von T. Böhme, F. Göring und J. Harant (Manuskript 1999). Der dritte Beweis ist von T. Grünwald (später Gallai), Ein neuer Beweis eines Mengerschen Satzes, *J. London Math. Soc.* **13** (1938), 188–192. Die globale Version des Satzes von Menger (Satz 2.3.5) wurde so zuerst von Whitney (1932) formuliert und bewiesen.

Der Satz von Mader (2.4.1) ist aus W. Mader, Über die Maximalzahl kreuzungsfreier H-Wege, *Arch. Math.* **31** (1978), 387–402. Der Satz läßt sich auffassen als gemeinsame Verallgemeinerung des Satzes von Menger und des 1-Faktor-Satzes 1.2.1 von Tutte (Übung). Satz 2.5.1 wurde unabhängig von Nash-Williams und von Tutte bewiesen; beide Arbeiten finden sich im *J. London Math. Soc.* **36** (1961). Satz 2.5.4 ist von C.St.J.A. Nash-Williams, Decompositions of finite graphs into forests, *J. London Math. Soc.* **39** (1964), 12. Unsere Beweise folgen einer Ausarbeitung von Mader. Beide Sätze lassen sich elegant in der Sprache der Matroide ausdrücken und beweisen; siehe dazu § 18 in B. Bollobás, *Combinatorics*, Cambridge University Press 1986.

In Kapitel 6.2 werden wir zeigen, daß zur Erzwingung eines topologischen K^r-Minors nicht ein Durchschnittsgrad von $h(r) = 2^{\binom{r}{2}}$ nötig ist, wie im Beweis von Satz 2.6.1: der erforderliche Durchschnittsgrad läßt sich vielmehr durch eine quadratische Funktion in r beschränken (Satz 6.2.1). Auch Satz 2.6.2 läßt sich verschärfen: B. Bollobás und A.G. Thomason zeigten in Highly linked graphs, *Combinatorica* **16** (1996), 313–320, daß auch hier eine lineare Schranke existiert: jeder $22k$-zusammenhängende Graph ist k-verbunden. Aus unserem Satz 6.2.1 wird mit dem Beweis von Satz 2.6.2 immerhin die Existenz einer lediglich quadratisch mit k wachsenden Funktion f folgen, für die jeder $f(k)$-zusammenhängende Graph k-verbunden ist. N. Robertson & P.D. Seymour, Graph Minors XIII: The disjoint paths problem, *J. Combin. Theory B* **63** (1995), 65-110, haben gezeigt, daß für jedes feste k ein $O(n^3)$-Algorithmus existiert, der entscheidet, ob ein gegebener Graph mit n Ecken k-verbunden ist. Betrachtet man k als Teil der Eingabe, so wird das Problem NP-schwer.

... ob es zu gegebenen verschiedenen Ecken $s_1, \dots, s_k$ und $t_1, \dots, t_k$ in einem Graphen disjunkte Verbindungswege $P_i = s_i \dots t_i$ gibt. (Dies ergibt dann einen $O(n^{k+3})$-Algorithmus zur Entscheidung von k-Verbundenheit.)

zu G und schreiben $(V^*, E^*) =: G^*$, wenn Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} F \to V^* & E \to E^* & V \to F^* \\ f \mapsto v^*(f) & e \mapsto e^* & v \mapsto f^*(v) \end{array}$$

existieren mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $v^*(f) \in f$ für alle $f \in F$;

(ii) $|e^* \cap G| = |\mathring{e}^* \cap \mathring{e}| = |e \cap G^*| = 1$ für alle $e \in E$;

(iii) $v \in f^*(v)$ für alle $v \in V$.

... und der Punkt aus $\mathring{e}^* \cap \mathring{e}$ liegt bei beiden Kanten im Inneren eines geraden Teilstücks

Aus der Existenz der genannten Bijektionen mit (i)–(iii) folgt, daß G und G^* zusammenhängend sind (Übung). Umgekehrt existiert zu jedem zusammenhängenden ebenen Multigraphen G ein topologisches Dual G^*: wählen wir aus jedem Gebiet f von G einen Punkt $v^*(f)$ als Ecke von G^*, so lassen sich die neuen Ecken wirklich stets durch kreuzungsfreie Polygonzüge verbinden, wie es die Bedingung (ii) verlangt, und es existiert dann auch eine (iii) erfüllende Bijektion $V \to F^*$ (Übung).

Sind G_1^* und G_2^* zwei Duale von G, so gilt offenbar $G_1^* \simeq G_2^*$; man kann sogar zeigen, daß die natürliche Bijektion $v_1^*(f) \mapsto v_2^*(f)$ ein topologischer Isomorphismus zwischen G_1^* und G_2^* ist. Wir dürfen in diesem Sinne also von *dem* Dual G^* von G sprechen.

