображение $\widetilde{q}\colon E(rs) \to \Pi_m|\widetilde{\mathbf{V}}|$, что $|\mathbf{h}|_\sharp \circ \widetilde{q} = q$. Пусть

$$\widetilde{p} = \bar{p} \times \widetilde{q}\colon E(rs) \to \Pi_m|\mathbf{U}| \times \Pi_m|\widetilde{\mathbf{V}}| = \Pi_m|\widetilde{\mathbf{U}}|$$

(поскольку $\mathbf{U} \times \widetilde{\mathbf{V}} = \widetilde{\mathbf{U}}$). Используя то, что правый квадрат декартов, нужное отображение $\widetilde{e}$ зададим условиями

$$|\mathbf{f}|_\sharp \circ \widetilde{e} = e \quad \text{и} \quad |\widetilde{\mathbf{k}}|_\sharp \circ \widetilde{e} = \widetilde{q}_B$$

(легко проверить, что $|\mathbf{k}|_\sharp \circ e = |\mathbf{h}|_\sharp \circ \widetilde{q}_B$). Так как $\widetilde{\mathbf{j}} = (\mathbf{j} \circ \mathbf{f}) \times \widetilde{\mathbf{k}}$, то

$$|\widetilde{\mathbf{j}}|_\sharp \circ \widetilde{e} = (|\mathbf{j}|_\sharp \circ |\mathbf{f}|_\sharp \circ \widetilde{e}) \times (|\widetilde{\mathbf{k}}|_\sharp \circ \widetilde{e}) = (|\mathbf{j}|_\sharp \circ e) \times (|\widetilde{\mathbf{k}}|_\sharp \circ \widetilde{e}) = \bar{p}_B \times \widetilde{q}_B = \widetilde{p}_B$$

(поскольку $\bar{p} \times \widetilde{q} = \widetilde{p}$). $\square$

§11. Башня Уайтхеда

11.1. Лемма. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$, пунктированные пространства Y, Y', связанное непрерывное отображение $g\colon Y \to Y'$, число $r \in \mathbb{N}$, абелева группа M и r-определимое отображение $f'\colon \Pi_m(Y') \to M$. Тогда отображение*

$$f = f' \circ g_\sharp \colon \Pi_m(Y) \to M$$

r-определимо.

Доказательство. Пусть дано конечное множество $B \subset \Pi_m(Y)$. Пусть

$$B' = g_\sharp(B) \subset \Pi_m(Y').$$

Есть такие конечное множество $E' \subset S^m \times Y'$ и отображение $k'\colon E'(r) \to M$, что $f'|_{B'} = k'_{B'}$. Пусть

$$G = (\mathrm{id}, g)\colon S^m \times Y \to S^m \times Y',$$

$$L = \bigcup_{a \in B} \Gamma(a) \subset S^m \times Y,$$

$$E = L \cap G^{-1}(E') \subset S^m \times Y.$$

Ясно, что множество E конечно. Зададим отображение

$$k\colon E(r) \to M, \quad k(F) = k'(G(F)).$$

Покажем, что $f|_B = k_B$. Пусть дано $a \in B$. Легко видеть, что формула $F \mapsto G(F)$ задаёт биекцию

$$\{\, F \in E(r) : F \subset \Gamma(a) \,\} \to \{\, F' \in E'(r) : F' \subset \Gamma(g \circ a) \,\}.$$

Поэтому

$$k_B(a) = \sum_{\substack{F \in E(r):\\ F \subset \Gamma(a)}} k(F) = \sum_{\substack{F \in E(r):\\ F \subset \Gamma(a)}} k'(G(F)) = \sum_{\substack{F' \in E'(r):\\ F' \subset \Gamma(g \circ a)}} k'(F')$$
$$= k'_{B'}(g \circ a) = f'(g \circ a) = f(a). \qquad \square$$

11.2. Лемма. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$ и плоская симплициальная абелева группа $\mathbf{U}$. Тогда отображение $\mathrm{id}\colon \Pi_m|\mathbf{U}| \to \Pi_m|\mathbf{U}|$ 1-определимо.*

Доказательство. Пусть дано конечное множество $B \subset \Pi_m|\mathbf{U}|$. Для $x \in S^m$ зададим на B отношение

$$R_x = \{\,(a, a') : a(x) = a'(x)\,\}.$$

Выберем конечное множество $Z \subset S^m$ такое, что

$$\{\, R_z \mid z \in Z \,\} = \{\, R_x \mid x \in S^m \,\}.$$

Пусть

$$E = \{\,(z, a(z)) \mid z \in Z, a \in B \,\} \subset S^m \times |\mathbf{U}|.$$

Пусть $x \in S^m$. Выберем такую точку $z \in Z$, что $R_z = R_x$. Зададим отображение

$$P\colon E \to |\mathbf{U}|,$$

полагая $P(z, a(z)) = a(x)$ для $a \in B$ (это корректно, так как $R_z = R_x$) и $P(t) = 0$ для остальных $t \in E$. Зададим отображение $p\colon E(1) \to |\mathbf{U}|$, полагая $p(\{t\}) = P(t)$ для $t \in E$ и $p(\varnothing) = 0$. Пусть

$$l\colon \Pi_m|\mathbf{U}| \to |\mathbf{U}|$$

– отображение вычисления в точке x. Легко проверить, что $l|_B = p_B$. Значит, отображение $l|_B$ $(E, 1)$-определимо. Таким образом, по лемме 10.5, включение $B \to \Pi_m|\mathbf{U}|$ $(E, 1)$-определимо. Следовательно, отображение $\mathrm{id}\colon \Pi_m|\mathbf{U}| \to \Pi_m|\mathbf{U}|$ 1-определимо. □

11.3. Утверждение. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, и односвязное пунктированное симплициальное множество $\mathbf{T}$. Тогда существует такое $r \in \mathbb{N}$, что основное отображение $h\colon \Pi_m|\mathbf{T}| \to \pi_m|\mathbf{T}|$ r-определимо.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{j}\colon \mathbf{T} \to \mathbf{U}$ – универсальное связанное симплициальное отображение множества $\mathbf{T}$ в симплициальную абелеву группу. Отображение $\mathbf{j}$, очевидно, особо и нормально.

Последовательно для каждого $n = 2, 3, \ldots$ построим $(n-1)$-связное пунктированное симплициальное множество $\mathbf{T}^n$ (эти множества будут образовывать башню Уайтхеда для $\mathbf{T}$), симплициальную абелеву группу $\mathbf{U}^n$ и нормальное особое (и, следовательно, удобное) связанное симплициальное отображение

$$\mathbf{j}^n : \mathbf{T}^n \to \mathbf{U}^n.$$

Пусть
$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}, \quad \mathbf{U}^2 = \mathbf{U} \quad \text{и} \quad \mathbf{j}^2 = \mathbf{j}.$$

Предположим, для некоторого n всё построено. Пусть $M = H_n(\mathbf{T}^n)$, $i \in H^n(\mathbf{T}^n; M)$ – такой класс, что $\langle i, x\rangle = x$ для любого $x \in H_n(\mathbf{T}^n) = M$.

Выберем свободную абелеву группу L и эпиморфизм $p\colon L \to M$. Пусть $\mathbf{V}^n = \mathcal{K}(p, n)$, $z \in H^n(\mathbf{V}^n; M)$ – универсальный когомологический класс. По следствию 7.2 есть регулярное относительно $\mathbf{j}^n$ связанное симплициальное отображение $\mathbf{k}^n : \mathbf{T}^n \to \mathbf{V}^n$ такое, что $i = \mathbf{k}^*(z)$. Пусть $\mathbf{c}^n : \mathbf{PV}^n \to \mathbf{V}^n$ – канонический симплициальный гомоморфизм. Так как группа $\mathbf{V}^n$ связна, то гомоморфизм $\mathbf{c}^n$ сюръективен, а так как она односвязна, то группа $\mathbf{ker}\,\mathbf{c}^n$ связна. Поскольку группа $\mathbf{V}^n$ свободна, то группа $\mathbf{PV}^n$ тоже свободна. Построим блок