Schließlich ist G seinerseits dual zu (jedem) G^*: verwenden wir die Umkehrabbildungen der drei Bijektionen aus der Definition von G^*, setzen also $v^*(f^*(v)) := v$ und $f^*(v^*(f)) := f$ für $f^*(v) \in F^*$ und $v^*(f) \in V^*$, so werden die Bedingungen (i) und (iii) für G^* gerade zu (iii) und (i) für G, und sind somit erfüllt; die Bedingung (ii) ist ohnehin symmetrisch in G und G^*. Die Bezeichnung "dual" ist damit auch formal gerechtfertigt.

Dualität bei ebenen Multigraphen ist nicht zuletzt deshalb so interessant, weil sie eine Beziehung herstellt zwischen jeweils ganz natürlichen aber verschiedenartigen Kantenmengen. Die Kantenmengen der Kreise in G (einschließlich Schlingen und Doppelkanten) entsprechen nämlich gerade den minimalen Schnitten in G^*:

Proposition 3.6.1. *Ist G ein zusammenhängender ebener Multigraph, so ist eine Kantenmenge $E \subseteq E(G)$ genau dann die Kantenmenge eines Kreises in G, wenn $E^* := \{ e^* \mid e \in E \}$ ein minimaler Schnitt in G^* ist.*

Beweis. Nach Bedingungen (i) und (ii) in der Definition von G^* liegen zwei Ecken $v^*(f_1)$ und $v^*(f_2)$ von G^* genau dann in der gleichen Komponente von $G^* - E^*$, wenn f_1 und f_2 im gleichen Gebiet von $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup E$ liegen: jeder $v^*(f_1)$–$v^*(f_2)$-Weg in $G^* - E^*$ ist ein Polygonzug zwischen f_1 und f_2 in $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup E$, und umgekehrt definiert jeder solche Polygonzug P (mit $P \cap V(G) = \emptyset$) einen Kantenzug in $G^* - E^*$ zwischen $v^*(f_1)$ und $v^*(f_2)$.

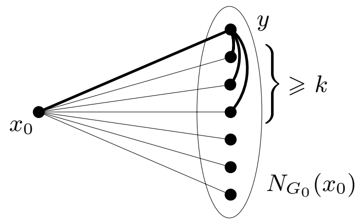

Abb. 6.2.4. Der Graph $G_1 \preccurlyeq G$: eine erste Näherung an den gesuchten Minor H

mindestens k gemeinsame Nachbarn, d.h. es gilt $\delta(G_1) \geqslant k+1 = 2m$ (Abb. 6.2.4). Ist k gerade, so setzen wir $m := k/2$ und

$$G_1 := G_0\,[\,N_{G_0}(x_0)\,]\,.$$

Dann ist $|G_1| = d_{G_0}(x_0) \leqslant 2k = 4m$, und wie oben folgt $\delta(G_1) \geqslant k = 2m$. In beiden Fällen haben wir also eine ganze Zahl $m \geqslant k/2$ und einen Graphen $G_1 \preccurlyeq G$ gefunden mit

$$|G_1| \leqslant 4m \tag{1}$$

und $\delta(G_1) \geqslant 2m$, also

$$\varepsilon(G_1) \geqslant m \geqslant k/2 \geqslant 3\,. \tag{2}$$

Unser Graph G_1 ist mit seinen $2\delta(G_1) \geqslant 4m \geqslant |G_1|$ bereits ein ganz guter Kandidat für den gesuchten Minor H von G. Um auch das fehlende $\frac{1}{6}k$ noch zu bekommen, werden wir den Kontraktionsprozeß ein zweites Mal anwenden (von G_1 ausgehend), und zwar etwas energischer als zuvor: wir kontrahieren schrittweise immer dann, wenn bei der Kontraktion nicht mehr als $\frac{7}{6}m$ Kanten pro Ecke verloren gehen, gestatten also einen etwas größeren Kantenverlust als es die Bewahrung von $\varepsilon \geqslant m$ zu erlauben scheint. (Bei der Gewinnung von G_0 aus G lag diese Schwelle bei $\varepsilon(G) = k$.) Endet dieser Kontraktionsprozeß mit einem nicht leeren Graphen H_0, so liegt $\varepsilon(H_0)$ dann jedoch über $\frac{7}{6}m$, also höher als bei G_1! Das gewonnene $\frac{1}{6}m$ wird dem Graphen H_1, den wir aus H_0 gewinnen werden wie oben G_1 aus G_0, seinen gewünschten hohen Minimalgrad geben.