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{U}^{n+1} \arrow[d] & \mathbf{T}^{n+1} \arrow[l, "\mathbf{j}^{n+1}"'] \arrow[r, "\widetilde{\mathbf{k}}^n"] \arrow[d, "\mathbf{f}^n"'] & \mathbf{PV}^n \arrow[d, "\mathbf{c}^n"] \\
\mathbf{U}^n & \mathbf{T}^n \arrow[l, "\mathbf{j}^n"'] \arrow[r, "\mathbf{k}^n"] & \mathbf{V}^n.
\end{tikzcd}$$

Сравнивая гомотопические последовательности расслоений $|\mathbf{f}^n|$ и $|\mathbf{c}^n|$, получаем, что множество $\mathbf{T}^{n+1}$ n-связно. По лемме 9.1 отображение $\mathbf{j}^{n+1}$ особо. По лемме 9.2, оно нормально. (Конец индукции.)

Для $n = 2, 3, \ldots$ пусть
$$\mathbf{F}^n = \mathbf{f}^2 \circ \ldots \circ \mathbf{f}^{n-1}\colon \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}$$
($\mathbf{F}^2 = \mathbf{id}$), пусть $s_n \in \mathbb{N}$, $s_n \geqslant 1$, – такое число, что отображение $\mathbf{k}^n$ s_n-регулярно, и пусть $r_n = s_2 \ldots s_{n-1}$ ($r_2 = 1$).

Пусть дано конечное множество $B \subset \Pi_m|\mathbf{T}|$. Пусть $e\colon B \to \Pi_m|\mathbf{T}|$ – включение. По леммам 11.2 и 11.1 отображение $|\mathbf{j}|_\sharp$ 1-определимо. Значит, есть конечное множество $E \subset S^m \times |\mathbf{T}|$ такое, что отображение $|\mathbf{j}|_\sharp|_B$ $(E, 1)$-определимо.

Последовательно для $n = 2, 3, \ldots, m$ построим отображение
$$e^n : B \to \Pi_m|\mathbf{T}^n|$$
такое, что $|\mathbf{F}^n|_\sharp \circ e^n = e$ и отображение $|\mathbf{j}^n|_\sharp \circ e^n$ (E, r_n)-определимо. Пусть $e^2 = e$. Переход даётся леммой 10.9.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \Pi_m|\mathbf{V}^m| \arrow[r, "g"] & \pi_m|\mathbf{V}^m| \\
 & \Pi_m|\mathbf{T}^m| \arrow[r, "h^m"] \arrow[u, "|\mathbf{k}^m|_\sharp"] \arrow[d, "|\mathbf{F}^m|_\sharp"'] & \pi_m|\mathbf{T}^m| \arrow[u, "|\mathbf{k}^m|_*"'] \arrow[d, "|\mathbf{F}^m|_*"] \\
B \arrow[r, "e"] & \Pi_m|\mathbf{T}| \arrow[r, "h"] & \pi_m|\mathbf{T}|,
\end{tikzcd}$$

где h^m, g – основные отображения. Так как отображение $|\mathbf{j}^m|_\sharp \circ e^m$ (E, r_m)-определимо, а отображение $\mathbf{k}^m$ s_m-регулярно относительно $\mathbf{j}^m$, то по лемме 10.8 отображение $|\mathbf{k}^m|_\sharp \circ e^m$ (E, r_{m+1})-определимо. Так как g – гомоморфизм, то отображение

$$g \circ |\mathbf{k}^m|_\sharp \circ e^m = |\mathbf{k}^m|_* \circ h^m \circ e^m$$

(E, r_{m+1})-определимо. Так как $|\mathbf{k}^m|_*$ – изоморфизм, то отображение $h^m \circ e^m$ (E, r_{m+1})-определимо. Значит, отображение

$$|\mathbf{F}^m|_* \circ h^m \circ e^m = h|_B$$

также (E, r_{m+1})-определимо.

Таким образом, отображение h r_{m+1}-определимо. □

11.4. Утверждение. *Для любого $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, существует $r \in \mathbb{N}$ такое, что для любого односвязного пунктированного симплициального множества $\mathbf{T}$ основное отображение $h\colon \Pi_m|\mathbf{T}| \to \pi_m|\mathbf{T}|$ r-определимо.*

Доказательство. От противного: допустим, есть такое $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, что для каждого $s \in \mathbb{N}$ есть односвязное пунктированное симплициальное множество $\mathbf{T}^s$, у которого основное отображение $h^s : \Pi_m|\mathbf{T}^s| \to \pi_m|\mathbf{T}^s|$ не s-определимо. Пусть

$$\mathbf{T} = \bigvee_{s \in \mathbb{N}} \mathbf{T}^s.$$

По утверждению 11.3 найдется такое $r \in \mathbb{N}$, что основное отображение $h\colon \Pi_m|\mathbf{T}| \to \pi_m|\mathbf{T}|$ r-определимо. Пусть $\subset\colon \mathbf{T}^r \to \mathbf{T}$,

$\mathbf{p}\colon \mathbf{T} \to \mathbf{T}^r$ – канонические связанные симплициальные отображения ($\mathbf{p}\circ\subset = \mathbf{id}$). Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Pi_m|\mathbf{T}| & \xrightarrow{h} & \pi_m|\mathbf{T}| \\ {\scriptstyle |\subset|_\sharp}\Big\uparrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle |\mathbf{p}|_*} \\ \Pi_m|\mathbf{T}^r| & \xrightarrow{h^r} & \pi_m|\mathbf{T}^r|. \end{array}$$

По лемме 11.1 отображение $h \circ |\subset|_\sharp$ r-определимо. Так как $|\mathbf{p}|_*$ – гомоморфизм, то отображение $|\mathbf{p}|_* \circ h \circ |\subset|_\sharp = h^r$ также r-определимо. Противоречие. $\square$

Доказательство основной теоремы. Пусть дано $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Для пунктированного пространства Y пусть $h_Y : \Pi_m(Y) \to \pi_m(Y)$ – основное отображение. По утверждению 11.4 есть такое $r \in \mathbb{N}$, что для любого односвязного пунктированнного симплициального множества $\mathbf{T}$ отображение $h_{|\mathbf{T}|}$ r-определимо. Пусть дано односвязное допустимое пунктированное пространство Y. Есть пунктированное симплициальное множество $\mathbf{T}$ и связанная эквивалентность $e\colon Y \to |\mathbf{T}|$. По лемме 11.1 отображение $h_{|\mathbf{T}|} \circ e_\sharp = e_* \circ h_Y$ r-определимо. Так как e_* – изоморфизм, то отображение h_Y также r-определимо. $\square$

Литература

1. М. Минский, С. Пейперт, *Персептроны.* — Мир (1971).
2. С. С. Подкорытов, *Об отображениях сферы в односвязное пространство с конечно порождёнными гомотопическими группами.* — Алгебра и анализ, **16**, No. 4 (2004), 153–192.
3. P. G. Goerss and J. F. Jardine, *Simplicial homotopy theory.* Birkhäuser (1999).
4. M. Goussarov, M. Polyak, and O. Viro, *Finite-type invariants of classical and virtual knots.* — Topology. **39**, (2000), 1045–1068.
5. I. B. S. Passi, *Group rings and their augmentation ideals.* — Lect. Notes Math. 715, Springer (1979).

Podkorytov S. S. Mappings of the sphere to a simply connected space.

Fix an $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Let Y be a simply connected pointed CW-complex, and let B be a finite set of continuous mappings $a\colon S^m \to Y$ respecting the marked points. Let $\Gamma(a) \subset S^m \times Y$ be the graph of a, and let $[a] \in \pi_m(Y)$ be the homotopy class of a. Then for some $r \in \mathbb{N}$ depending on m only, there exist a finite set $E \subset S^m \times Y$ and a mapping

$k\colon E(r) = \{\, F \subset E : |F| \leqslant r \,\} \to \pi_m(Y)$ such that for each $a \in B$ we have

$$[a] = \sum_{F \in E(r) : F \subset \Gamma(a)} k(F).$$

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 23 ноября 2005 г.

E-mail: ssp@pdmi.ras.ru