Nicht $\varepsilon(H_0)$ sondern $\delta(H_0)$ wird größer als $\frac{7}{6}m$ sein. Damit ist es auch nicht absolut größer als $\delta(G_1)$ sondern nur vergleichsweise, dh. bei Ersetzung von m durch k. (Es war $\delta(G_1) \geqslant k$.)

Wodurch aber ist garantiert, daß auch dieser Kontraktionsprozeß wirklich mit einem nicht leeren Graphen enden wird? Durch die Tatsache, daß die pro Kontraktionsschritt erlaubte Abnahme der Kantenzahl um $\frac{7}{6}m$ immer noch zu gering ist, um in den höchstens $|G_1|$ Kontraktionsschritten alle $m\,|G_1|$ Kanten von G_1 verschwinden zu lassen! Dies erscheint zunächst paradox, erklärt sich aber ganz einfach: die Graphen gegen Ende des Kontraktionsprozesses wären einfach zu klein, als daß

Lemma 6.5.2. *Es sei (A, B) ein ϵ-reguläres Paar der Dichte d, und $Y \subseteq B$ enthalte mindestens $|Y| \geqslant \epsilon\,|B|$ Ecken. Dann haben alle bis auf weniger als $\epsilon\,|A|$ der Ecken in A jeweils mindestens $(d-\epsilon)|Y|$ Nachbarn in Y.*

Beweis. Es sei $X \subseteq A$ die Menge der Ecken mit weniger als $(d-\epsilon)|Y|$ Nachbarn in Y. Dann gilt $\|X, Y\| < |X|(d-\epsilon)|Y|$, und somit

$$d(X,Y) = \frac{\|X,Y\|}{|X|\,|Y|} < d - \epsilon = d(A,B) - \epsilon\,.$$

Da (A, B) ϵ-regulär ist und $|Y| \geqslant \epsilon\,|B|$, folgt $|X| < \epsilon\,|A|$. □

Eine Eckenpartition von G wie im Regularitätslemma veranschaulichen wir uns wiederum durch einen Graphen R. Die Ecken von R seien die Partitionsmengen $V_1, \dots, V_k$, und zu gegebenem $d \in (0,1\,]$ seien zwei dieser Ecken benachbart, wenn sie ein ϵ-reguläres Paar der Dichte $\geqslant d$ bilden. Ist $m := |V_1| = \ldots = |V_k|$, so nennen wir R einen *Regularitätsgraphen* von G mit Parametern ϵ, m und d. Ersetzen wir zu gegebenem $s \in \mathbb{N}$ jede Ecke V_i von R durch eine Menge V_i^s von s Ecken, und die Kanten V_iV_j von R durch vollständig bipartite Graphen zwischen den entsprechenden Mengen V_i^s und V_j^s, so bezeichnen wir den erhaltenen Graphen mit R_s. (Für $R = K^r$ ist also $R_s = K_s^r$.)

Das folgende Lemma liefert den Schlüssel zu einer ganzen Reihe von Anwendungen des Regularitätslemmas. Es besagt, daß wir Teilgraphen von R_s auch in G finden können, sofern ϵ hinreichend klein und die V_i hinreichend groß sind. Die benötigten Werte von ϵ und m hängen sogar nur von (d und) dem Maximalgraph jener Teilgraphen ab: Maximalgrad

Lemma 6.5.3. *Zu allen $d \in (0,1\,]$ und $\Delta \geqslant 1$ gibt es ein $\epsilon_0 > 0$ mit der folgenden Eigenschaft. Ist G irgendein Graph und H ein Graph mit $\Delta(H) \leqslant \Delta$, und ist $s \in \mathbb{N}$ und R ein Regularitätsgraph von G mit Parametern $\epsilon \leqslant \epsilon_0$, $m \geqslant s/\epsilon_0$ und d, so gilt*

$$H \subseteq R_s \;\;\Rightarrow\;\; H \subseteq G\,.$$

Beweis. Zu gegebenem d und Δ wählen wir $\epsilon_0 < d$ so klein, daß

$$\frac{\Delta+1}{(d-\epsilon_0)^{\Delta}}\,\epsilon_0 \leqslant 1 \tag{1}$$

gilt; das ist möglich, da $(\Delta+1)\epsilon/(d-\epsilon)^{\Delta} \to 0$ für $\epsilon \to 0$. Sind nun G, H, s und R gegeben, und ist $\{\,V_0, V_1, \dots, V_k\,\}$ die Eckenpartition von G, aus der R hervorging, so haben wir damit ein $\epsilon \leqslant \epsilon_0$, $V(R) = \{\,V_1, \dots, V_k\,\}$, und $|V_1| = \ldots = |V_k| = m \geqslant s/\epsilon_0$. Wir dürfen annehmen, daß H selbst ein Teilgraph von R_s ist (nicht nur isomorph dazu), sagen wir mit Ecken